

مجموعه کتاب‌های آی کیو قرن جدید

• ویژه کنکور ۱۴۰۵ •



ریاضیات تجربی

جامع کنکور

دهم | یازدهم | دوازدهم

مطابق با سبک جدید سؤالات کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمی

+ کنکور
۱۴۰۴

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

برای تویی که میخوای آینده‌ات رو خودت بسازی...

برای اینکه بتونی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های جنجالی

TNT

این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های **TNT** بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سوالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.

تست‌های چالشی

IQ

بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و میخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های **IQ** بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه. **دقت کنید!** تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.

تست‌های قرمز



تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای برزوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.

تست‌های آبی



در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.



دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنند که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی، در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون **دام تستی** براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.



عروض سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از **عروض سریع‌تر** سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.



به جوهره دیگه! طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنند و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنند! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون **جوهره** رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.



هایلایت

درسنامه‌های کاربردی درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب **هایلایت** کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.



سرنخ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت **سرنخ** دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنیم از اساتید عزیزی که در مراحل تألیف، همراه ما بودن به خصوص آقای علی احمدی قزل‌دشت و آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تألیف بشه.
- **اساتید:** معین گرمی، مجید رفعتی، آرش عمید، علی مقدم‌نیا، محمد مضطفی ابراهیمی، عزیزالله علی‌اصغری، امید شهری‌نژاد.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی

@sajad.azemati

فصل اول

 درس اول:
مفاهیم تابع

۱

CHAPTER 1

شناسایی تابع

به اولین بخش تابع خوش اومدید. بخش اول رو با شناسایی تابع شروع می‌کنیم.

کدام نمودار زیر مربوط به یک تابع است؟

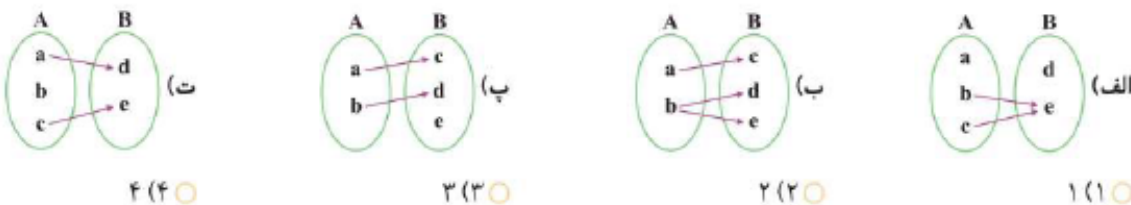
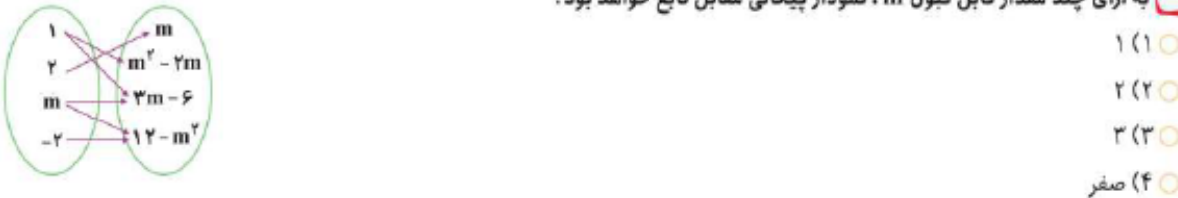

 ۲ اگر رابطه $f = \{(5, a-2b), (4, a+b), (4, -2), (5, 4a-b)\}$ نمایش یک تابع باشد $a-b$ کدام است؟

- ۱ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۱) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

 ۳ اگر رابطه $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (k+1, (k+2)^2)\}$ یک تابع نباشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۴ چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع نیست؟


 ۵ به ازای چند مقدار قابل قبول m ، نمودار پیکانی مقابل تابع خواهد بود؟


۶ چه تعداد از موارد زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشه چهارم آن را نسبت دهد.

ب) رابطه‌ای که هر عدد را به عددی نسبت می‌دهد که ۳ واحد با آن اختلاف دارد.

پ) رابطه‌ای که به هر عدد فرد اول، مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت دهد.

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر ☐

۷ کدام رابطه زیر تابع نیست؟

- ۱ (۱) $y^2 + |x| = 0$ ☐ ۲ (۲) $|x+3| + |y-1| = 0$ ☐ ۳ (۳) $[x] + [y] = 0$ ☐ ۴ (۴) $y = \sqrt{[x]^2 + 2[x] + 1}$ ☐

۸ با فرض $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ چند تابع می‌توان از A به B نوشت که شامل زوج مرتب $(c, 4)$ باشد؟

- ۹ (۱) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۱۶ (۳) ☐ ۴۸ (۴) ☐

۹ اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + mx & ; x \geq 1 \\ 3m^2 - 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ تابع باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ☐ -۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ -۲ (۴) ☐

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & |x| \leq 1 \\ ax^2 + 5 & |x| \geq 1 \end{cases}$ ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- ۴۶ (۱) ☐ ۳۲ (۲) ☐ ۲۵ (۳) ☐ ۱۴ (۴) ☐

۱۱ اگر رابطه $y = \begin{cases} ax + b & ; x \leq 2 \\ bx^2 + a & ; 2 \leq x \leq 3 \\ (a-b)x + 8 & ; x \geq 3 \end{cases}$ نشان‌دهنده یک تابع باشد، $a + b$ کدام است؟

- $\frac{16}{3}$ (۱) ☐ $\frac{15}{4}$ (۲) ☐ $\frac{17}{3}$ (۳) ☐ $\frac{15}{7}$ (۴) ☐

مقدار تابع

سریع توی تست‌های زیر، می‌خوایم مقدار تابع رو در نقاط مختلف پیدا کنیم.

۱۲ در تابع $f(x+3) = 3x + 14$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ☐ ۱۸ (۲) ☐ ۱۷ (۳) ☐ ۲۰ (۴) ☐

۱۳ اگر $2f(x+4) = f(4) + x^2 + 5(x+1) + 2$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- ۴ (۱) ☐ ۷ (۲) ☐ -۳ (۳) ☐ ۱ (۴) ☐

۱۴ اگر $g(3x+1) = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ x^2 & ; x < 2 \end{cases}$ باشد، مقدار $g(4) + g(10)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐

۱۵ اگر $f(2x-1) = 3x - a$ و $f(3) + f(-3) = 9$ باشد، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۶ اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ باشد، مقدار $f(\sqrt{7} + 2\sqrt{12})$ کدام است؟

- $\sqrt[3]{3}$ (۱) ☐ $2 + \sqrt{3}$ (۲) ☐ $3 + \sqrt{3}$ (۳) ☐ $3\sqrt{3}$ (۴) ☐

۱۷ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 14}$ باشد، مقدار $f(3 + \sqrt[3]{24})$ کدام است؟

- $\sqrt{2} + 1$ (۱) ☐ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۲) ☐ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۳) ☐ $\sqrt{2} - 1$ (۴) ☐

۱۸ اگر $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = 1 - x^2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- $-\frac{9}{4}$ (۱) ☐ $-\frac{3}{4}$ (۲) ☐ $\frac{9}{16}$ (۳) ☐ $\frac{21}{32}$ (۴) ☐

۱۹ اگر $4x^2 - mx + 3m - 1 = f(x) - 3xf(x+2) = (x+2)f(x)$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

- $\frac{17}{4}$ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ $\frac{25}{4}$ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۲۰ اگر $f(x) = \begin{cases} 4 - f(x) & ; x \geq 1 \\ x + 1 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(1 + f(-1))$ کدام است؟

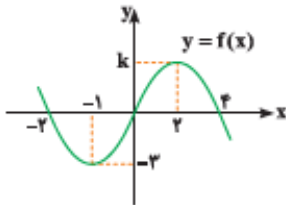
- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۱ تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 & ; x < 0 \\ 2x - 4 & ; 0 \leq x < 3 \\ x^2 - x - 12 & ; x \geq 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مجموع طول نقاط برخورد تابع f و محور x ها کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(-1) + g(2) = 14$ و $g(x) = \begin{cases} 1 + f(x) & ; x > 0 \\ f^2(x) & ; x \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار k کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۵) ☐



سریخ حالا می‌خواهیم بریم برای مساحت، محیط، حجم، فاصله، ... یک تابع بنویسیم.

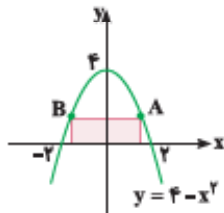
۲۳ کدام تابع مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را برحسب ارتفاع آن بیان می‌کند؟

- ۱ (۱) $S = \frac{\sqrt{3}}{4} h^2$ ☐ ۲ (۲) $S = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$ ☐ ۳ (۳) $S = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$ ☐ ۴ (۴) $S = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$ ☐

۲۴ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (P) بیان کند، کدام است؟

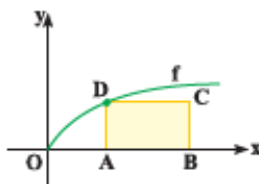
- ۱ (۱) $S(P) = \frac{P^2 - 36}{16}$ ☐ ۲ (۲) $S(P) = P^2 + 36$ ☐ ۳ (۳) $S(P) = \frac{P^2 - 36}{4}$ ☐ ۴ (۴) $S(P) = \frac{P^2 + 36}{16}$ ☐

۲۵ در شکل مقابل مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار تابع $y = 4 - x^2$ و دو رأس دیگر آن روی محور x ها قرار دارد، مشاهده می‌شود. مساحت مستطیل رنگی برحسب تابعی از x کدام است؟



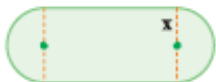
- ۱ (۱) $f(x) = 4x - x^2$ ☐ ۲ (۲) $f(x) = 8x - 2x^2$ ☐ ۳ (۳) $f(x) = 4x - x^2$ ☐ ۴ (۴) $f(x) = 8x - 2x^2$ ☐

۲۶ مطابق شکل، رأس $A(x, 0)$ و $B(6, 0)$ از مستطیل $ABCD$ روی محور x ها و رأس D روی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ قرار دارد. مساحت این مستطیل برحسب طول نقطه A کدام است؟



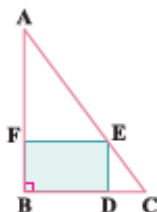
- ۱ (۱) $S(x) = 6 - \sqrt{x}$ ☐ ۲ (۲) $S(x) = 6\sqrt{x} - x$ ☐ ۳ (۳) $S(x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ ☐ ۴ (۴) $S(x) = 6x - \sqrt{x}$ ☐

۲۷ مطابق شکل استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره به شعاع x در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم 80π متر باشد، مساحت استادیوم برحسب تابعی از x کدام است؟



- ۱ (۱) $\pi x(80 - x)$ ☐ ۲ (۲) $\pi x(40 - x)$ ☐ ۳ (۳) $2\pi x(80 - x)$ ☐ ۴ (۴) $2\pi x(40 - x)$ ☐

۲۸ در شکل مقابل رأس E از مستطیل $BDEF$ روی وتر AC قرار دارد. اگر $AB = 8$ و $BC = 4$ و $BF = x$ باشد. کدام تابع مساحت مستطیل $BDEF$ را برحسب x بیان می‌کند؟



- ۱ (۱) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x$ ☐ ۲ (۲) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$ ☐ ۳ (۳) $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x$ ☐ ۴ (۴) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 8x$ ☐

دامنه و برد تابع

۳۹ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + mx + n}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ است، مقدار $m + n$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۵) ☐

۳۰ دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{3x^2 + (2m-n)x + m+n}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ است. مقدار mn کدام است؟

- ۲۷ (۱) ☐ ۱۸۰ (۲) ☐ ۱۵۰ (۳) ☐ ۱۶۰ (۴) ☐

۳۱ دامنه تابع $f(x) = \frac{3x+5}{x^2 - ax - 2}$ به صورت $\mathbb{R} - \{1, b\}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۲ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - |x| + 2}{||x| - 1| - 2}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۳ اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۴ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۵ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{16-2x} + \sqrt[3]{x-5}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. مجموعه جواب نامعادله $|x-b| < a$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۵) ☐

۳۶ در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{6-x}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-3}}}$ مجموع همه عضوهای صحیح دامنه کدام است؟

- ۱۸ (۱) ☐ ۱۶ (۲) ☐ ۱۴ (۳) ☐ ۱۳ (۴) ☐

۳۷ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{|x+2| - |x+5|}}$ شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۸ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $x \geq -1$ (۲) ☐ $x \geq -1$ (۳) ☐ $x \leq 1$ (۴) ☐ $x \geq 1$

۳۹ تابع $f(x) = \sqrt{3x - |x^2 - 4x|}$ را در نظر بگیرید. بزرگترین عضو طبیعی دامنه، چند برابر کوچکترین عضو طبیعی آن است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۵) ☐

۴۰ به ازای چند مقدار صحیح m دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + 2 - m}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

- ۷ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ ۱۰ (۴) ☐

۴۱ دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ (۲) ☐ $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ (۳) ☐ $[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ (۴) ☐ $[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$

۴۲ اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{1}{x})}$ به کدام صورت است؟

- ۱ (۱) ☐ $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۲) ☐ $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (۳) ☐ $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (۴) ☐ $(-\infty, -1] \cup (0, 1)$

۴۳ اگر $g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4^x - 2^{x-1}}}{1-g(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0)$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) $(-1, 1)$

(داخل ۹۴)

۴۴ اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(-\infty, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

۴۵ اگر $f(x) = 2^x - 2$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{xf(x)}{x-2}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۴۶ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}}{1-\log_2(3-x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{5}{2}, 3] - (-1, 1)$ (۲) $(1, 3) \cup [-\frac{5}{2}, 1)$ (۳) $(3, -\frac{5}{2}]$ (۴) $(-\frac{5}{2}, 3) - [-1, 1]$

(داخل ۱۴۰۰)

۴۷ دامنه تابع با ضابطه $\frac{\log_2(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(1, +\infty) \cup (-\infty, -2)$ (۴) $(-2, 1)$

(شبهه ساز داخل ۱۴۰۰)

۴۸ مجموع اعداد صحیح دامنه تابع $f(x) = \frac{\log_x(x^2 - 8x + 15)}{\sqrt{4 - |3 - x|}}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۴۹ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2 - \log_2(x^2 - 8x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

(نوبت اول ۱۴۰۲)

۵۰ دامنه $f(x) = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{x}{2}} \frac{1}{2}}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(خارج ۹۴)

۵۱ شکل روبه رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



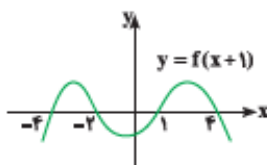
- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

- (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

- (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

- (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

۵۲ نمودار تابع $y = f(x+1)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 + 4x + 3)f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۳

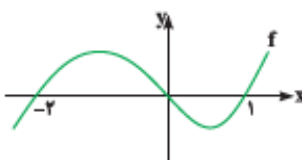
- (۲) ۴

- (۳) ۵

- (۴) ۶

(داخل ۱۴۰۲)

۵۳ نمودار زیر، تابع f را نشان می دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

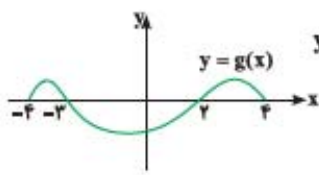


- (۱) ۳

- (۲) ۶

- (۳) ۴

- (۴) ۵



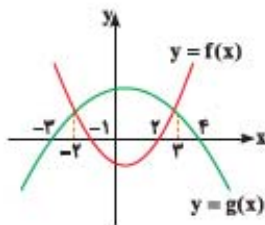
۵۴ iq اگر $f(x) = \log_2(x+3)$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{\frac{g(x)}{2-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)



۵۵ iq نمودار دو تابع درجهٔ دوم f و g به صورت مقابل است. در تابع $y = \sqrt{f(x)g(x) - g^2(x)}$ مجموعهٔ بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

سریع حالا ببریم سراغ سوالات مربوط به بُرد تابع.

۵۶ اگر بُرد تابع $y = \frac{1}{y} + 1$ بازهٔ $[0, \frac{5}{y}]$ باشد، دامنهٔ آن شامل چند عدد صحیح است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۵۷ بُرد تابع $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} + x^2 - 2x + 3$ کدام است؟

$\emptyset$ (۴)

$\{0, 1\}$ (۳)

$\{1\}$ (۲)

$\{4, 1\}$ (۱)

۵۸ بُرد تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1|+2 & ; -3 \leq x < 2 \\ -x^2+6x-5 & ; 2 \leq x \end{cases}$ کدام است؟

$(-\infty, 4]$ (۴)

$(-\infty, 6]$ (۳)

$[2, 6]$ (۲)

$[2, +\infty)$ (۱)

۵۹ بُرد تابع $f(x) = 2 + \sqrt{4x - x^2}$ به صورت بازهٔ $[a, b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۰ بُرد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$ به صورت بازهٔ $[a, +\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۶۱ بُرد تابع $f(x) = \frac{x^6+1}{x^2}$ کدام است؟

$(2, +\infty)$ (۴)

$[2, +\infty)$ (۳)

$(0, 2]$ (۲)

$(0, +\infty)$ (۱)

۶۲ بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

بی شمار (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۳ iq بُرد تابع $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{m\}$ است. بُرد تابع $g(x) = \frac{m}{m+\sqrt{x}}$ کدام است؟

$(0, 1)$ (۴)

$[1, +\infty)$ (۳)

$(0, 1]$ (۲)

$(-\infty, 1]$ (۱)

۶۴ iq بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2+7x+12}{x^2-16}$ کدام است؟

$\mathbb{R}$ (۴)

$\mathbb{R} - \{\pm 4\}$ (۳)

$\mathbb{R} - \{\frac{1}{4}, 1\}$ (۲)

$\mathbb{R} - \{1\}$ (۱)

۶۵ بُرد تابع $f(x) = 2^{\sqrt{-\cos^2 x}}$ شامل چند عضو صحیح است؟

بی شمار (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۶ iq بُرد تابع $f(x) = 2^{1-\cos x} - 1$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۷ iq بُرد تابع $y = \frac{2}{|x|}(2x^2 - 3x)$ کدام است؟

$\mathbb{R} - [-6, -3]$ (۴)

$\mathbb{R}$ (۳)

$(-6, +\infty)$ (۲)

$[-3, +\infty)$ (۱)

تساوی دو تابع

(خارج ۹۱)

 دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی هستند؟

- ۱) $f(x) = 2 \log x$, $g(x) = \log x^2$ ☐
 ۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$, $g(x) = 1$ ☐
 ۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2$, $g(x) = x$ ☐
 ۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ ☐

چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابر هستند؟

- الف) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \end{cases}$ ☐
 ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x\sqrt{x} \end{cases}$ ☐
 پ) $\begin{cases} f(x) = [x^2] \\ g(x) = [x]^2 \end{cases}$ ☐
 ت) $g(x) = \frac{[x]}{x}$, $f(x) = \frac{x}{[x]}$ ☐
 ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

 اگر توابع $f(x) = |2x^2 + ax + 1|$ و $g(x) = 2x^2 + ax + 1$ مساوی باشند، حدود a کدام است؟

- ۱) $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ ☐ ۲) $[-2, 2]$ ☐ ۳) $[-2, 2\sqrt{2}]$ ☐ ۴) $[-2\sqrt{2}, 2]$ ☐

چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

- الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $g(x) = \tan x \cdot \cot x$ ☐
 ب) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $g(x) = x + 1$ ☐
 پ) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, $g(x) = \cos x$ ☐
 ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

(خارج ۹۷)

 کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

- ۱) $\log(x-2) - \log x$ ☐ ۲) $\log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$ ☐ ۳) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$ ☐ ۴) $2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ ☐

 اگر توابع $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+a}{x-2} & ; x \neq 2 \\ b & ; x = 2 \end{cases}$ مساوی باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۱۶ ☐ ۳) -۴ ☐ ۴) ۸ ☐

 اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \neq a \\ b & ; x = a \end{cases}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ برابر باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ☐ ۲) ۱ ☐ ۳) $\frac{3}{2}$ ☐ ۴) ۲ ☐

 اگر توابع $f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4}$ و $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

- ۱) ۳ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) ۸ ☐

 دو تابع $f(x) = \sqrt{x|x|}$ و $g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$ با کدام دامنه با هم مساوی‌اند؟

- ۱) $\mathbb{R}$ ☐ ۲) $[0, +\infty)$ ☐ ۳) $(0, +\infty)$ ☐ ۴) $(-\infty, 0]$ ☐

 اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، آنگاه تابع $f^2(x)$ با چه تعداد از توابع زیر، برابر است؟

- الف) $\sqrt{f(x)}$ ☐ ب) $\frac{1}{f(x)}$ ☐ پ) $f(-x)$ ☐
 ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

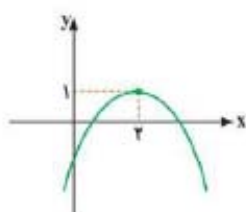
فصل اول

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

CHAPTER 1

انتقال و قرینه‌یابی

سریع انتقال و قرینه‌یابی قسمت تکراری هر سال دبیرستانه. داستان کلی بررسی شکل نمودار و ضابطه پس از منتقل شدن. بریم سراغ سوالای مهم و قشنگش.



۷۸ شکل مقابل که از انتقال نمودار $y = x^2$ حاصل شده است، مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟

- ☐ ۱ $y = -(x+1)^2 + 2$
☐ ۲ $y = -(x-2)^2 + 1$
☐ ۳ $y = -(x-2)^2 - 1$
☐ ۴ $y = -(x+2)^2 + 1$

۷۹ نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 1$ را حداقل چند واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ‌ها غیر منفی باشد؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) (خارج ۹۲)

۸۰ نمودار منحنی $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ نامنفی باشد؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) (داخل ۱۴۰۱)

۸۱ نمودار تابع $f(x) = x^2 - 6x + 1$ را a واحد به سمت راست و b واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا روی نمودار تابع $g(x) = x^2 - 12x + 34$ قرار گیرد. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۸۲ ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) (خارج ۹۹)

۸۳ اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع $f(x) = x^2 + 8x - 1$ باشند، در کدام توابع زیر x_1 و x_2 صفرهای تابع هستند؟

- الف) $3f(x)$ ب) $|f(x)|$ پ) $f(x+3)$ ت) $f(x)-3$
☐ ۱ الف و ب ☐ ۲ الف و ت ☐ ۳ ب و پ ☐ ۴ ب و ت

۸۴ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x ‌های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y ‌های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است؟

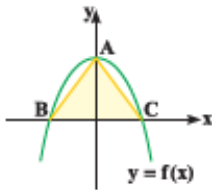
- ☐ ۱ (۳، ۴) ☐ ۲ (۲، ۵) ☐ ۳ (۳، ۵) ☐ ۴ (۲، ۶) (داخل ۹۸)

۸۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ‌ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۸۶ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ‌ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ‌ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ☐ ۱ (۴) ☐ ۲ (۶) ☐ ۳ (۵) ☐ ۴ (۴) (خارج ۹۹)

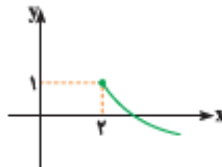


۸۷ در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = mx^2 + (m+2)x + 18$ از انتقال و انبساط عمودی تابع $y = -x^2$ به دست آمده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ☐ ۳۶ (۱)
☐ ۵۴ (۲)
☐ ۱۲ (۳)
☐ ۴۸ (۴)

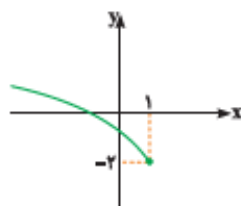
در چند تست بعدی تابع‌های $\sqrt{x}$ و $|x|$ را منتقل و قرینه‌یابی می‌کنیم. پس باید شکل اصلی این نمودارها یادتون باشه.

(برگرفته از کتاب درسی)



۸۸ نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع کدام است؟

- ☐ (۱) $y = 1 + \sqrt{2-x}$
☐ (۲) $y = 1 - \sqrt{x-2}$
☐ (۳) $y = 1 - \sqrt{-x+2}$
☐ (۴) $y = 1 - \sqrt{-x-2}$



۸۹ نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{-x+b}$ به صورت مقابل است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ☐ -۲ (۱)
☐ -۱ (۲)
☐ ۲ (۳)
☐ ۱ (۴)

۹۰ به ترتیب با کدام تبدیل‌ها، نمودار $y = \sqrt{x+1}$ به روی نمودار $y = -\sqrt{2-x}$ منطبق می‌شود؟

- ☐ (۱) انتقال یک واحد به راست - قرینه نسبت به محور y
☐ (۲) انتقال یک واحد به چپ - قرینه نسبت به مبدأ مختصات
☐ (۳) قرینه نسبت به محور y - انتقال یک واحد به راست
☐ (۴) قرینه نسبت به مبدأ مختصات - انتقال یک واحد به چپ

۹۱ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی

(ریاضی داخل ۹۹)

اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

- ☐ $x = 1$ (۱)
☐ $x = 1/5$ (۲)
☐ $x = 2$ (۳)
☐ $x = 2/5$ (۴)

۹۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت

(داخل ۹۹)

انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- ☐ (۱) $4\sqrt{15}$
☐ (۲) $6\sqrt{7}$
☐ (۳) $4\sqrt{17}$
☐ (۴) $6\sqrt{10}$

۹۳ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع‌های $y = |x|$ ، $y = |x-2|$ و $y = |x+2|$ کدام است؟

- ☐ ۲ (۱)
☐ ۲/۵ (۲)
☐ ۳ (۳)
☐ ۳/۵ (۴)

۹۴ نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با

(داخل ۹۳)

کدام طول متقاطع‌اند؟

- ☐ -۳/۵ (۱)
☐ -۳ (۲)
☐ -۲/۵ (۳)
☐ -۲ (۴)

۹۵ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد

(خارج ۱۴۰۱)

در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
☐ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
☐ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
☐ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۹۶ نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در

جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{4}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی

$f(x+a) = 3$ کدام است؟

- ☐ ۲ + $\sqrt{2}$ (۱)
☐ ۲ (۲)
☐ ۲ - $\sqrt{2}$ (۳)
☐ $\sqrt{2}$ (۴)

(نوبت اول ۱۴۰۲)

۹۷ نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = |x-1| - 2$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- ☐ ۱ (۱)
☐ ۲ (۲)
☐ ۳ (۳)
☐ ۴ (۴) متقاطع نیستند.

سریع در انتقال و قرینه‌یابی توابع مثلثاتی، همیشه می‌تونیم با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، ضابطه‌ی جواب نهایی رو ساده‌تر کنیم. این بخش در فصل مثلثات به طور مفصل بحث میشه.

۹۸ نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به اندازه $\frac{3\pi}{4}$ به طرف x ‌های منفی انتقال داده، سپس آن را نسبت به محور y ‌ها قرینه کرده و در نهایت 2 واحد به طرف y ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. ضابطه‌ی تابع حاصل کدام است؟

- ☐ (۱) $y = 2 + \sin x$ ☐ (۲) $y = 2 + \cos(\frac{\pi}{4} + x)$
☐ (۳) $y = 2 - \cos x$ ☐ (۴) $y = -2 - \cos(\frac{\pi}{4} + x)$

سریع در تست‌های زیر، بدون توجه به نوع تابع، لازمه از قوانین انتقال و قرینه‌یابی استفاده کنیم.

۹۹ نقطه $(-5, 14)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ واقع شده است. این نقطه، با چه نقطه‌ای از نمودار تابع $g(x) = -f(x) - 2$ متناظر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

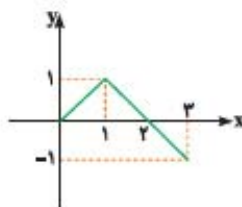
- ☐ (۱) $(-5, 14)$ ☐ (۲) $(-5, -14)$
☐ (۳) $(3, 14)$ ☐ (۴) $(-3, -14)$

۱۰۰ نقطه $A(1, -5)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه‌ی نظیر A روی تابع $y = \frac{1}{4}f(x - 2)$ کدام است؟

- ☐ (۱) $(1, 4)$ ☐ (۲) $(1, -5)$ ☐ (۳) $(3, 4)$ ☐ (۴) $(3, -5)$

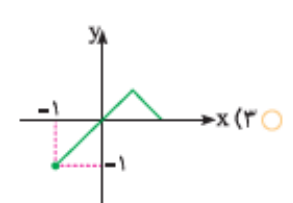
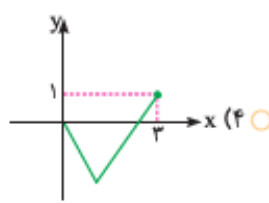
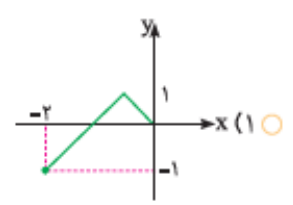
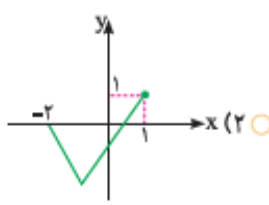
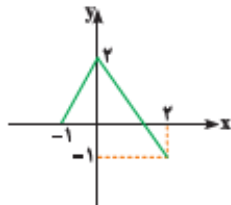
۱۰۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = -2f(x + 2) + 1$ و

خط $y = -\frac{1}{4}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

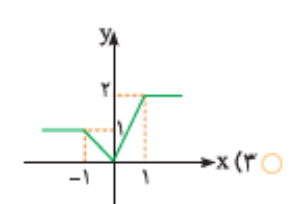
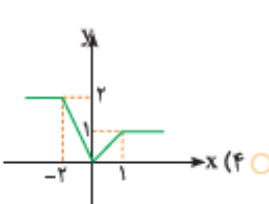
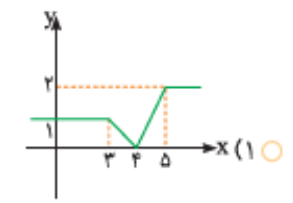
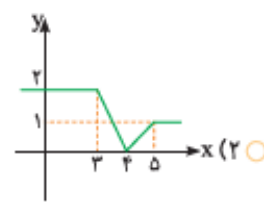
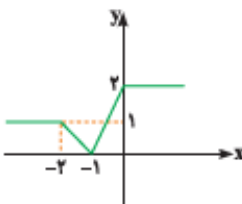


- ☐ (۱) 1 ☐ (۲) 2
☐ (۳) 3 ☐ (۴) 4

۱۰۲ نمودار تابع $y = -f(x - 1)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(x)$ کدام است؟

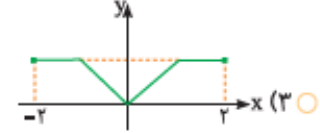
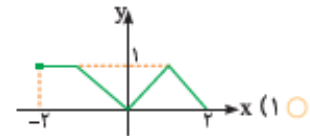
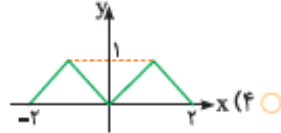
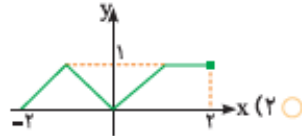
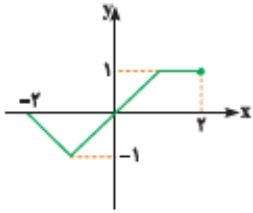


۱۰۳ نمودار تابع $y = f(x - 1)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = f(2 - x)$ کدام است؟

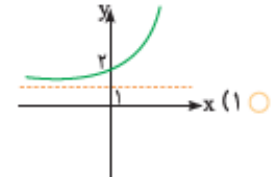
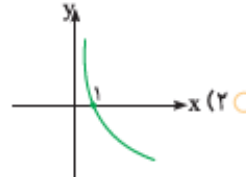
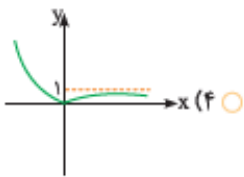


در این بخش می‌خواهیم راجع به اثر قدرمطلق روی نمودار تابع حرف بزنیم و نمودارهای $|f(x)|$ و $f(|x|)$ رو بکشیم.

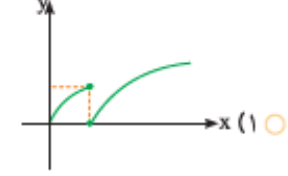
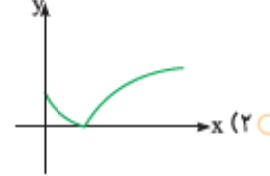
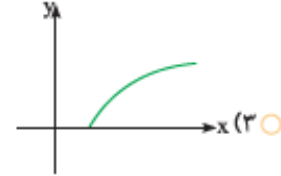
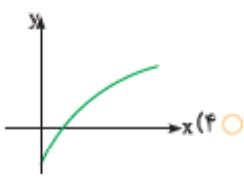
۱۵۴ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = |f(x)|$ کدام است؟



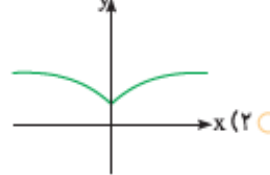
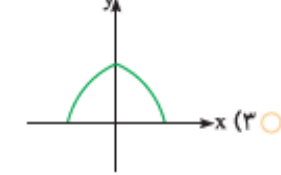
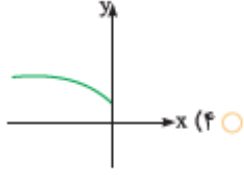
۱۵۵ نمودار تابع $f(x) = |2^x - 1|$ کدام است؟



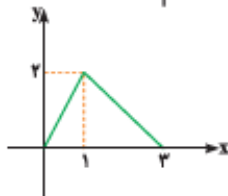
۱۵۶ نمودار تابع $f(x) = |\sqrt{x} - 1|$ کدام است؟



۱۵۷ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|x| + 1}$ کدام است؟



۱۵۸ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، مساحت محدود به نمودار تابع $y = f(|x| + 1)$ و محور x‌ها کدام است؟



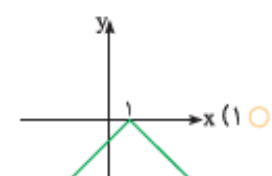
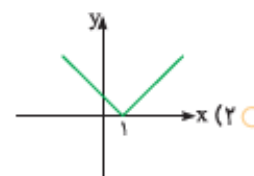
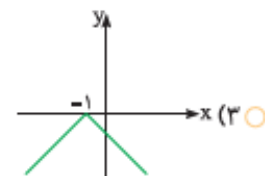
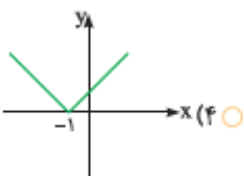
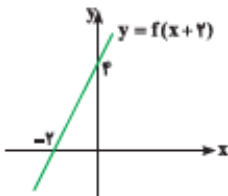
۱ (۱)

۲/۵ (۲)

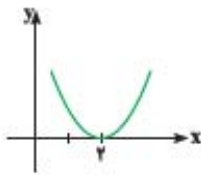
۳ (۳)

۴ (۴)

۱۵۹ نمودار تابع $y = f(x + 2)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(|x - 1|)$ کدام است؟



۱۱۰ اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، کدام یک شکل تقریبی از $y = f(|x-2|) + 2$ است؟

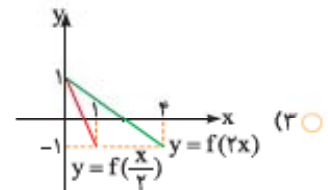
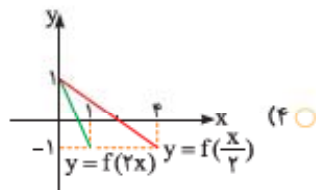
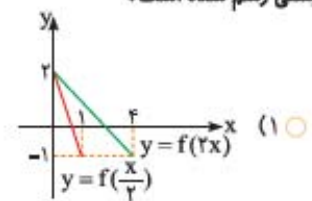
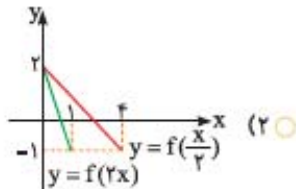
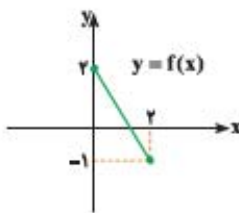


انقباض و انبساط نمودار

در سال دوازدهم یاد می‌گیریم که نمودار را در راستای محورهای مختصات، کشیده یا فشرده کنیم، ساختن ضابطه تابع در انقباض و انقباض خیلی مهمه.

۱۱۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، توابع $y = f(\frac{x}{2})$ و $y = f(2x)$ در کدام گزینه

به درستی رسم شده است؟



۱۱۲ نمودار تابع $y = (x+1)^2$ را با ضریب ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم و سپس آن را با ضریب ۳ در راستای افقی منقبض می‌کنیم. نمودار حاصل و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

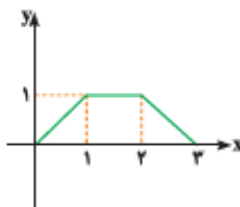
- ☐ ۱، ۱ ☐ ۲، ۱ ☐ ۳، -۱ ☐ ۴، ۰، ۱

۱۱۳ نمودار تابع $y = |x|$ را با واحد به سمت چپ انتقال داده و با ضریب ۲ در راستای محور y منبسط می‌کنیم. سپس آن را نسبت به محور y ‌ها قرینه می‌کنیم. معادله منحنی جدید کدام است؟

- ☐ ۱) $y = -2|x+1|$ ☐ ۲) $y = -2|x|+1$ ☐ ۳) $y = 2|1-x|$ ☐ ۴) $y = -2|x-1|$

۱۱۴ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، مساحت محدود به نمودار $y = f(-2x+1)$ و

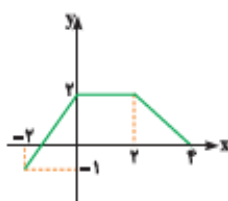
محور x ‌ها در ناحیه اول دستگاه مختصات کدام است؟



- ☐ ۱) $\frac{1}{2}$ ☐ ۲) $\frac{1}{4}$ ☐ ۳) $\frac{3}{4}$ ☐ ۴) $\frac{3}{8}$

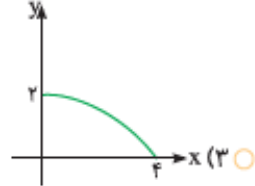
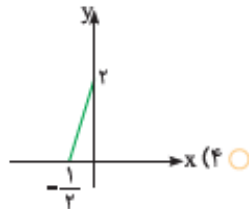
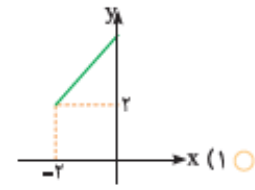
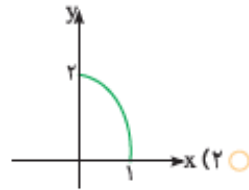
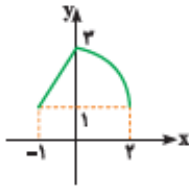
۱۱۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. اگر دامنه تابع $y = 3f(2x-1)+1$ به صورت بازه

$[a, b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟



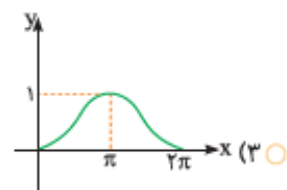
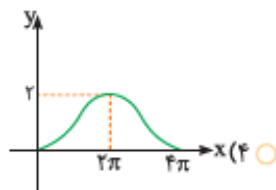
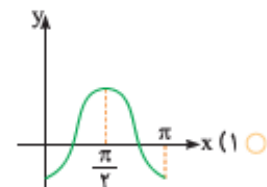
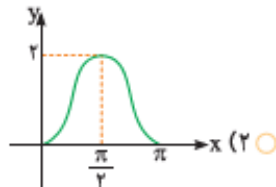
- ☐ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴

۱۱۶ نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت مقابل است. قسمتی از نمودار تابع $y = f(x)$ کدام است؟



سریخ دو سؤال زیر مربوط به انقباض و انقباض توابع مثلثاتی که به طور مفصل در فصل‌های بعدی باهاشون کار داریم.

۱۱۷ نمودار تابع $f(x) = 1 - \cos 2x$ کدام است؟



۱۱۸ طول تمام نقاط تابع $f(x) = \cos x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. سپس نمودار حاصل را یک واحد در راستای محور y ‌ها به بالا منتقل می‌کنیم و در

آخر، عرض تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. ضابطه نمودار حاصل کدام است؟

$y = \cos^2 x$ (۲) ☐

$y = \cos 2x$ (۱) ☐

$y = \sin^2 x$ (۴) ☐

$y = \sin 2x$ (۳) ☐

سریخ برخی مواقع، بدون داشتن شکل نمودار، باید راجع به تغییرات دامنه و برد تابع نظر بدیم.

۱۱۹ اگر دامنه $y = 2f(x) + 1$ بازه $[-1, 1]$ باشد، دامنه تابع $y = f(2x + 1)$ کدام است؟

$[-1, 0]$ (۲) ☐

$[0, 1]$ (۱) ☐

$[-2, 2]$ (۴) ☐

$[-1, 3]$ (۳) ☐

۱۲۰ اگر دامنه تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت بازه $(-4, 6)$ باشد، دامنه تابع $y = 2 - f(\frac{x}{2} + 1)$ کدام است؟

$(0, \frac{5}{2})$ (۲) ☐

$(-9, 1)$ (۱) ☐

$(-4, 6)$ (۴) ☐

$(-18, 22)$ (۳) ☐

۱۲۱ فرض کنید $1 \leq x < 2$; $f(2x) = 3x + 1$ و $1 < x \leq 3$; $g(x-1) = 1-x$ باشد. دامنه تابع $f(x) + g(x)$ کدام است؟

$\{2\}$ (۴) ☐

$\{2, 4\}$ (۳) ☐

$(-, 2]$ (۲) ☐

$[2, 4)$ (۱) ☐

۱۲۲ اگر برد تابع $y = f(x)$ به صورت $[-4, 2]$ باشد، بُرد تابع $y = \frac{1}{2}f(2x-1) - 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴) ☐

۳ (۳) ☐

۲ (۲) ☐

۱ (۱) ☐

فصل اول

درس سوم: انواع تابع

1

CHAPTER 1

سرنگ اول از همه، بریم تابع خطی رو بررسی کنیم. در این درس اطلاعات سال نهم، شامل نوشتن معادله خط، محاسبه شیب و ... خیلی به کارمون میاد.

۱۳۳ اگر $f(x)$ تابع خطی گذرنده از نقطه $(1, 1)$ و $f(-2) = 7$ باشد، مقدار اختلاف شیب و عرض از مبدأ تابع $f(x)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- ۱) ۲ ☐ ۲) ۳ ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) ۵ ☐

۱۳۴ اگر $f = \{(1, m-1), (2, 0), (-3, m+3), (2m, -2)\}$ تابعی خطی باشد، m کدام است؟

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

۱۳۵ در یک تابع خطی، دامنه $[1, 3]$ و برد $[-4, -1]$ است، مقدار تابع در $x = \frac{4}{3}$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) -۸ ☐ ۲) -۹ ☐ ۳) -۶ ☐ ۴) -۵ ☐

۱۳۶ اگر f تابعی خطی باشد، $f(x) + f(2x) + 3 = 3x - 3$ باشد $f(f(0))$ کدام است؟

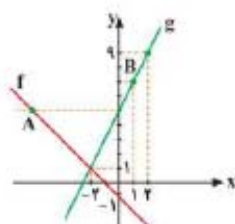
- ۱) -۶ ☐ ۲) -۱۲ ☐ ۳) -۱۵ ☐ ۴) -۱۸ ☐

۱۳۷ اگر $f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + \frac{5}{a+1}$ تابعی خطی باشد حاصل $f(1) + f(-2)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{5}{3}$ ☐ ۲) $\frac{2}{3}$ ☐ ۳) $-\frac{2}{3}$ ☐ ۴) $\frac{7}{3}$ ☐

۱۳۸ تابع f و g ، توابع خطی هستند، فاصله نقاط A و B از هم کدام است؟

- ۱) $\sqrt{26}$ ☐ ۲) $\sqrt{53}$ ☐ ۳) $\sqrt{29}$ ☐ ۴) $\sqrt{28}$ ☐



۱۳۹ در تابع خطی f با شیب مثبت، اگر $f(f(x) + 3) = x + 5$ باشد، مقدار $f(6)$ کدام است؟

- ۱) ۷ ☐ ۲) ۸ ☐ ۳) ۹ ☐ ۴) ۱۰ ☐

سرنگ در این بخش دو نوع تابع خطی خاص رو بررسی می‌کنیم، خط افقی که بهش می‌گیم تابع ثابت و خط نیمساز ربع اول و سوم که بهش می‌گیم تابع همانی

۱۳۰ اگر $f(x) = (m+2)x^2 + (n-3)x + mn$ تابعی ثابت باشد، حاصل $f(1/75)$ کدام است؟

- ۱) ۲ ☐ ۲) ۶ ☐ ۳) -۲ ☐ ۴) -۶ ☐

۱۳۱ اگر $f = \{(1, a+b), (5, a+2b), (b, 1-a)\}$ تابعی همانی باشد $f(\sqrt{b^2 + a^2})$ کدام است؟

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۶ ☐

۱۳۲ اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت و $f(2) + f(5)g(5) - 2g^2(3) = 0$ باشد، حاصل $f(g(6) + 1)$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ☐ ۲) $\frac{5}{2}$ ☐ ۳) $\frac{1}{2}$ ☐ ۴) $\frac{7}{2}$ ☐

۱۳۳ دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟ (داخل ۱۴۰۱)

- ☐ ۱) ۶- ☐ ۲) ۴- ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) ۶

۱۳۴ اگر $f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

- ☐ ۱) $-\frac{2}{7}$ ☐ ۲) $\frac{2}{7}$ ☐ ۳) $-\frac{4}{7}$ ☐ ۴) $\frac{4}{7}$

۱۳۵ اگر تابع $f(x) = (a - b)x^2 + (b - 2)x - c + b^2$ دارای برد تک عضو $\{1 + 2c\}$ و دامنه $[-1, 4]$ باشد، مساحت سطح زیر نمودار در این دامنه کدام است؟

- ☐ ۱) ۵ ☐ ۲) ۱۵ ☐ ۳) ۱۰ ☐ ۴) ۲۵

سریخ حالا که انواع مختلف تابع خطی رو بررسی کردیم به نگاهی به توابع چندجمله‌ای داشته باشیم.

۱۳۶ درجه کدام یک از توابع چندجمله‌ای زیر با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

- ☐ ۱) $f(x) = x(x - 2)^2 + (x^2 - 1)(x + 2)$ ☐ ۲) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x)(x - 3)$
☐ ۳) $f(x) = ((2x + 7)(x - 3))^2 + 3x^2 + x$ ☐ ۴) $f(x) = (x^2 + 8)(2) + (x - 1)(x + 2)x$

۱۳۷ تابع چندجمله‌ای f با ضابطه $f(x) = x^2 + x^{\frac{2n+3}{n}} - 2x^{n-2} + 1 + n$ را در نظر بگیرید، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۲۷ ☐ ۲) ۵۴ ☐ ۳) ۲۹ ☐ ۴) ۵۶

سریخ نوبت میرسه به بررسی تابع گویا، در این بخش روی دامنه، برد و رسم این تابع تمرکز می‌کنیم.

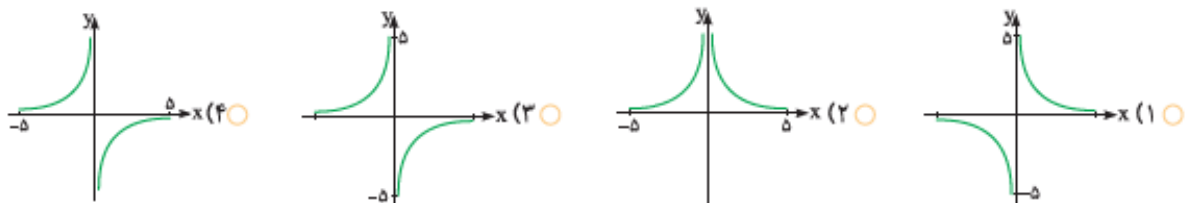
۱۳۸ چه تعداد از توابع زیر، تابعی گویا هستند؟

- الف) $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$ ب) $y = \frac{|x + 2|}{x - 3}$ پ) $y = \frac{x\sqrt{x} + 3}{3x + 1}$
☐ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) صفر

۱۳۹ اگر تابع $f(x) = \frac{k\sqrt{x} + x^2}{x - 2}$ یک تابع گویا باشد، $f(f(1) + 4)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱ ☐ ۲) -۱ ☐ ۳) ۹ ☐ ۴) -۹

۱۴۰ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-1}{x}$ در دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱۴۱ برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $\{0\} - [-3, 3]$ کدام است؟

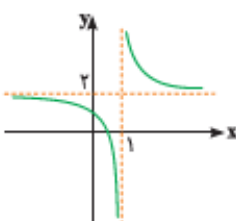
- ☐ ۱) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ☐ ۲) $\mathbb{R} - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ☐ ۳) $\mathbb{R} - [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ☐ ۴) $[-3, 3]$

۱۴۲ نمودار تابع $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$ از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟

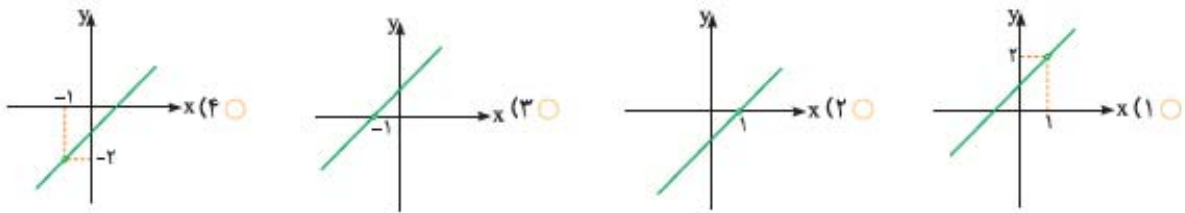
- ☐ ۱) اول ☐ ۲) دوم ☐ ۳) سوم ☐ ۴) چهارم

۱۴۳ نمودار تابع $f(x) = \frac{mx - 1}{x - n}$ به صورت مقابل است، mn کدام است؟

- ☐ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴

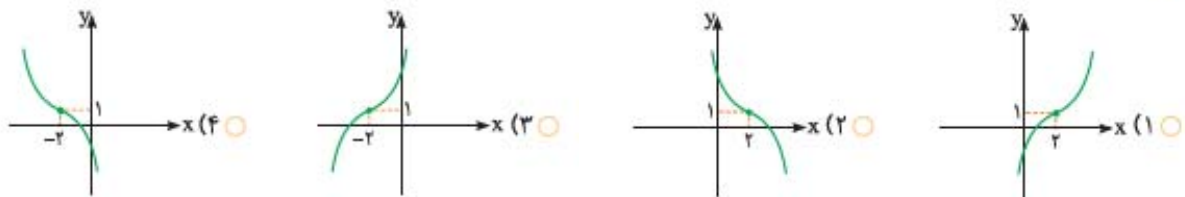


۱۴۳ نمودار تابع $\frac{x^2-1}{x-1}$ کدام است؟

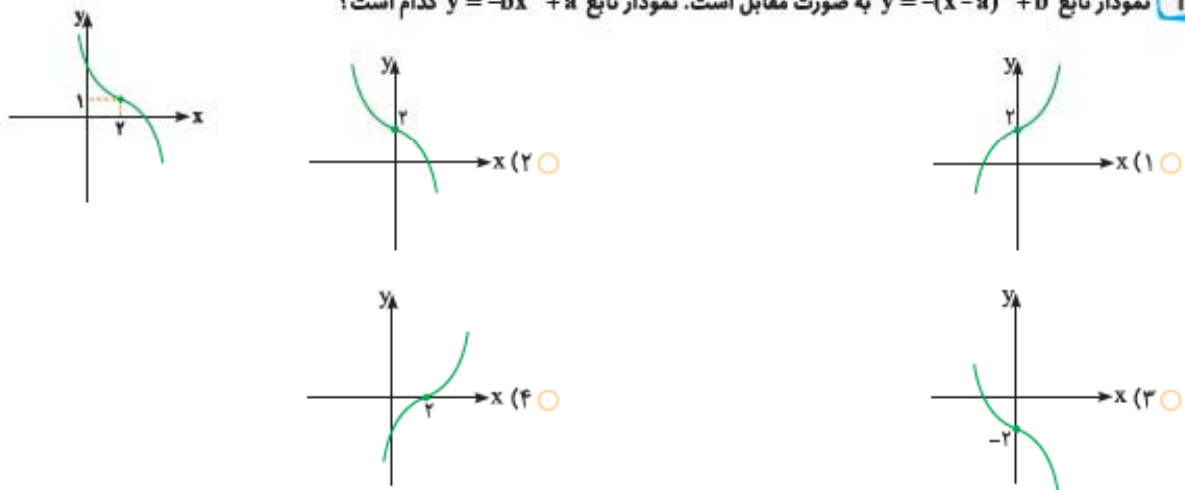


تابع خیلی مهمه. در کتاب ریاضی ۳، بحث تابع درجه سوم به طور جداگانه باز شده، این قسمت درس به همین تابع اختصاص داده، رسم این

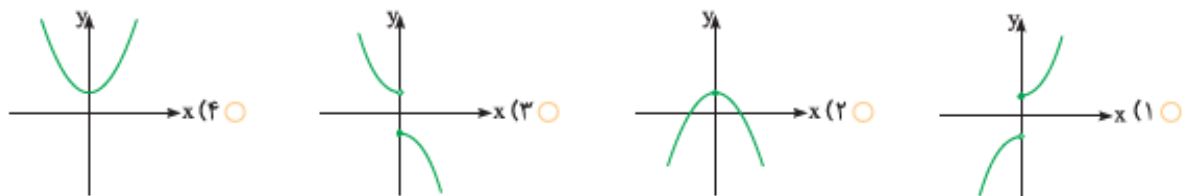
۱۴۵ نمودار تابع $f(x) = -(x-2)^3 + 1$ کدام است؟



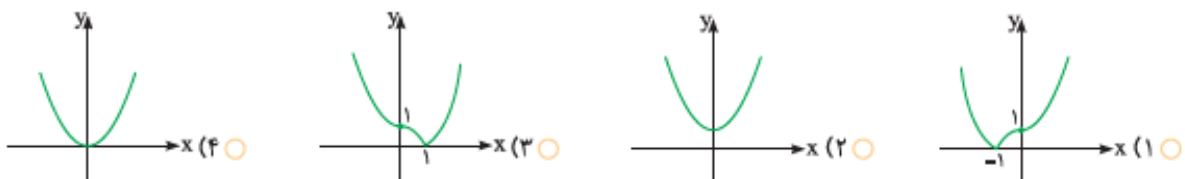
۱۴۶ نمودار تابع $y = -(x-a)^3 + b$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -bx^3 + a$ کدام است؟



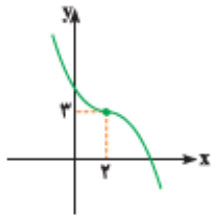
۱۴۷ نمودار تابع $f(x) = x^2 |x| + 1$ کدام است؟



۱۴۸ نمودار تابع $f(x) = |x^2 + 1|$ کدام است؟



۱۴۹ دو تابع $f(x) = ax + b$ و $g(x) = x^2 - 6x + c$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع $y = f(x) - xg(x)$ به صورت مقابل باشد، مقدار



$a + b - c$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐
 -۱ (۲) ☐
 ۲ (۳) ☐
 -۲ (۴) ☐

۱۵۰ نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐

۱۵۱ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - m$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند؟

- (۱) $(-\infty, 0]$ ☐ (۲) $[-1, 8]$ ☐ (۳) $[0, +\infty)$ ☐ (۴) $[-8, 0]$ ☐

۱۵۲ به ترتیب با کدام انتقال‌ها، می‌توان نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به روی نمودار $y = x^3$ منطبق کرد؟

- (۱) ۱ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت پایین ☐
 (۲) ۱ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا ☐
 (۳) ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت بالا ☐
 (۴) ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین ☐

۱۵۳ نمودار دو تابع $y = x^3$ و $y = x|x|$ در چند نقطه با هم برخورد می‌کنند؟

- (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) بی‌شمار ☐

۱۵۴ *iq* نمودار تابع $f(x) = x^2|x| + x^3 + 2$ و $g(x) = 3 - |x|$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) متقاطع نیستند ☐

۱۵۵ *iq* معادله $x^3 + |x - 2| = 2$ چند جواب دارد؟

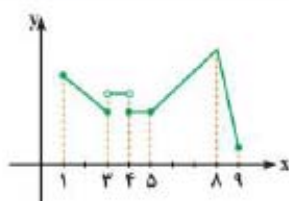
- (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) ۴ ☐

یادداشت:

فصل اول

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی

CHAPTER 1



سریع اولین بخش این درس به شناسایی توابع صعودی و نزولی اختصاص دارد.

۱۵۶ در نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل بازه $[a, b]$ و $[c, d]$ به ترتیب بزرگترین بازه صعودی و بزرگترین بازه نزولی هستند. کدام است $a + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

- ۱۲ (۱) ☐ ۱۵ (۲) ☐ ۷ (۳) ☐ ۱۱ (۴) ☐

۱۵۷ تابع $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$ را در نظر بگیرید. در کدام بازه زیر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ که $x_2 > x_1$ ، آنگاه $f(x_2) < f(x_1)$ برقرار است؟

- ۱ (۱) ☐ $[-3, 3]$ (۲) ☐ $[2, 3]$ (۳) ☐ $[1, 2]$ (۴) ☐

۱۵۸ اگر بازه $[1, +\infty)$ بزرگترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x) = \left(\frac{m}{2}\right)x^2 - (m^2 - 6)x + 1$ در آن اکیداً نزولی باشد، m چند است؟

- ۳ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

۱۵۹ اگر تابع $f(x) = -2x^2 + (m^2 - 1)x - 3$ در بازه $[-3, 2]$ غیریکنوا باشد، محدوده m کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $|m| < \sqrt{2}$ (۲) ☐ $|m| < 3$ (۳) ☐ $|m| > 2$ (۴) ☐ $|m| > 1$

۱۶۰ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1; & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}; & x < 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

- ۱ (۱) ☐ یک به یک - نزولی (۲) ☐ یک به یک - صعودی (۳) ☐ یک به یک - غیریکنوا (۴) ☐ غیر یک به یک - غیریکنوا

۱۶۱ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & ; x \leq 1 \\ \log_x x & ; x > 1 \end{cases}$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- ۱ (۱) ☐ $(-\infty, +\infty)$ (۲) ☐ $(0, 2)$ (۳) ☐ $(-5, 1)$ (۴) ☐ $(-\infty, +\infty)$

۱۶۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x < 1 \\ (m+1)x - 3m + 3 & ; x \geq 1 \end{cases}$ روی تمام دامنه‌اش اکیداً صعودی است؟

- ۱ (۱) ☐ $(-\infty, 3/5]$ (۲) ☐ $(-1, 3/5]$ (۳) ☐ $(-\infty, 1/5]$ (۴) ☐ $(-1, 1/5]$

۱۶۳ کدام یک از گزینه‌های زیر، راجع به صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = |\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1|$ صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ در بازه $[2, 3]$ اکیداً صعودی است. (۲) ☐ در بازه $[1, 2]$ اکیداً صعودی است. (۳) ☐ در بازه $[3, 4]$ اکیداً نزولی است. (۴) ☐ در بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی است.

۱۶۴ تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 2x - 2|$ در چه تعداد از بازه‌های زیر، اکیداً نزولی است؟

- الف (۱) ☐ $(1, 2)$ ب (۲) ☐ $(-2, -1)$ پ (۳) ☐ $(0, 1)$ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر

۱۶۵ تابع $f(x) = -x^2 + x + 6$ در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است، ab کدام است؟ ($a > 0$)

- ☐ (۱) $\frac{3}{2}$
☐ (۲) -1
☐ (۳) -6
☐ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۶۶ کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = x\left(|x| + \frac{1}{x}\right)$ صحیح است؟

- ☐ (۱) همواره نزولی
☐ (۲) همواره صعودی
☐ (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی
☐ (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱۶۷ تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{1}{4}$
☐ (۲) $\frac{1}{2}$
☐ (۳) $\frac{3}{2}$
☐ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۶۸ تابع $f(x) = x|x-3|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ☐ (۱) $(-1, 2)$
☐ (۲) $(-\infty, 0)$
☐ (۳) $(2, 4)$
☐ (۴) $(4, +\infty)$

۱۶۹ به ازای کدام مقدار m تابع $f(x) = 2mx - 3|x-1|$ اکیداً نزولی است؟

- ☐ (۱) $(-\infty, -1/5)$
☐ (۲) $(-\infty, 1/5)$
☐ (۳) $(1/5, +\infty)$
☐ (۴) $(-1/5, +\infty)$

۱۷۰ تابع $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ☐ (۱) $(-\infty, -2)$
☐ (۲) $(1, +\infty)$
☐ (۳) $(-2, 1)$
☐ (۴) $(-\infty, 1)$

۱۷۱ در بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است. نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(داخل ۹۷)

- ☐ (۱) ۱
☐ (۲) ۲
☐ (۳) ۳
☐ (۴) فاقد نقطه مشترک هستند

۱۷۲ در کدام بازه زیر با افزایش طول نقاط مقدار عرض تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کاهش می‌یابد؟

- ☐ (۱) $[0, 2]$
☐ (۲) $[-2, 0]$
☐ (۳) $[-2, 2]$
☐ (۴) $(-\infty, +\infty)$

۱۷۳ تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + x^2 - 4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- ☐ (۱) همواره صعودی
☐ (۲) همواره نزولی
☐ (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی
☐ (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

(داخل ۱۴۰۱)

۱۷۴ تابع $f(x) = (-9+k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟

- ☐ (۱) ۱
☐ (۲) ۲
☐ (۳) ۶
☐ (۴) صفر

۱۷۵ اگر $g(x) = (a-2)x^2 + x^b + c$ تابعی همانی باشد، راجع به صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = 4ax^3 - 12bx^2 + 6x + c$ کدام صحیح است؟

- ☐ (۱) اکیداً صعودی
☐ (۲) اکیداً نزولی
☐ (۳) ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی
☐ (۴) ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی

۱۷۶ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ فقط در نقطه $(-3, -1)$ بر خط به موازات محور x مماس است. اگر تابع $y = |f(x)|$ در بازه

$(k, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، کمترین مقدار k کدام است؟

- ☐ (۱) -4
☐ (۲) -3
☐ (۳) -1
☐ (۴) -2

۱۷۷ تابع درجه سوم و اکیداً نزولی f را در نظر بگیرید، اگر نمودار آن از مبدأ مختصات بگذرد و یک خط افقی در نقطه $(2, -1)$ بر آن مماس باشد،

آنگاه نمودار تابع f و خط $y = 1$ در نقطه با کدام طول متقاطع‌اند؟

- ☐ (۱) $-2 + 2\sqrt[3]{2}$
☐ (۲) $2 + 2\sqrt[3]{2}$
☐ (۳) $-2 - 2\sqrt[3]{2}$
☐ (۴) $2 - 2\sqrt[3]{2}$

۱۷۸ تابع $f(x) = \sin(2x)$ در کدام بازه زیر یکنواست؟

- ☐ (۱) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
☐ (۲) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
☐ (۳) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
☐ (۴) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

۱۷۹ تابع با ضابطه $f(x) = 1 + 2 \cos(2\pi x - \pi)$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱) $[0, 1/5]$ (۲) $[1/5, 1]$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) $[1, 2]$

۱۸۰ تابع با ضابطه $f(x) = 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{6})$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ (۲) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$ (۴) $(0, \pi)$

۱۸۱ اگر تابع $f(x) = (m-1)x^2 + (n-2)x + m+n$ بر روی $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، آنگاه وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع

$g(x) = (m+n)x + (m-n) + [(m-n)x + (m+n)]$ چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی
(۳) همواره صعودی (۴) همواره نزولی

۱۸۲ تابع $f(x) = mx^2 - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

- (۱) -1 (۲) $-\sqrt{5}$ (۳) 1 (۴) $\sqrt{5}$
(۱) $(a, 4)$ (۲) $(b, 3a+c)$ (۳) $(c, a-c)$ (۴) $(-1, 2a)$

۱۸۳ اگر $f = \{(-1, 2a), (3, b+3), (c, a-c), (b, 3a+c), (a, 4)\}$ تابعی هم صعودی و هم نزولی باشد، $|a| + |b| + |c|$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 7 (۳) 4 (۴) 6

۱۸۴ به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f = \{(0, m^2-1), (-2, 1), (1, |m|-2)\}$ نزولی است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۱۸۵ تابع $f = \{(1, a)(3, 10)(2, a^2-2a+2)\}$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

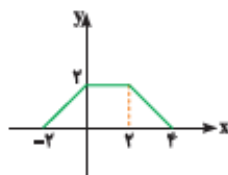
- (۱) 3 (۲) 2 (۳) 4 (۴) صفر

سریع حالا می‌خوایم اثر تبدیل و انتقال نمودارها، روی صعودی و نزولی بودن تابع رو بررسی کنیم.

۱۸۶ تابع $f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه $[-2, 5]$ است، تابع $y = 1 - 3f(2-x)$ در کدام بازه زیر اکیداً نزولی است؟

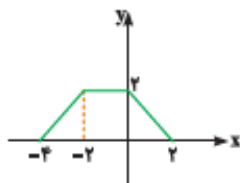
- (۱) $[-3, 4]$ (۲) $[-2, 5]$ (۳) $[2, 6]$ (۴) $[-4, 3]$

۱۸۷ نمودار تابع $y = f(x-1)$ به صورت مقابل است، نمودار تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟



- (۱) $[0, 9]$ (۲) $[-15, -9]$ (۳) $[-6, 0]$ (۴) $[-3, 0]$

۱۸۸ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. چه تعداد از توابع زیر یکنواست؟



- (الف) $y = \begin{cases} 4 - f(x) & x \leq 0 \\ f(-x) & x > 0 \end{cases}$ (ب) $y = \begin{cases} f(2x) & x \leq 0 \\ f(x-1) & x > 0 \end{cases}$ (پ) $y = \begin{cases} |f(x)| + 2 & x \geq 0 \\ f(|x|) - 2 & x < 0 \end{cases}$
(۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

سریع در سؤالات زیر بهتر است یک تابع فرضی با توجه به شرایط مسئله و وضعیت یکنوایی گفته شده برای f رسم کنید.

۱۸۹ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (خارج ۱۴۰۱)

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۹۰ تابع اکیداً صعودی f با دامنه $(-\infty, 4]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)f(|x|)}$ کدام است؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $[-2, 1]$ (۳) $[-2, 1] \cup [2, 4]$ (۴) $\mathbb{R}$

فصل اول

درس پنجم:

اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

CHAPTER 1

نمایش زوج مرتبی تابع. صحبت در این بخش راجع به جمع، تفریق، ضرب و تقسیمه. اینجا علاوه بر ضابطه، به دامنه هم کار داریم. اول بریم سراغ اعمال جبر روی

۱۹۱ اگر $f = \{(-1, 0), (1, 2), (3, 1), (0, 3), (2, 4)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 3), (0, 5), (4, 1), (3, 2)\}$ باشد، آنگاه کدام زوج مرتب در تابع $g - 2f$ نیست؟

- ☐ (۱, ۰) ☐ (۲, ۰) ☐ (۳, ۰) ☐ (۰, ۱) ☐ (۴, ۰) ☐ (۲, -۵)

۱۹۲ اگر $f = \{(2, 3), (4, 7), (-1, 0), (0, -3)\}$ و $g = \{(0, -2), (-1, 1), (2, -4)\}$ باشد، تابع $\frac{1}{f-g+1}$ چندعضوی است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر

۱۹۳ اگر $f = \{(-5, 1), (1, 3), (-2, 2), (3, 1), (-1, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (-3, 5), (4, 1), (-1, -1), (0, 4)\}$ باشد، حاصل $\frac{(f^2 - 2g)(1)}{(2f + 3g)(-1)}$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ -۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ $\frac{2}{3}$ (۴)

۱۹۴ اگر $f = \{(2a + 3b, 4), (-1, 1), (b - 2a, 6), (1, 5)\}$ و $g = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 3), (2, 5)\}$ باشد و بدانیم $(f + g)(0) = 5$ و $(f - g)(2) = 1$ است، آنگاه حاصل $2b - 4a$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ -۱ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ -۴ (۴)

۱۹۵ اگر $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$ و $g = \{(2, 5), (5, 1), (3, 5)\}$ باشد $(\frac{3g-f}{3f+g})(5)$ کدام است؟

- ☐ $\frac{1}{4}$ (۱) ☐ $\frac{1}{2}$ (۲) ☐ $\frac{1}{8}$ (۳) ☐ $\frac{1}{16}$ (۴)

۱۹۶ اگر $2f + g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$ و $3f - 2g = \{(1, 4), (2, 0), (3, 3)\}$ باشند، آنگاه $f - g$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\{(1, \frac{6}{5}), (2, \frac{4}{5}), (3, \frac{5}{5})\}$ ☐ ۲ $\{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{2}{5}), (3, -\frac{5}{5})\}$ ☐ ۳ $\{(1, \frac{1}{5}), (2, \frac{1}{5}), (3, \frac{1}{5})\}$ ☐ ۴ $\{(1, \frac{1}{5}), (2, -\frac{2}{5}), (3, \frac{5}{5})\}$

۱۹۷ اگر $f(x+1) = \{(1, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 0)\}$ باشد، آنگاه $f(2x)$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\{(1, 1), (2, 3), (2/5, 3), (3, -)\}$ ☐ ۲ $\{(4, 1), (8, 3), (1, 3), (1/2, -)\}$ ☐ ۳ $\{(-1), (1, 3), (1/5, 3), (2, -)\}$ ☐ ۴ $\{(-1), (4, 3), (6, 3), (8, -)\}$

حالا با داشتن ضابطه تابع، اعمال جبری روی اونها رو ادامه میدیم.

۱۹۸ دو تابع خطی با ضابطه های $f(x) = ax + b$ و $g(x) = (b-1)x + 4$ را در نظر بگیرید. اگر $(f+g)(-1) = 3$ و $(f+g)(1) = 5$ باشد،

مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۱۳ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۲۵ (۴)

۱۹۹ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} & ; x \geq 4 \\ x-3 & ; x < 4 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2+x+1 & ; x \geq 0 \\ -\frac{2}{x} & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $\left[\left(3f + \frac{g}{y} \right)(x) \right]$ در نقطه $x = g(-\frac{1}{y})$ کدام است؟

- ۱۱ (۴) ☐ ۹ (۳) ☐ ۷ (۲) ☐ $\frac{5}{2}$ (۱) ☐

۲۰۰ اگر $f(x) = \frac{y^x}{\sqrt{-x^2+x+6}}$ و $g(x) = x^2 - x$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر

۲۰۱ اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & ; x \leq -3 \\ 4x^2-3 & ; x > -3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x^2+1 & ; x < 3 \\ -5x+6 & ; x \geq 3 \end{cases}$ باشند، آنگاه ضابطه تابع $f-g$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} -2x^2-3x+1 & ; x \leq -3 \\ 8x-4 & ; -3 < x < 3 \\ 4x^2+5x-9 & ; x \geq 3 \end{cases}$ ☐ (۲) $\begin{cases} 2x^2-3x+1 & ; x \leq -3 \\ -6x^2-4 & ; -3 < x < 3 \\ x^2-2x+1 & ; x \geq 3 \end{cases}$ ☐

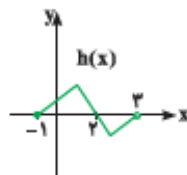
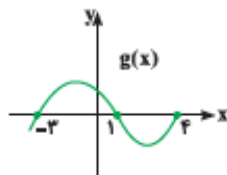
- (۳) $\begin{cases} 4x^2+5x-9 & ; x \leq -3 \\ 8x-4 & ; -3 < x < 3 \\ 4x^2+3x+1 & ; x \geq 3 \end{cases}$ ☐ (۴) $\begin{cases} 2x^2+3x+1 & ; x \leq -3 \\ 6x^2-4 & ; -3 < x < 3 \\ 4x^2+5x-9 & ; x \geq 3 \end{cases}$ ☐

۲۰۲ اگر $f(x) = \sqrt{3x+6}$ و $g(x) = \sqrt{a-2x}+b$ و دامنه تابع $y = (f+g)(x)$ برابر بازه $[-2, 18]$ باشد و بدانیم $(f+g)(10) = 4$ است، حاصل $a-2b$ کدام است؟

- ۱۶ (۱) ☐ ۴۸ (۲) ☐ ۳۶ (۳) ☐ ۴۰ (۴) ☐

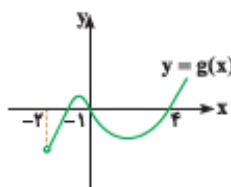
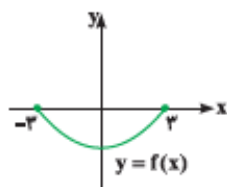
استفاده از نمایش نموداری تابع، تو این درس خیلی پرتکراره.

۲۰۳ نمودار تابع $g(x)$ و $h(x)$ مطابق زیر است. اگر $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ کدام است؟



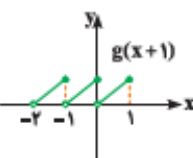
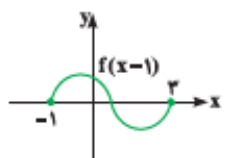
- (۱) $[-3, 3] - \{2\}$ ☐ (۲) $[-1, 3] - \{1\}$ ☐ (۳) $[-1, 4] - \{2, 3\}$ ☐ (۴) $[-3, 4] - \{1, 2\}$ ☐

۲۰۴ اگر نمودار توابع f, g به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $\frac{(f+g)(x)}{g(x)}$ به صورت $(a, b] - \{c, d\}$ است. حاصل $ab+c^3+d^3$ کدام است؟



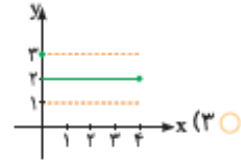
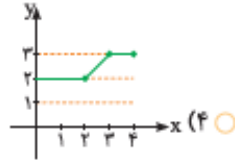
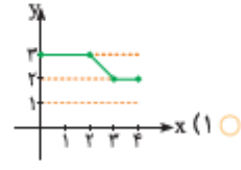
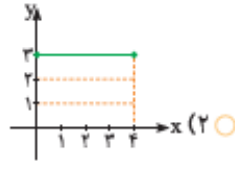
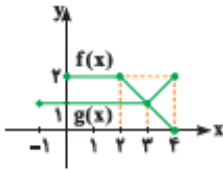
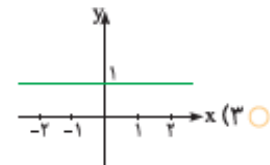
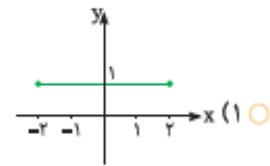
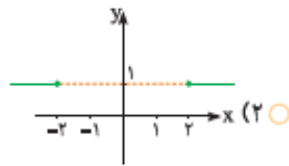
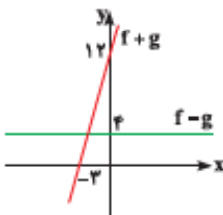
- (۱) -۱ ☐ (۲) ۱ ☐ (۳) -۷ ☐ (۴) ۲ ☐

۲۰۵ با توجه به نمودار $f(x-1)$ و $g(x+1)$ ، دامنه تابع $y = f(\frac{x-4}{2})g(\frac{2x-1}{3})$ کدام است؟



- (۱) $[, 3/5]$ ☐ (۲) $(-1, 2]$ ☐ (۳) $(, 1]$ ☐ (۴) $(-1, 8]$ ☐

(برگرفته از کتاب درسی)

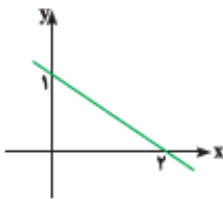
 ۴۵۶ اگر نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت مقابل باشد، کدام گزینه نمودار $y = (f+g)(x)$ است؟

 ۴۵۷ اگر $f(x) = \frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ و $g(x) = \frac{2}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$ باشد، نمودار تابع $y = f(x) \cdot g(x)$ کدام است؟

 ۴۵۸ نمودار دو تابع $f+g$ و $f-g$ به صورت مقابل است. مقدار $f(1)g(1)$ کدام است؟


۲۵ (۱)

۶۰ (۲)

۱۲ (۳)

۴۸ (۴)

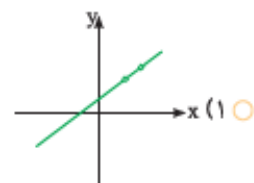
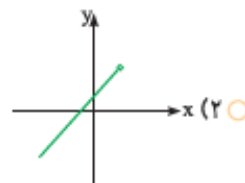
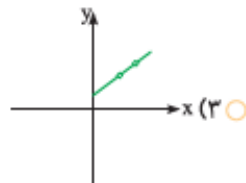
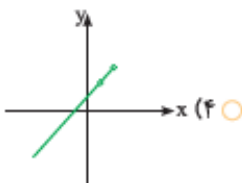
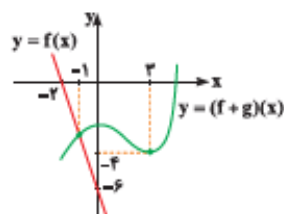
 ۴۵۹ اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و نمودار تابع $f+g$ به صورت مقابل باشد، مقدار $g(-2)$ کدام است؟


۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

 ۴۶۰ اگر $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{5-x}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x-3}$ باشد، آنگاه نمودار $f \cdot g$ کدام است؟

 ۴۶۱ اگر نمودارهای دو تابع f و $f+g$ به صورت مقابل باشند، حاصل $f(1) \times g(-1) + g(3)$ کدام است؟


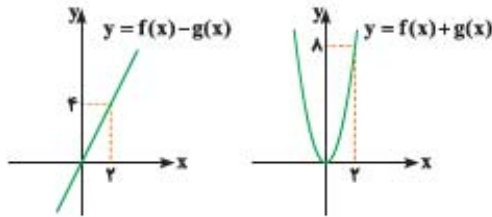
۱۱ (۱)

۲۰ (۲)

۲۳ (۳)

۱۶ (۴)

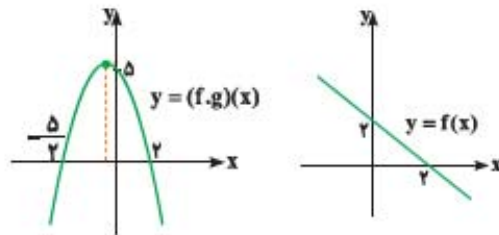
۲۱۲ توابع f و g سهمی هستند. اگر نمودار $f+g$ و $f-g$ به صورت زیر باشد، حاصل



$(f \cdot g)(1)$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۱

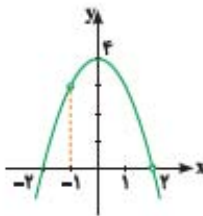
۲۱۳ اگر نمودار تابع خطی f و سهمی $f \cdot g$ به صورت مقابل و $g(x) = ax + b$ باشد،



آنگاه $a+b$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $6/5$
(۳) $-6/5$
(۴) $3/5$

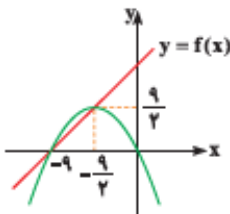
۲۱۴ اگر $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+a)}$ و نمودار تابع $f \cdot g$ به صورت شکل مقابل باشد،



حاصل $f(2-a) - g(2a-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) $-\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

۲۱۵ اگر نمودار تابع خطی f و سهمی $f \cdot g$ به صورت مقابل و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد،



آنگاه حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{49}$
(۲) $\frac{4}{81}$
(۳) $\frac{16}{81}$
(۴) $\frac{16}{49}$

سرنگ در چند سؤال زیر راجع به برد تابع در اعمال جبری حرف می‌زنیم.

۲۱۶ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ و $g(x) = |x-2|$ باشد، برد تابع $y = (f \cdot g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{3\}$
(۲) $[1, +\infty) - \{3\}$
(۳) $\mathbb{R}$
(۴) $[-1, +\infty)$

۲۱۷ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ باشند برد تابع $y = (f+g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $[2, +\infty)$
(۲) $(2, +\infty)$
(۳) $[1, +\infty)$
(۴) $(1, +\infty)$

۲۱۸ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < -1 \\ x & x \geq -1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x+5 & x \geq 1 \\ x+4 & x < 1 \end{cases}$ باشد، کدام یک برد تابع $y = f(x) + g(x)$ است؟

- (۱) $(-\infty, 6)$
(۲) $(6, +\infty)$
(۳) $\mathbb{R} - \{6\}$
(۴) $\mathbb{R}$

۲۱۹ اگر $f(x) = \sqrt{3-x^2}$ و $g = \{(2, 6), (1, 2), (0, 3), (3, 8)\}$ باشد، حداکثر مقدار تابع $y = (\sqrt{(f^2 + g) \cdot g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $3\sqrt{3}$
(۴) $2\sqrt{3}$

۲۲۰ اگر $f = \{(2, 7), (3, -1), (4, 2), (5, 4)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای برد تابع $g(x) = x + f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۷
(۳) ۲۶
(۴) ۳۰

۲۳۱ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = 2^{x-[x]}$ باشد، برد تابع $f - g$ کدام است؟

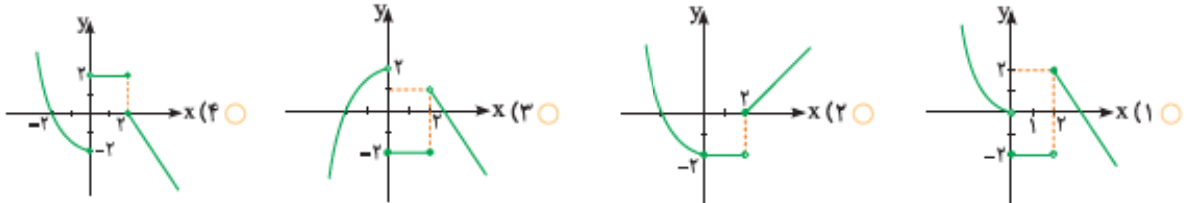
- ☐ (۱) $(-3, -2) \cup \{-1\}$
☐ (۲) $\{-1\}$
☐ (۳) $(-3, -2)$
☐ (۴) $(-3, +\infty)$

(داخل ۹۷)

۲۳۲ اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x+1| + 1$ باشد، آنگاه برد تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

- ☐ (۱) $(0, 1)$
☐ (۲) $(0, 2)$
☐ (۳) $[0, +\infty)$
☐ (۴) $[1, +\infty)$

۲۳۳ اگر $f(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ x-3 & x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$ باشد، نمودار تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟



مقداردهی به ترکیب توابع

(داخل ۹۱)

۲۳۴ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ باشد، عدد a کدام است؟

- ☐ (۱) ۱
 ☐ (۲) ۲
 ☐ (۳) ۳
 ☐ (۴) ۴

۲۳۵ اگر $f = \{(0, 3), (2, -2), (4, 1)\}$ و $g = \{(-1, 4), (2, 3), (4, 2)\}$ باشند، تابع $f \circ g + fog$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\{(-1, 3)\}$
☐ (۲) $\{(2, 4), (-1, 5)\}$
☐ (۳) $\{(4, 0)\}$
☐ (۴) $\{(-1, 3), (4, 0)\}$

۲۳۶ توابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in fog$ و $(4, 1) \in g \circ f$ ، آنگاه

(ریاضی داخل ۹۰)

دوتایی (a, b) کدام است؟

- ☐ (۱) $(3, 4)$
☐ (۲) $(4, 5)$
☐ (۳) $(4, 3)$
☐ (۴) $(5, 4)$

۲۳۷ اگر $f(x) = |x-1| + |2x+1|$ و $g(x) = [-x+1]$ باشند، $g(f(\sqrt{3}-1))$ کدام است؟

- ☐ (۱) -۲
 ☐ (۲) -۳
 ☐ (۳) ۱
 ☐ (۴) ۲

۲۳۸ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه $(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

- ☐ (۱) $4(1-\sqrt{2})$
☐ (۲) $4(\sqrt{2}-1)$
☐ (۳) ۴
 ☐ (۴) $2\sqrt{2}$

۲۳۹ در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ ، مقدار $f(-\frac{1}{4}f(x))$ کدام است؟

- ☐ (۱) -۱
 ☐ (۲) ۱
 ☐ (۳) صفر
 ☐ (۴) تعریف نشده

(داخل ۱۴۰۲)

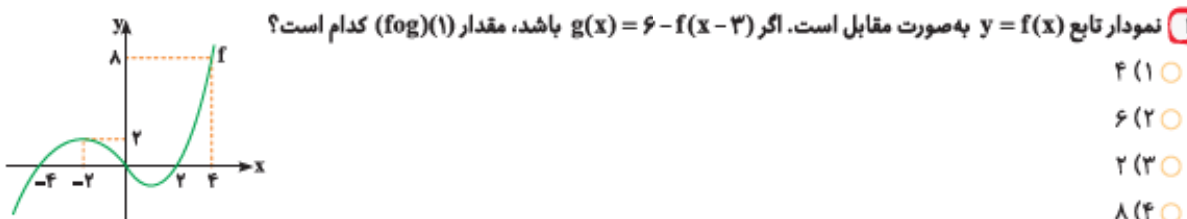
۲۴۰ اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

- ☐ (۱) ۴
 ☐ (۲) -۴
 ☐ (۳) -۶
 ☐ (۴) ۶

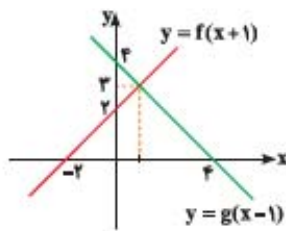
۲۴۱ اگر خروجی ماشین مقابل برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{11}{9}$
☐ (۲) $\frac{7}{4}$
☐ (۳) ۳
 ☐ (۴) ۴

۲۴۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(x) = 6 - f(x-3)$ باشد، مقدار $(fog)(1)$ کدام است؟



- ☐ (۱) ۴
 ☐ (۲) ۶
 ☐ (۳) ۲
 ☐ (۴) ۸



۲۳۳ نمودار دو تابع $y = f(x+1)$ و $y = g(x-1)$ به صورت مقابل است. مقدار

$(g \circ f)(3) + (f \circ g)(-3)$ کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

۲۳۴ تابع‌های $f = \{(a, -2), (-1, b), (1, 0), (3, -4)\}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ مفروض‌اند. اگر بُرد تابع $g \circ f$ به صورت $\{-1, c, 1, d\}$ باشد، مقدار

bc کدام است؟

۱۰ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

۴ (۱)

۲۳۵ اگر $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 1$ و $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ و $f(2) = 1$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۲۳۶ اگر $f(x+1) = 2x+1$ و $f(g(x)+x) = 6x+1$ باشد، مقدار $(f \circ g)(3)$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۹ (۱)

۲۳۷ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2+1; & x < 2 \\ 3x-4; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} f(x+1); & x < 1 \\ f(x-1); & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $(f \circ g)(1)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

ضابطه ترکیب توابع

سریع در این بخش، می‌خوایم با کمک تابع‌های f و g ، ضابطه تابع $f \circ g$ یا $g \circ f$ رو پیدا کنیم.

۲۳۸ اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

$2 - f(x)$ (۴)

$f(x)$ (۳)

$4 - x$ (۲)

x (۱)

۲۳۹ اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x - 3$ و α و β ریشه‌های معادله $(g \circ f)(x) = 2$ باشند، مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

۲ (۴)

۱۰ (۳)

۱۴ (۲)

۸ (۱)

(داخل ۹۶)

۲۴۰ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، آنگاه ضابطه تابع $g \circ f$ کدام است؟

$2x$ (۴)

x (۳)

$x+1$ (۲)

$x-1$ (۱)

۲۴۱ اگر $f(x) = 2(x^2 - x - 3)$ و $g(x) = 3x+1$ باشند، نمودار دو تابع $f \circ g$ و $f(x+3)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۴ غیرمتقاطع

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۴۲ در تابع خطی f اگر $(f \circ f)(x) = f(x-3) + f(x+1)$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

(خارج ۹۷)

۲۴۳ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

۱, ۷ (۴)

-۱, ۷ (۳)

۱, -۷ (۲)

-۱, -۷ (۱)

۲۴۴ اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{4}(x-3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی $f \circ g$ که در زیر محور x قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟

(خارج ۹۱)

$(1, 5)$ (۴)

$(-2, 1)$ (۳)

$(-1, 5)$ (۲)

$(-4, 1)$ (۱)

۲۴۵ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + 2x + 4$ باشند، مجموعه جواب معادله $(g \circ f)(x) = 3$ کدام است؟

$\emptyset$ (۴)

$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳)

$\mathbb{Z}$ (۲)

$\mathbb{R}$ (۱)

۲۴۶ اگر $f(x) = x^2 - 7x + 10$ و $g(x) = [x]$ باشد، نمودار تابع $f \circ g$ در بازه $[a, b]$ زیر محور x است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۲۴۷ اگر $f(x) = |x-3|$ و $g(x) = |2x-7|$ باشند، مجموع جواب‌های معادله $(g \circ f)(x) = 1$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۹ (۳)

۱۳ (۲)

۶ (۱)

۲۴۸ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟ (داخل ۹۵)

- ۳ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۴/۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۲۴۹ تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آن گاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ (خارج ۹۴)

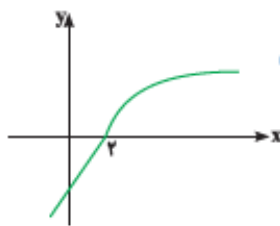
- ۱/۹، ۴ (۱) ☐ ۱/۴، ۹ (۲) ☐ ۴، ۱/۴ (۳) ☐ ۴، ۹ (۴) ☐

۲۵۰ توابع $f(x) = \begin{cases} 3x-12; & x \geq 3 \\ x^2-1; & x < 3 \end{cases}$ و $g(x) = 2x+1$ را در نظر بگیرید. مجموع ریشه های معادله $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱/۳ (۲) ☐ ۱/۲ (۳) ☐ ۵/۳ (۴) ☐

۲۵۱ اگر $f(x) = |x - 1|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

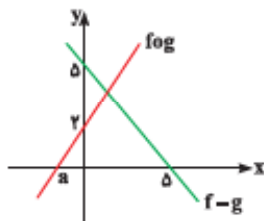


۲۵۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 - x$ باشد، نمودار دو تابع $y = f \circ g$ و $y = x - f(x)$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (شبه سازه تجربی ۱۴۰۰)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۵۳ نمودار دو تابع $f - g$ و $f \circ g$ به صورت مقابل است. اگر $2g(x) = 3f(x) - 14$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱/۳ (۲) ☐ ۲/۳ (۳) ☐ -۲/۳ (۴) ☐ -۱/۳ (۴) ☐



بعضی وقت ها هم تابع های $f \circ g$ و g رو داریم و می خولیم ضابطه f رو پیدا کنیم. انواع این سؤالات براتون آوردیم.

۲۵۴ اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۱)

- ۴ (۱) ☐ -۲ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۵۵ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

- ۲۸۲ + ۳۸ + ۱ (۱) ☐ ۲۸۲ - ۲۸ + ۳ (۲) ☐ ۲۸۲ - x + ۴ (۳) ☐ ۲۸۲ + x + ۳ (۴) ☐

۲۵۶ اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ ، برابر کدام است؟ (داخل ۹۷)

- ۲ - x + ۳ (۱) ☐ x^2 - 2x - 1 (۲) ☐ x^2 - 2x + 1 (۳) ☐ x^2 - x + 1 (۴) ☐

۲۵۷ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آن گاه $f(1-x)$ کدام است؟

- ۲ + ۱ (۱) ☐ x^2 + 3 (۲) ☐ x^2 + 4x + 5 (۳) ☐ x^2 - 4x + 5 (۴) ☐

۲۵۸ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = (2x+1)g(x) + 6x$ باشد، معادله محور تقارن تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- x = -2 (۱) ☐ x = -7 (۲) ☐ x = 5 (۳) ☐ x = -3/5 (۴) ☐

۲۵۹ اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

- ۲۸۲ - ۷۸ + ۳ (۱) ☐ ۲۸۲ - ۳۸ + ۷ (۲) ☐ ۴۸۲ - ۲۸ + ۱۳ (۳) ☐ ۴۸۲ - ۴۸ + ۱۱ (۴) ☐

۲۶۰ اگر $(g \circ f)(x) = 3f(x) + 4$ و $(f \circ g)(x) = 2g^2(x) + g(x) + 1$ باشد، کمترین مقدار تابع $(f - g)(x)$ کدام است؟

- ۳ (۱) ☐ ۳/۵ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ -۳/۵ (۴) ☐

(داخل ۹۹)

۲۸۳ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع gof کدام است؟

- ☐ (۱) $[-1, 2]$ ☐ (۲) $[0, 3]$ ☐ (۳) $[-1, 4]$ ☐ (۴) $[1, 4]$

(خارج ۹۹)

۲۸۴ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، بُرد تابع gof ، کدام است؟

- ☐ (۱) $[-1, 1]$ ☐ (۲) $[-1, 1]$ ☐ (۳) $[1, +\infty)$ ☐ (۴) $(-\infty, 1]$

۲۸۵ **iq** دو تابع $f(x) = \log_7 x$ و $g(x) = 8x - x^2$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعه A و B به ترتیب دامنه و بُرد تابع fog باشند، مجموعه $A \cap B$ دارای چند عضو صحیح است؟

- ☐ (۱) ۲ ☐ (۲) ۳ ☐ (۳) ۴ ☐ (۴) ۵

۲۸۶ **iq** بُرد تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 x)$ کدام است؟

- ☐ (۱) $(-\infty, +\infty)$ ☐ (۲) $(-\infty, +\infty)$ ☐ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ☐ (۴) $[0, 1]$

۲۸۷ اگر $f(x) = |2x - 3| + 1$ و $g(x) = 1 + 2\sin^2 x$ باشند، بُرد تابع fog کدام است؟

- ☐ (۱) $[2, 4]$ ☐ (۲) $[1, 3]$ ☐ (۳) $[1, 4]$ ☐ (۴) $[0, 3]$

۲۸۸ **iq** اگر $f(x) = \log_7 x + \log_7^2 x$ و $g(x) = 3^{x+1}$ باشد، بُرد تابع gof کدام است؟

- ☐ (۱) $(-\infty, +\infty)$ ☐ (۲) $(0, 3] \cup [27, +\infty)$ ☐ (۳) $(-\frac{1}{27}, \frac{1}{27}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ ☐ (۴) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cup [27, +\infty)$

۴ وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

۲۸۹ اگر $f = \{(1, 3), (2, -1), (3, 0), (0, 1)\}$ و $g = \{(-1, 4), (0, 1), (3, 2)\}$ باشند، چه تعداد از توابع زیر غیریکنوا هستند؟

- الف fog ☐ (۱) صفر ☐ (۲) ۱ ☐ (۳) ۲ ☐ (۴) ۳
ب fof ☐ (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) ۴
پ gof ☐ (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) ۴

۲۹۰ اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $[-6, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{x}{\sqrt{f(x+2)} - f(3-2x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ☐ (۱) ۲ ☐ (۲) ۳ ☐ (۳) ۵ ☐ (۴) ۷

۲۹۱ **iq** اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{2x+5}{\sqrt{f(4-x)} - f(|x-2|)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ☐ (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) ۴

۲۹۲ **iq** تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار

(ریاضی داخل ۱۴۰۲)

صحیح است؟

- ☐ (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) صفر

۲۹۳ **iq** اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه $[-4, 5]$ باشد، دامنه تابع $y = \log(f(x+1) - f(2-x))$ کدام است؟

- ☐ (۱) $(-\infty, 6]$ ☐ (۲) $[-4, 0/5]$ ☐ (۳) $(0/5, 5]$ ☐ (۴) $[-3, 0/5]$

۲۹۴ نمودار تابع اکیداً صعودی $y = f(x)$ از نقطه $A(6, 3)$ می‌گذرد. اگر $g(x) = x^2 - x$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(\text{fog})(x) \leq 3$ شامل

(شبه‌ساز کتک‌ور ۱۴۰۲)

چند عدد صحیح است؟

- ☐ (۱) ۵ ☐ (۲) ۳ ☐ (۳) ۷ ☐ (۴) ۶

۲۹۵ **iq** تابع اکیداً نزولی $y = f(x)$ با دامنه $[0, 4]$ و بُرد $[1, 4]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(2) = 3$ و $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مجموعه جواب نامعادله

(شبه‌ساز کتک‌ور ۱۴۰۲)

$1 \leq (\text{fof})(x) \leq 2$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ☐ (۱) ۲ ☐ (۲) ۳ ☐ (۳) ۴ ☐ (۴) ۵

(شبه‌ساز کتک‌ور ۱۴۰۲)

۲۹۶ **TNT** اگر $f(x) = x + \sqrt{x} - 2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $\text{fof}(x) \leq f(\sqrt{x})$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ☐ (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) ۴

فصل اول

درس ششم:

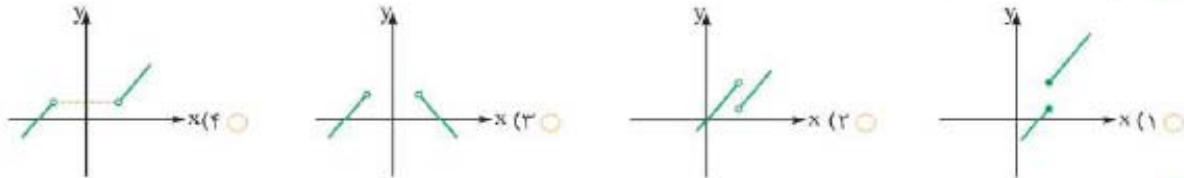
تابع یک به یک و تابع وارون

CHAPTER 1

توضیح: مقدمه بخش وارون تابع، شناسایی یک به یکی توابع است.

۳۹۷ اگر رابطه $f = \{(1, 4), (4, 5), (1, a^2 + 3a), (b, |2a + 3|)\}$ نمایش دهنده یک تابع یک به یک باشد، مقدار $b + a$ کدام می تواند باشد؟
 ۴ (۴) ۵ (۳) ۹ (۲) ۶ (۱)

۳۹۸ کدام یک از نمودارهای زیر، نمایش تابعی یک به یک است؟



۳۹۹ کدام جمله صحیح است؟

- (۱) جمع دو تابع یک به یک، قطعاً تابعی یک به یک است.
 (۲) تابع با دامنه ۳ عضوی و برد ۲ عضوی، قطعاً غیر یک به یک است.
 (۳) اگر f تابعی یک به یک باشد، f^K ، $(K \in \mathbb{N})$ نیز تابعی یک به یک است.
 (۴) اگر $|f|$ تابعی یک به یک باشد، f می تواند یک به یک نباشد.

۳۰۰ کدام تابع زیر یک به یک است؟

- $y = 2|x| - x$ (۴) $y = |2x| - 2x$ (۳) $y = |x| + 2x$ (۲) $y = |2x| + x$ (۱)

۳۰۱ کدام تابع زیر یک به یک است؟

- $y = [x + [x]]$ (۴) $y = x[x]$ (۳) $y = x + [x]$ (۲) $y = x - [x]$ (۱)

۳۰۲ کدام تابع زیر یک به یک است؟

- $y = \sqrt{|x| - 2}$ (۴) $y = |\sqrt{x} - 2|$ (۳) $y = x^3 + 2x$ (۲) $y = x^2 + 2x$ (۱)

۳۰۳ کدام تابع غیر یک به یک است؟

- $y = (\frac{2}{3})^x$ (۴) $x + y + 1 = 0$ (۳) $y = \sqrt[3]{x - 5}$ (۲) $y = x^3 - 4x + 1$ (۱)

(داخل ۹۵)

۳۰۴ تابع با ضابطه $y = |x^3|$ چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) صعودی (۳) غیر یک به یک (۴) یک به یک

۳۰۵ کدام تابع زیر یک به یک نیست؟

- $y = \sqrt{x} + x^4$ (۴) $y = \log x + x^3$ (۳) $y = x + (\frac{1}{x})^x$ (۲) $y = \sqrt[3]{x} + x$ (۱)

۳۰۶ اگر $f(x) = m^2x^2 + 2x - x^2 + m$ تابعی همواره یک به یک باشد، حداکثر مقدار $f(3/5)$ کدام است؟

- ۹ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

۳۰۷ تابع $f(x) = ax^2 - (a+2)x + 3 - a$ در بازه $(-2, -1)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

- (۱) $R - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$ (۲) $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$ (۳) $[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}]$ (۴) $R - [-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}]$

۳۰۸ به ازای کدام مقدار b ، تابع $y = \frac{2x+b}{x+3+b}$ غیر یک به یک است؟

- (۱) -3 (۲) -6 (۳) -4 (۴) -1

۳۰۹ اگر تابع $f(x) = 2x + m^2x - 3mx + 1$ همواره غیر یک به یک باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -1 (۲) $+2$ (۳) $+3$ (۴) -4

۳۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ x+a & ; x < 1 \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد، a چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۳۱۱ اگر $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & ; x > 2 \\ \sqrt{x-a} & ; a \leq x \leq 2 \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) -5 (۲) -4 (۳) -7 (۴) -6

۳۱۲ به ازای کدام مقادیر k تابع $f(x) = \begin{cases} 4x+1 & ; x > k \\ x-5 & ; x \leq k \end{cases}$ یک به یک نیست؟

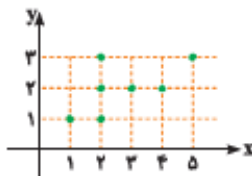
- (۱) $[1, 2]$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(3, 4]$ (۴) $[0, 1]$

۳۱۳ *iq* تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-b} & ; b \leq x \leq a \\ \sqrt{x+a} & ; x > a \end{cases}$ یک به یک است. کدام یک می‌تواند (a, b) باشد؟

- (۱) $(2, -4)$ (۲) $(4, 2)$ (۳) $(-2, 4)$ (۴) $(-2, -4)$

سرنخ ممکنه تابعی یک به یک نباشه، اما با محدود کردن دامنه بشه ازش تابعی یک به یک ساخت.

۳۱۴ با حذف حداقل چند نقطه از نمودار مقابل یک تابع یک به یک خواهیم داشت؟



- (۱) 1
(۲) 2
(۳) 3
(۴) 4

۳۱۵ دامنه تابع $f(x) = 2x^2 - 16x + \sqrt{x}$ را به کدام بازه زیر محدود کنیم تا تابعی یک به یک داشته باشیم؟

- (۱) $[-6, 6]$ (۲) $(-\infty, 5]$ (۳) $(3, 6]$ (۴) $[5, +\infty)$

۳۱۶ تابع $f(x) = (2x+1)^2 + 2(3x-1) - 3$ در بازه $(-\infty, m]$ یک به یک است. بیشترین مقدار m کدام است؟

- (۱) $-1/5$ (۲) $-1/25$ (۳) -1 (۴) $-1/75$

۳۱۷ تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$ در کدام دامنه زیر یک به یک است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (۲) $(0, 2\pi)$ (۳) $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$ (۴) $(0, \pi)$

۳۱۸ تابع $f(x) = |x^2 - 1| - 1$ با کدام دامنه زیر یک به یک است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-\sqrt{2}, -1]$ (۳) $[0, \sqrt{2}]$ (۴) $[1, +\infty)$

۳۱۹ بازه $[a, b]$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = |2x-4| + |2x| + 1$ در آن یک به یک نیست. این بازه شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۳۲۰ تابع $f(x) = |x-a| + a$ در بازه $[1, 5]$ یک به یک است. حدود a در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $R - (-5, -1)$ (۲) $R - (-5, 0)$ (۳) $R - (1, 5)$ (۴) $R - \{1, 5\}$

۳۳۱ اگر $g(x)$ تابعی یک به یک با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x+4}{g(x)-g(x^2-3)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۳۲ اگر f تابع یک به یک روی مجموعه اعداد حقیقی باشد، معادله $f(2^x) = f(x^2)$ چند جواب مثبت دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

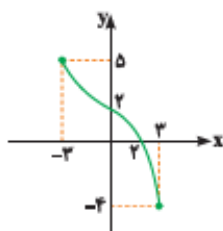
تایع وارون

سریع توی بعضی سؤالا، از تعریف تایع وارون سؤال می پرسن، چند تا با هم ببینیم.

(داخل ۱۴۰۱)

۳۳۳ وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند؟

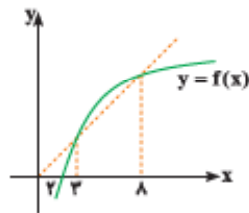
- ۱ (۱) ☐ $(-1, -2)$ ☐ $(\frac{5}{8}, \frac{1}{8})$ ☐ $(1, 2)$ ☐ $(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$ ☐ $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$ ☐



۳۳۴ نمودار تابع f با دامنه $[-3, 3]$ به صورت مقابل است. اگر $\frac{f^{-1}(5)}{f(a) + f^{-1}(0)} = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ صفر ☐ ۱ (۲) ☐ -۱ (۳) ☐ $\frac{1}{4}$ (۴) ☐

۳۳۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم را نشان می دهد. دامنه تابع با ضابطه



(داخل ۹۴)

کدام است $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ ؟

- ۱ (۱) ☐ $(0, 2]$ ☐ $[2, 3]$ (۲) ☐ $[2, 8]$ (۳) ☐ $[3, 8]$ (۴) ☐

سریع این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیر که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته ها را یاد می گیرین، بعدش کلی تست قشنگارو می خونیم.

(شبیه ساز تجربی ۹۹)

۳۳۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ باشد. حاصل $g(4) - g(12)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۱۰ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۱۰ (۴) ☐ -۶

(نوبت اول ۱۴۰۲)

۳۳۷ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$, $x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ صفر (۴) ☐

۳۳۸ اگر $f(x-1) = \log_2^{(x+1)}$ و $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi x}{4})$ باشد، مقدار $(f^{-1} \circ g)(4)$ کدام است؟

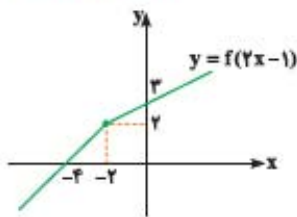
- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ -۱ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐

۳۳۹ اگر $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد، حاصل $(f + g^{-1})(-\frac{7}{5})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $-\frac{23}{25}$ (۲) ☐ $-\frac{11}{25}$ (۳) ☐ $-\frac{23}{75}$ (۴) ☐ $-\frac{11}{75}$

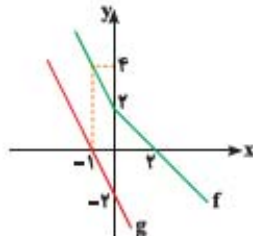
۳۴۰ اگر $f(x) = \begin{cases} 6-2x; & x < 2 \\ 4-x; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ x-4; & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f \circ g^{-1}(-5) + g \circ f^{-1}(-2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐



۳۳۱ نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(3)}{f(-5)}$ کدام است؟

- ۱) -7
۲) 2
۳) -3
۴) 5



۳۳۲ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $g \circ f^{-1}(-2) + g^{-1} \circ f(-1)$ چقدر است؟

(شبه‌ساز خارج ۱۴۰۱)

- ۱) -16
۲) -14
۳) -13
۴) -10

۳۳۳ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^2 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

- ۱) 15 ۲) 12 ۳) 9 ۴) 5 (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۳۴ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+3)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1 (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۳۳۵ دو تابع با ضابطه‌های $(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4 (ریاضی داخل ۹۳)

۳۳۶ اگر $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $\log^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

- ۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳۳۷ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9} & ; x \geq 3 \\ 3x-x^2 & ; x < 3 \end{cases}$ و $g = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 7

۳۳۸ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

(خارج ۹۸)

۳۳۹ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

- ۱) $1/5$ ۲) 2 ۳) $2/5$ ۴) 3

(ریاضی داخل ۹۹)

۳۴۰ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۴۱ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ و $g(x) = \frac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(f \circ g^{-1})(-1) = -\frac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

(ریاضی داخل ۹۸)

۳۴۲ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

- ۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ ۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$ ۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$ ۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

۳۴۳ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند، برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

- ۱) $\{-1, 4\}$ ۲) $\{2, 3\}$ ۳) $\{3, 4\}$ ۴) $\{2, -1\}$ (ریاضی خارج ۹۸)

۳۴۴ اگر $f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x) = 1-x$ باشند، مقدار $(f \circ g)(2)$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) 2 ۳) -3 ۴) -5

۳۴۵ اگر $f(x) = x^2 + 4x + 15$ و $(fog)(x) = x^2 g(x) + 4g(x)$ باشد، مقدار $g^{-1}(3)$ کدام است؟

- ۱ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۶ (۲) ☐ ۲ (۱) ☐

۳۴۶ می‌دونیم که $f(a) = b$ باشد، همیشه نتیجه گرفت $f^{-1}(b) = a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی تر هم قابل استفاده است.

۳۴۶ اگر $f(x^2 + 2x) = 2^x - 14$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ۵۴ (۴) ☐ ۷۲ (۳) ☐ ۱۴ (۲) ☐ ۱۶ (۱) ☐

۳۴۷ اگر $f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = x^2 - 1$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۳۴۸ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹) $-\frac{3}{4}$ (۲) ☐ $-\frac{3}{2}$ (۱) ☐

- $-\frac{1}{2}$ (۴) ☐ -1 (۳) ☐

۳۴۹ اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

(داخل ۸۹) **۳۵۰** اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- ۸ (۴) ☐ ۷ (۳) ☐ ۶ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

محاسبه ضابطه تابع وارون

۳۵۱ این بخش رو با وارون کردن تابع‌های خطی شروع می‌کنیم. فقط کافی‌ه جای x و y رو عوض کنید!

(داخل ۹۷) **۳۵۱** قرینه خطی به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۱ (۳) ☐ -1 (۲) ☐ -2 (۱) ☐

۳۵۲ نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{x-3}{2}$ را در راستای محور y ‌ها، 6 واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطه تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصله A از مبدأ مختصات کدام است؟

- $\sqrt{2}$ (۴) ☐ $2\sqrt{2}$ (۳) ☐ $\sqrt{5}$ (۲) ☐ $2\sqrt{5}$ (۱) ☐

۳۵۳ فاصله نقطه $A(7, 1)$ از نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ کدام است؟

- $\sqrt{15}$ (۴) ☐ $\sqrt{13}$ (۳) ☐ $\sqrt{11}$ (۲) ☐ $\sqrt{7}$ (۱) ☐

۳۵۴ تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. اگر $f^{-1}(x) = f(x) - g(x+1)$ باشد، نمودار تابع $y = g(x)$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐

۳۵۵ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ به کدام صورت است؟

- $y = x + 2; x \neq 1$ (۴) ☐ $y = x + 2; x \neq 3$ (۳) ☐ $y = x - 2; x \neq 1$ (۲) ☐ $y = x - 2; x \neq 3$ (۱) ☐

(خارج ۹۳) **۳۵۶** اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a + b$ کدام است؟

- $-2, 3$ (۴) ☐ $2, -3$ (۳) ☐ ± 2 (۲) ☐ ± 3 (۱) ☐

۳۵۷ تابع خطی f با ضابطه $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(3f^{-1}(x)) = 3x + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

- $-\frac{2}{5}$ (۴) ☐ $-\frac{3}{5}$ (۳) ☐ $\frac{2}{5}$ (۲) ☐ $\frac{3}{5}$ (۱) ☐

۳۵۸ تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجه دوم و درجه سوم است. توی این سؤال‌ها به محدود کردن دامنه توجه کنید.

(داخل ۹۲) **۳۵۸** ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- $y = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$ (۲) ☐ $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ (۱) ☐

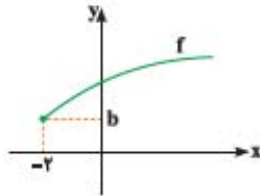
- $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$ (۴) ☐ $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$ (۳) ☐

۳۵۹ قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

- ۳ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۲ (۳) ☐ ۳ (۲) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۶۰ نمودار تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x+a}$ به صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



۱ (۱) ☐

۱ (۲) ☐

۲ (۳) ☐

۴ (۴) ☐

۳۶۱ نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به طرف x های مثبت و ۱ واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱ (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐

۳۶۲ ضابطه وارون تابع $f(x) = (x-2)^2 + 6x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است. کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $-1 + \sqrt{x-3}$ (۲) ☐ $-1 + \sqrt{x-3}$ (۳) ☐ $2 + \sqrt{x-6}$ (۴) ☐ $2 - \sqrt{x-6}$ (۴) ☐

۳۶۳ iq ضابطه وارون تابع $f(x) = -2 + \sqrt{x-3}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور x ها قرار دارد، کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $-2 \leq x < 0$ (۲) ☐ $3 \leq x < 7$ (۳) ☐ $0 \leq x \leq 3$ (۴) ☐ $x^2 + 4x + 7$ (۲) ☐

- ۲ (۳) ☐ $0 \leq x \leq 3$ (۴) ☐ $x^2 - 6x + 4$ (۴) ☐

۳۶۴ iq ضابطه وارون تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $0 < x < 1$ (۲) ☐ $1 + \sqrt{1-x}$ (۳) ☐ $0 < x < 1$ (۴) ☐ $1 - \sqrt{1-x}$ (۴) ☐

۳۶۵ iq نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ ؛ $x \geq 1$ را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $-1 - \sqrt{x-1}$ (۲) ☐ $-1 + \sqrt{x-1}$ (۳) ☐ $-1 - \sqrt{x+1}$ (۴) ☐

۳۶۶ iq اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = (2x-1)g(x)$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \leq 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $y = 1 - \sqrt{x-1}$ (۲) ☐ $y = 1 + \sqrt{x-1}$ (۳) ☐ $y = 1 - \sqrt{x+1}$ (۴) ☐

(ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۳۶۷ تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $-\sqrt{x}$ ؛ $x \geq 0$ (۲) ☐ $-\sqrt{x^2}$ ؛ $x \leq 0$ (۳) ☐ $-\sqrt{x}$ ؛ $x \leq 0$ (۴) ☐

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۶۸ اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐

(شبه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۳۶۹ iq ضابطه وارون $f(x) = \sqrt{x+2} \sqrt{x-1}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $x^2 - 2x + 2$ ؛ $x \geq 1$ (۲) ☐ $x^2 - 2x$ ؛ $x \geq 1$ (۳) ☐ $x^2 + 2x + 2$ ؛ $x \geq -1$ (۴) ☐

(شبه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۳۷۰ iq ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{4}x - 1}$ در دامنه محدود کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $2\sqrt{4x+4} + 2$ (۲) ☐ $2\sqrt{4x+4} - 2$ (۳) ☐ $2\sqrt{x^2+1} + 2$ (۴) ☐

۳۷۱ تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) ☐ $-\frac{1}{4}x - 7$ ؛ $x \geq 2$ (۲) ☐ $-\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ ؛ $x \leq 3$ (۳) ☐ $-2x + 14$ ؛ $x \leq 3$ (۴) ☐

فصل اول: تابع

۳ ۱

نمودار موجود در گزینه «۳»، خود نمایانگر یک تابع است.

هایلایت

تابع و تشخیص آن

اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، دارای مؤلفه اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفه دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

۲ ۲

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(5, a-2b)$ و $(5, 4a-b)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند. همچنین در زوج مرتب‌های $(4, -2)$ و $(4, a+b)$ باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} 4a-b=a-2b \\ a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a-b=1-(-3)=4$ است.

۴ ۳

برای اینکه زوج مرتب f تابع نباشد، باید حالتی ایجاد کنیم که ورودی یکسان اما خروجی متفاوت باشد. یعنی:

$$k=0 \Rightarrow f=\{(1,4), (2,4), (3,5), (4,9), (1,4)\}$$

$$k=1 \Rightarrow f=\{(1,4), (2,4), (3,5), (4,9), (2,9)\}$$

$$k=2 \Rightarrow f=\{(1,4), (2,4), (3,5), (4,9), (3,16)\}$$

$$k=3 \Rightarrow f=\{(1,4), (2,4), (3,5), (4,9), (4,25)\}$$

پس مقادیر قابل قبول k برای اینکه f تابع نباشد، برابر است با:

$$k=\{1, 2, 3\} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k=6$$

۳ ۴

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف) و ت) از عضو a در نمودار (الف) و از عضو b در نمودار (ت) پیکانی خارج نشده؛ پس تابع نیستند.

ب) از عضو b ، ۲ پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

پ) از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است؛ پس تابع است.

۱ ۵

برای این که نمودار پیکانی داده شده، نمایانگر یک تابع باشد، باید:

$$3m-6=12-m^2 \text{ و } m^2-2m=3m-6 \text{ باشد}$$

$$\begin{cases} m^2-2m=3m-6 \Rightarrow m^2-5m+6=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=3 \end{cases} \\ 3m-6=12-m^2 \Rightarrow m^2+3m-18=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-6 \\ m=3 \end{cases} \end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، تنها مقدار $m=3$ قابل قبول است.

۴ ۶

به بررسی موارد داده شده می‌پردازیم:

الف) چون هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشه چهارم است، پس این رابطه تابع نیست.

ب) این رابطه بیانگر یک تابع نیست، زیرا برای هر عددی، دو عدد با اختلاف ۳ واحد می‌توان نسبت داد.

پ) می‌دانیم هر عدد فرد اول، دارای ۲ مقسوم‌علیه است. پس این رابطه تابع نیست.

۳ ۷

می‌دانیم یک رابطه، زمانی یک تابع است که به ازای یک ورودی x ، تنها یک خروجی y حاصل شود، در گزینه «۳» برای $x=0$ بی‌شمار خروجی y داریم.

$$[x]+[y]=\xrightarrow{x=0}[-]+[y]=0 \Rightarrow [y]=0 \Rightarrow 0 \leq y < 1$$

پس این رابطه تابع نیست. باقی روابط موجود در گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع هستند.

۳ ۸

تابع از A به B ، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، اعضای مجموعه A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، اعضای مجموعه B هستند. می‌توان این تابع را به صورت زیر نمایش داد:

$$\{(a, \text{○}), (b, \text{□}), (c, \text{△})\}$$

چون طبق سوال، این تابع باید حتماً شامل زوج مرتب $(c, 4)$ باشد، داریم:

$$\{(a, \text{○}), (b, \text{□}), (c, 4)\}$$

با توجه به تابع بالا، به جای مؤلفه دوم‌های ○ و □ ، هر ۴ عضو مجموعه B می‌توانند قرار بگیرند. پس در کل $4 \times 4 = 16$ تابع مختلف با این شرایط می‌توان نوشت.

۲ ۹

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار هر دو ضابطه در نقطه $x=1$ با هم برابر باشند:

$$x=1: 2(1)^2+m(1)=\frac{3m^2-2}{1} \Rightarrow 2+m=3m^2-2$$

$$3m^2-m-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{4}{3} \end{cases}$$

۲ ۱۰

به ازای $x=1$ ، مقدار تابع از ضابطه بالا و ضابطه پایین باید برابر باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2a & ; |x| \leq 1 \\ ax^2+5 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1} \sqrt{4}+2a=a+5 \Rightarrow a=3$$

حالا برای پیدا کردن $f(3)$ سراغ ضابطه پایینی می‌رویم:

$$f(3)=3 \times 3^2+5=32$$

۱۵ ۳

برای پیدا کردن $f(3)$ در ضابطه تابع، $x=2$ و برای پیدا کردن $f(-3)$ در ضابطه تابع، $x=-1$ قرار می‌دهیم:

$$x=2; f(3)=6-a$$

$$x=-1; f(-3)=-3-a$$

حالا، با توجه به این که $f(3)+f(-3)=9$ است، پس:

$$(6-a)+(-3-a)=9 \Rightarrow 3-2a=9 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

حالا سراغ پیدا کردن $f(a+2)$ می‌رویم:

$$f(a+2)=f(-1)$$

کافی است در ضابطه $f(2x-1)$ ، $x=0$ قرار دهیم:

$$f(2x-1)=3x-a \xrightarrow{x=0} f(-1)=-a=3$$

۱۶ ۴

می‌دانیم $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$ است. حالا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم و سپس $x=2+\sqrt{3}$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-6x^2+12x-8 \Rightarrow f(x)=(x-2)^2$$

$$\xrightarrow{x=2+\sqrt{3}} f(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3}-2)^2=(\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$$

۱۷ ۲

ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+14}=\sqrt{(x-3)^2+5}$$

$$\Rightarrow f(3+\sqrt[3]{24})=\sqrt{(3+\sqrt[3]{24}-3)^2+5}=\sqrt{(\sqrt[3]{24})^2+5}$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{24}+5}=\sqrt{2\sqrt{6}+5}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

۱۸ ۴

باجای‌گذاری $x=2$ و $x=\frac{1}{4}$ در تساوی $1-x^2=f(x)+3f(\frac{1}{x})$ داریم:

$$x=2: f(2)+3f(\frac{1}{4})=-3$$

$$x=\frac{1}{4}: f(\frac{1}{4})+3f(2)=\frac{3}{4}$$

ضابطه پایینی را در -3 ضرب می‌کنیم و دستگاه دو معادله دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2)+3f(\frac{1}{4})=-3 \\ -9f(2)-3f(\frac{1}{4})=-\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow -8f(2)=-\frac{21}{4} \Rightarrow f(2)=\frac{21}{32}$$

۱۹ ۳

در ضابطه $(x+2)f(x)-3xf(x+2)=4x^2-mx+3m-1$ یک بار $x=0$ و یک بار $x=-2$ قرار می‌دهیم:

$$x=0: 2f(0)-0=3m-1 \Rightarrow f(0)=\frac{3m-1}{2}$$

$$x=-2: 0+6f(0)=16+2m+3m-1 \Rightarrow f(0)=\frac{15+5m}{6}$$

حالا این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم تا m به دست آید:

$$\frac{3m-1}{2}=\frac{15+5m}{6} \Rightarrow 9m-3=15+5m \Rightarrow 4m=18$$

$$\Rightarrow m=\frac{9}{2}$$

$$\text{بنابراین } f(0)=\frac{3m-1}{2}=\frac{27-2}{2}=\frac{25}{2}$$

۱ ۱۱

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار ضابطه‌های $ax+b$ و bx^2+a در نقطه $x=2$ با هم برابر باشند. همچنین مقدار ضابطه‌های bx^2+a و $(a-b)x+8$ نیز باید در $x=3$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a(2)+b=b(2)^2+a \\ b(3)^2+a=(a-b)(3)+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=4b+a \\ 9b+a=3a-3b+8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=4+\frac{4}{3}=\frac{12+4}{3}=\frac{16}{3}$$

۲ ۴

برای پیدا کردن $f(5)$ باید در ضابطه داده شده $x=2$ قرار دهیم:

$$f(x+3)=3x+14 \xrightarrow{x=2} f(5)=20$$

هابلایت

مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. [هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی‌های یکسان باشند].



منظور از $f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه $x=a$ است. بنابراین برای محاسبه مقدار تابع در $x=a$ ، باید در ضابطه تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم.

اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان‌دهنده عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

۲ ۱۳

در ضابطه داده شده، به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$2f(x+4)=f(4)+x^2+5(x+1)+2 \xrightarrow{x=0} 2f(4)=f(4)+7 \Rightarrow f(4)=7$$

۱ ۱۴

برای پیدا کردن $g(4)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای $x=1$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطه پایینی برویم:

$$x < 2: g(3x+1)=x^2 \xrightarrow{x=1} g(4)=1^2=1$$

حالا برای پیدا کردن $g(10)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای $x=3$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطه بالایی برویم:

$$x \geq 2: g(3x+1)=x-2 \xrightarrow{x=3} g(10)=1$$

بنابراین $g(4)+g(10)=2$ است.

۲ ۲۵

 با توجه به ضابطه پایینی تابع، مقدار $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x < 1: f(x) = x + 1 \Rightarrow f(-1) = 0$$

 پس $f(1 + f(-1)) = f(1)$ است. با توجه به ضابطه بالایی تابع داریم:

$$\begin{aligned} x \geq 1: f(x) &= 4 - f(x) \xrightarrow{x=1} f(1) = 4 - f(1) \\ \Rightarrow 2f(1) &= 4 \Rightarrow f(1) = 2 \end{aligned}$$

۴ ۲۱

 برای پیدا کردن طول نقاط برخورد با محور x ها، باید مشخص کنیم در چه نقطه‌ای، $f(x) = 0$ است:

$$x < 0: f(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x < 0} x = -2$$

$$0 \leq x < 3: f(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x \geq 3: f(x) = x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$$

$$\xrightarrow{x \geq 3} x = 4$$

 پس مجموع طول نقاط برخورد برابر $4 = -2 + 2 + 4$ است.

۳ ۲۲

 با توجه به نمودار تابع f در صورت سؤال $f(-1) = -3$ و $f(2) = k$ است. پس با توجه به ضابطه تابع g داریم:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + f(x) & ; x > 0 \\ f^2(x) & ; x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} g(2) &= 1 + f(2) = 1 + k \\ g(-1) &= f^2(-1) = 9 \end{aligned}$$

 حالا با توجه به رابطه $g(-1) + g(2) = 14$ داریم:

$$9 + 1 + k = 14 \Rightarrow k = 4$$

۳ ۲۳

 ابتدا در مثلث قائم‌الزاویه AHC با کمک $\sin 60^\circ$ داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{4h^2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$$

۱ ۲۴

 اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

$$x = y + 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$P = 2(x + y) = 2(x + x - 3) = 4x - 6 \Rightarrow x = \frac{P + 6}{4}$$

$$S = xy = x(x - 3) \Rightarrow S(P) = \left(\frac{P + 6}{4}\right)\left(\frac{P + 6}{4} - 3\right)$$

$$\Rightarrow S(P) = \left(\frac{P + 6}{4}\right)\left(\frac{P - 6}{4}\right) = \frac{P^2 - 36}{16}$$

۲ ۲۵

 با توجه به شکل، نقاط $A(x, 4 - x^2)$

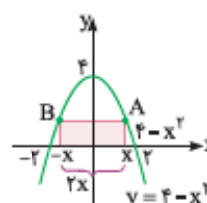
 و $B(-x, 4 - x^2)$ دو رأس مستطیل

 هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$

 و یک ضلع دیگر $4 - x^2$ است. بنابراین

مساحت مستطیل برابر است با:

$$f(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$$



۳ ۲۶

 با توجه به این که طول نقطه A برابر

 x و طول نقطه B برابر 6 است. پس

 $AB = 6 - x$ است. در ضمن نقطه

 D به طول x روی تابع $f(x) = \sqrt{x}$

 قرار دارد. پس $AD = \sqrt{x}$ است.

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(x) = AD \times AB = \sqrt{x}(6 - x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

۱ ۲۷

 اگر شعاع نیم دایره‌ها را x و طول مستطیل را L در نظر بگیریم از آن جایی که

 محیط استادیوم برابر 80π است، پس:

$$2L + 2\pi x = 80\pi$$

$$\Rightarrow L = 40\pi - \pi x$$

 حالا مساحت استادیوم را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$S = L(2x) + \pi x^2 = (40\pi - \pi x)(2x) + \pi x^2 = \pi x(80 - x)$$

۲ ۲۸

با توجه به قضیه تالس داریم:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC} \Rightarrow \frac{A - x}{A} = \frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{A} + 4$$

$$\Rightarrow S = xy = x\left(-\frac{x}{A} + 4\right) = -\frac{x^2}{A} + 4x$$

۴ ۲۹

 چون دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ است، پس $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های

معادله کسر هستند:

$$\begin{cases} x = -1 & : 1 - m + n = 0 \Rightarrow m - n = 1 \\ x = 2 & : 4 + 2m + n = 0 \Rightarrow 2m + n = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = -3$$

هابلایت

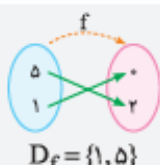
دامنه تابع

 به مجموعه ورودی‌های تابع f ، دامنه تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنه تابع



$$D_f = [2, 4]$$

 نمودار در دستگاه مختصات:
تصویر نمودار روی محور x ها


$$D_f = \{1, 5\}$$

 نمودارون (پیکانی):
مجموعه‌ای که از
اعضای آن، پیکان خارج شده

$$f = \{(1, 2), (5, 0)\} \Rightarrow D_f = \{1, 5\}$$

 زوج مرتبی:
مجموعه همه مؤلفه‌های اول

۲ ۳۱

و $x = b$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس مخرج کسر را به صورت $(x-b)(x-1)$ در نظر می‌گیریم:

$$(x-b)(x-1) = x^2 - (1+b)x + b$$

حالا این عبارت را با $x^2 - ax - 2$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} b = -2 \\ 1+b = a \Rightarrow a = -2+1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-2}{-1} = 2$$

۲ ۳۲

ریشه‌های مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$\|x|-1-2=0 \Rightarrow \|x|-1=2 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1=2 \Rightarrow |x|=3 \\ |x|-1=-2 \Rightarrow |x|=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

پس دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ است. یعنی دو عدد صحیح -3 و 3 در دامنه تابع حضور ندارند.

۲ ۳۳

باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$[x] - f(x) = 0 \Rightarrow [x] = f(x)$$

حالا با توجه به محدوده x داریم:

$$x > 0: [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$x = 0: [x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x < 0: [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

پس دامنه تابع f به صورت بازه $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup [2, +\infty)$ است که شامل ۳ عدد صحیح $-1, 0, 1$ نیست.

۱ ۳۴

باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و مخرج کسرها نیز صفر نباشد:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$$

پس دامنه این تابع فقط شامل عدد صحیح -1 است.

۲ ۳۵

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجه زوج را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$1) \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, 8]$$

$$2) \quad 16-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$$

پس $a = 2$ و $b = 8$ است. حالا مجموعه جواب نامعادله $|x-8| < 2$ را پیدا می‌کنیم:

$$-2 < x-8 < 2 \Rightarrow 6 < x < 10 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} x = 7, 8, 9$$

۲ ۳۶

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجه زوج (رادیکال‌های صورت کسر) باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$1) \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$2) \quad 6-x \geq 0 \Rightarrow 6 \geq x$$

هولایت

دامنه توابع معروف

برای تعیین دامنه تابع f با داشتن ضابطه آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱) دامنه تابع چند جمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۲) چون عبارت‌های کسری به ازای ریشه مخرج، تعریف نشده هستند؛ پس دامنه آن‌ها برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

۳) در رادیکال‌های با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$$y = \sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

۴) چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$y = x + \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

۵) چون $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین $(k \in \mathbb{Z})$:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

$$y = 5 + 2 \cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

۶) در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$$y = \log_{\circ} \Rightarrow \begin{cases} \circ > 0 \\ \circ > 0, \circ \neq 1 \end{cases}$$

$$y = \log_{(3-x)}(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 3-x > 0 \Rightarrow 3 > x \Rightarrow D_f = (1, 2) \cup (2, 3) \\ 3-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

🔥 هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطه تابع را ساده کنید.

🔥 در توابع چندضابطه‌ای، دامنه تابع از اجتماع دامنه همه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۲ ۳۷

مخرج کسر تابعی از درجه دوم است، بنابراین $x = -3$ ، ریشه مضاعف مخرج است و تابع مخرج کسر به صورت $3(x+3)^2$ می‌باشد:

$$3(x+3)^2 = 3x^2 + (2m-n)x + m+n$$

$$3x^2 + 18x + 27 = 3x^2 + (2m-n)x + m+n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-n = 18 \\ m+n = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 15 \\ n = 12 \end{cases} \Rightarrow mn = 180$$

۳۴۰

عبارت زیر رادیکال یک سهمی است که باید همواره نامنفی باشد، یعنی دلتای عبارت $x^2 - (m+1)x + 2 - m$ کوچکتر یا مساوی صفر است:

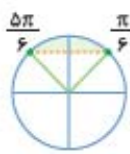
$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(2-m) \leq 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m - 7 \leq 0 \Rightarrow (m-1)(m+7) \leq 0 \Rightarrow -7 \leq m \leq 1$$

پس به ازای ۹ مقدار صحیح m دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۳۴۱

چون $1 - \sin x$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:



$$1 - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

بنابراین $D_f = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ است.

۳۴۲

چون $f(x) = 2^x$ است؛ پس $f(\frac{1}{x}) = 2^{\frac{1}{x}}$ بوده و برای تعیین دامنه تابع $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{1}{x})}$ داریم:

$$f(x) - f(\frac{1}{x}) \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$$

توجه سریع چون $x = 2$ در تابع صدق می‌کند، پس گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. در ضمن $x = -2$ در تابع صدق نمی‌کند؛ پس گزینه «۱» نیز حذف می‌شود.

۳۴۳

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

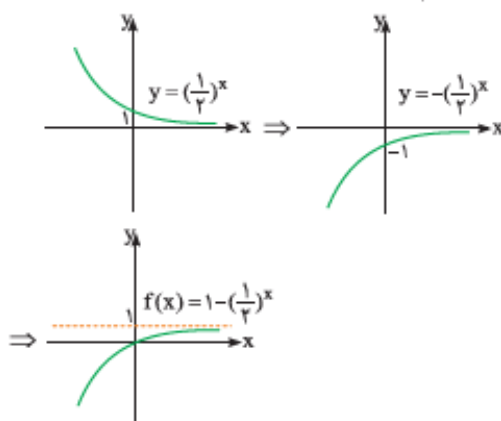
$$4^x - 2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2^{2x} \geq 2^{x-1} \Rightarrow 2x \geq x-1 \Rightarrow x \geq -1$$

در ضمن مخرج کسر نباید صفر باشد. به ازای $x > 0$ تابع $g(x)$ برابر ۱ است که باعث می‌شود مخرج کسر برابر صفر شود. پس آن را از دامنه تابع کنار می‌گذاریم:

$$D_f = [-1, 0)$$

۳۴۴

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ را رسم می‌کنیم:



در ضمن عبارت $\frac{x+1}{x-3}$ زیر رادیکال فرجه ۳ قرار دارد که شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند. حالا ریشه مخرج کسرها را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$$1) \frac{x+1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$2) x \neq 3$$

پس دامنه تابع به صورت $D_f = [-2, 6] - \{-1, 3\}$ است که مجموع عضوهای صحیح آن برابر است با:

$$(-2) + 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 16$$

۳۴۵

چون رادیکال در مخرج کسر قرار دارد، پس عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد (اما صفر نمی‌تواند باشد):

$$|x+2| - |x+5| > 0 \Rightarrow |x+2| > |x+5|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4x + 4 > x^2 + 10x + 25$$

$$\Rightarrow -21 > 6x \Rightarrow -\frac{21}{6} > x \Rightarrow -3\frac{1}{2} > x$$

دامنه تابع شامل سه عدد صحیح منفی $-3, -2, -1$ نیست.

۳۴۶

ابتدا تابع $f(-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{-x + |x - 2|}$$

برای تعیین دامنه تابع f ، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$-x + |x - 2| \geq 0 \Rightarrow |x - 2| \geq x$$

در ضمن می‌دانیم مجموعه جواب نامعادله $|U| \geq a$ از حل دو نامعادله $U \geq a$ و $U \leq -a$ به دست می‌آید:

$$|x - 2| \geq x \Rightarrow \begin{cases} \text{تفاضل} \\ x - 2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \\ x - 2 \leq -x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

۳۴۷

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$3x - |x^2 - 4x| \geq 0 \Rightarrow 3x \geq |x^2 - 4x|$$

حالا با توجه به ریشه‌های درون قدرمطلق داریم:

$$1) x \leq 0 \text{ یا } x \geq 4: 3x \geq x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 7x \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 7 \xrightarrow[\text{محدوده}]{\text{اشتراک با}} 4 \leq x \leq 7 \cup \{0\}$$

$$2) 0 < x < 4: 3x \geq -x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{یا} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{محدوده}]{\text{اشتراک با}} 1 \leq x < 4$$

از اجتماع بازه‌های به دست آمده از ۱ و ۲ دامنه تابع به صورت بازه

$$D_f = [1, 7] \cup \{0\}$$

است. پس بزرگترین عضو طبیعی دامنه برابر

$$x = 7 \text{ و کوچکترین عضو طبیعی آن } x = 1 \text{ است و نسبت آن‌ها برابر } \frac{7}{1} = 7 \text{ است.}$$

۴۸ ۱

ابتدا دامنهٔ لگاریتم را تعیین می‌کنیم:

$$۱) x^2 - 8x + 15 > 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) > 0 \Rightarrow x < 3 \text{ یا } x > 5$$

$$۲) x > 0 \text{ و } x \neq 1$$

حالا سراغ مخرج کسر می‌رویم:

$$4 - |3 - x| > 0 \Rightarrow |3 - x| < 4 \Rightarrow -4 < x - 3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7$$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $D_f = (0, 1) \cup (1, 3) \cup (5, 7)$ است. اعداد صحیح دامنهٔ تابع $x = 6$ و $x = 2$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۸ است.

۴۹ ۲

دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{2 - \log_2(x^2 - 8x)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۱) x^2 - 8x > 0 \Rightarrow x(x-8) > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 8$$

$$۲) 2 - \log_2(x^2 - 8x) \geq 0 \Rightarrow \log_2(x^2 - 8x) \leq \log_2 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x \leq 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x-9)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 9$$

با اشتراک (۱) و (۲) دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $[-1, 0) \cup (8, 9]$ به دست می‌آید که شامل ۲ عدد صحیح است.

۵۰ ۱

چون $P(x) = \frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج قرار دارد، پس باید نامنفی باشد، در ضمن با توجه به نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ داریم:

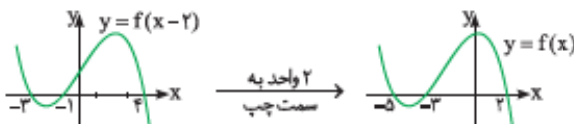
$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

x	-	+	+	+
$\log_{\frac{1}{2}} x$	-	-	+	-
$P(x)$	-	+	+	-

پس دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $(0, 1)$ می‌باشد که فاقد عدد صحیح است.

۵۱ ۴

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



حال برای تعیین دامنهٔ $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

$$\begin{cases} x \geq 0, f(x) \geq 0: \text{راست و بالای محور } x\text{ها} \\ x \leq 0, f(x) \leq 0: \text{چپ و پایین محور } x\text{ها} \end{cases} \Rightarrow$$

بنابراین دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $[-5, -3] \cup [0, 2]$ است.

پس می‌رسیم. از آن جایی که $f(-1)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

حال برای تعیین دامنهٔ $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

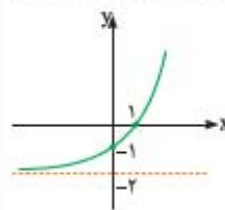
$$x \geq 0, f(x) \geq 0: \text{راست و بالای محور } x\text{ها}$$

$$x \leq 0, f(x) \leq 0: \text{چپ و پایین محور } x\text{ها}$$

$$\Rightarrow D = (-\infty, +\infty)$$

چون $x = 2$ و $x = -2$ در تابع صدق می‌کنند؛ پس گزینهٔ «۳» درست است.

۴۵ ۴



عبارت زیر رادیکال را به صورت

$$\frac{x}{x-2} \times f(x)$$

و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

با توجه به این‌که نمودار تابع

$$f(x) = 2^x - 2$$

است، داریم:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2} \times f(x)} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times f(x) \geq 0$$

$\frac{x}{x-2}$	+	-	-	+
$f(x)$	-	-	+	+
$\frac{x}{x-2} \times f(x)$	-	+	-	+

پس دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $(2, +\infty) \cup [0, 1]$ می‌باشد که شامل بی‌شمار عدد طبیعی می‌باشد.

۴۶ ۲

عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

حالا ریشهٔ مخرج کسر را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$$1 - \log_2(3-x) = 0 \Rightarrow \log_2(3-x) = 1 \Rightarrow 3-x = 2 \Rightarrow x = 1$$

پس دامنهٔ تابع به صورت $[-\frac{5}{2}, 1) \cup (1, 3)$ است.

۴۷ ۱

عبارت جلوی لگاریتم $\log_2(x^2 - x - 2)$ باید مثبت باشد:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2$$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

در ضمن مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^2 - 1} + 1$ همواره مثبت است و فاقد ریشهٔ حقیقی است. از اشتراک بازه‌های به دست آمده، دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $(2, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ است.

۵۵ ۱

باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$f(x)g(x) - g^2(x) \geq 0 \Rightarrow g(x)(f(x) - g(x)) \geq 0$$

ریشه‌های $g(x) = 0$ برابر $x = -3, 4$ هستند. در ضمن نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در دو نقطه $x = -2, 3$ متقاطع‌اند. پس ریشه‌های $f(x) - g(x) = 0$ برابر $x = -2, 3$ هستند. حالا جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	-3	-2	3	4
g(x)	-	+	+	-
f(x) - g(x)	+	+	-	+
g(x)(f(x) - g(x))	-	+	-	-

$$\Rightarrow D_y = [-3, -2] \cup [3, 4]$$

 مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه برابر $-3 + 4 = 1$ است.

۵۶ ۴

 بُرد تابع $y = \frac{1}{x} + 1$ برابر بازه $[\frac{5}{4}, \frac{5}{3}]$ است، پس:

$$0 \leq \frac{1}{x} + 1 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

 دامنه تابع شامل ۶ عدد صحیح $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ است.

هدایت

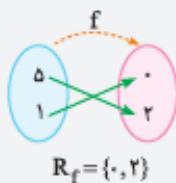
بُرد تابع

 به مجموعه خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن بُرد تابع



$$R_f = [1, 3]$$

 نمودار در دستگاه مختصات:
تصویر نمودار روی محور y ها


$$R_f = \{0, 2\}$$

 نمودار ون (پیکانی):
مجموعه‌ای که به
اعضای آن پیکان وارد شده

$$f = \{(1, 2), (2, 0)\} \Rightarrow R_f = \{0, 2\}$$

 زوج مرتبی:
مجموعه همه مؤلفه‌های دوم

۵۷ ۲

ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

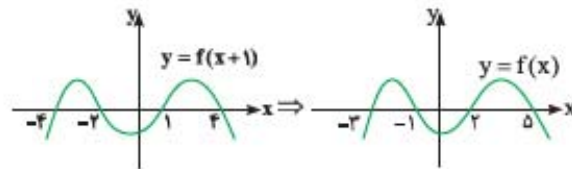
$$\sqrt{4-x} : 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \Rightarrow D_f = \{4\}$$

$$\sqrt{x-4} : x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

 پس تنها عضو دامنه تابع $\{4\}$ است. حالا بُرد تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(4) = 0 + 0 + 16 - 8 + 3 = 11$$

۵۲ ۴

 نمودار تابع $y = f(x+1)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست آید:

 حالا دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 + 4x + 3)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$(x^2 + 4x + 3)f(x) \geq 0$$

x	-3	-1	2	5
$x^2 + 4x + 3$	+	-	+	+
f(x)	-	+	-	+
$(x^2 + 4x + 3)f(x)$	-	+	-	+

 پس دامنه تابع به صورت $\{-3, -1\} \cup [2, 5]$ که شامل ۶ عدد صحیح است.

۵۳ ۱

 با توجه به این که در عبارت $P(x) = -\frac{f(x)}{f(2+x)}$ ریشه‌های صورت

 $x = -2, 0, 1$ می‌باشد، پس ریشه‌های مخرج $x = -4, -2, -1$ بوده و

 برای تعیین علامت $P(x)$ داریم:

x	-4	-2	-1	0	1
P(x)	-	+	-	+	-

$$\Rightarrow D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$$

 بنابراین دامنه تابع $g(x)$ شامل ۳ عدد صحیح $0, 1, 2$ است.

۵۴ ۲

 ابتدا دامنه تابع $f(x) = \log_2(x+3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

حالا عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. برای

تعیین علامت باید ریشه‌های صورت و مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} g(x) = 0 \Rightarrow x = -4, -3, 2, 4 \\ 2 - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \log_2(x+3) = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	-4	-3	1	2	4
g(x)	+	+	-	-	+
2 - f(x)	+	+	+	-	-
$\frac{g(x)}{2 - f(x)}$	+	+	-	+	-

 با توجه به دامنه تابع $f(x) = \log_2(x+3)$ ، دامنه تابع

 $y = \sqrt{\frac{g(x)}{2-f(x)}}$ برابر بازه $\{4\} \cup [1, 2]$ است که شامل دو عدد صحیح است.

چون $\sqrt{x^2+1} > 0$ است، پس $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ است و بُرد تابع f به صورت بازه $[2, +\infty)$ است که شامل عدد طبیعی ۱ نیست.

۲ ۶۳

می دانیم در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ دامنه تابع $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و بُرد آن $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

پس بُرد تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. حالا بُرد تابع

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$$

پس بُرد این تابع به صورت بازه $(0, 1]$ است.

۲ ۶۴

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2+7x+12}{x^2-16} = \frac{(x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{x+3}{x-4}, D_f = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$$

چون $x = -4$ جزء دامنه تابع نیست پس $f(-4) = \frac{1}{8}$ هم جزء بُرد تابع

نیست. از طرفی می دانیم بُرد تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت

$$\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$$
 است، بنابراین بُرد تابع f شامل دو عدد $\frac{1}{8}$ ، ۱ نیست.

$$R_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{8}, 1\}$$

۱ ۶۵

می دانیم $1 \leq \cos^2 x \leq 1$ است. در ضمن عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-\cos^2 x \geq 0 \Rightarrow \cos^2 x \leq 0$$

پس نتیجه می گیریم فقط $\cos^2 x = 0$ قابل قبول است. بنابراین:

$$f(x) = 2\sqrt{-\cos^2 x} = 2 \cdot 1 = 2$$

پس بُرد تابع f شامل یک عضو صحیح است: $R_f = \{2\}$

۳ ۶۶

می دانیم $-1 \leq \cos x \leq 1$ است، بنابراین:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \leq -\cos x \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 - \cos x \leq 4 \xrightarrow{-1} 0 \leq 1 - \cos x - 1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y \leq 3$$

پس بُرد تابع f شامل ۳ عدد طبیعی است.

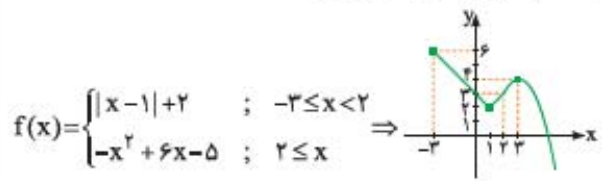
۲ ۶۷

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه ای می نویسیم:

$$y = \begin{cases} \frac{4x^2-6x}{x}; & x > 0 \\ \frac{-4x^2+6x}{x}; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 4x-6; & x > 0 \\ -4x+6; & x < 0 \end{cases}$$

۳ ۵۸

ابتدا نمودار تابع f را رسم می کنیم:



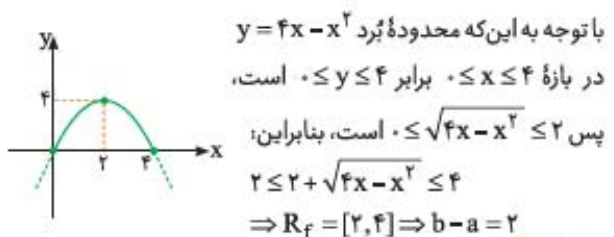
بنابراین بُرد تابع f برابر $(-\infty, 6]$ است.

۲ ۵۹

عبارت زیر رادیکال یعنی $4x - x^2$ باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

حالا به منحنی $y = 4x - x^2$ در بازه $0 \leq x \leq 4$ نگاه کنید:



با توجه به این که محدوده بُرد $y = 4x - x^2$

در بازه $0 \leq x \leq 4$ برابر $0 \leq y \leq 4$ است،

پس $0 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 2$ است، بنابراین:

$$2 \leq 2 + \sqrt{4x - x^2} \leq 4$$

$$\Rightarrow R_f = [2, 4] \Rightarrow b - a = 2$$

۴ ۶۰

عبارت زیر رادیکال، یک عبارت درجه دوم همواره مثبت است. پس

دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است. حالا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{(x+2)^2 + 3}$$

چون کمترین مقدار $(x+2)^2 + 3$ برابر ۳ است، پس:

$$R_f = [\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow \text{کمترین مقدار } a \text{ برابر } \sqrt{3} \text{ است}$$

۳ ۶۱

دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. حالا ضابطه f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

با توجه به این که $x^2 > 0$ است، پس $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ است و بُرد تابع

f برابر $[2, +\infty)$ است.

هائیلایت

جمع هر عبارت حقیقی با معکوسش به صورت زیر است:

$$1) x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$2) x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

$$1) \text{ به بهره دریگه! بُرد تابع } f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ کدام است؟}$$

$$2) \text{ به بهره دریگه! بُرد تابع } f(x) = |x| + \frac{1}{|x|+4} \text{ کدام است؟}$$

۱ ۶۲

ضابطه f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

۴ ۷۲

 دامنه تابع $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x}\right)$ را به دست می آوریم:

$$\frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x}{f} \begin{array}{c|ccc} -\infty & 0 & 2 & +\infty \\ \hline + & - & + & \end{array} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

حال دامنه هر یک از گزینه ها را مشخص می کنیم:

$$1) y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

$$2) y = \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\}$$

$$3) y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$4) y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

توجه: در $x = -2$ در تابع f صدق می کند، اما در «۲» صدق نمی کند از طرفی $x = 1$ در «۳» صدق می کند، اما در f صدق نمی کند.

۱ ۷۳

 برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:

 ۱) به ازای هر مقدار x با هم برابر باشند، پس به ازای $x = 2$ داریم:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2(2) + 4 = b \Rightarrow b = 8$$

۲) ضابطه هر دو تابع یکسان باشد، پس:

$$\frac{2x^2 + a}{x-2} = 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 + a = 2(x+2)(x-2) \Rightarrow a = -8$$

بنابراین $a + b = 0$ است.

۳ ۷۴

 برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:

 به ازای هر مقدار x دارای مقادیر y یکسان باشند. چون $x = 1$ در

$$\text{دامنه ضابطه } f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ وجود ندارد. پس } a = 1 \text{ بوده و به ازای}$$

$$x = 1 \text{ داریم: } f(1) = g(1) \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

۳ ۷۵

 دامنه تابع $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است. در نتیجه دامنه تابع

$$f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4} \text{ نیز باید برابر } \mathbb{R} - \{-2\} \text{ باشد، پس } x = -2$$

 ریشه مخارج تابع f نیز هست:

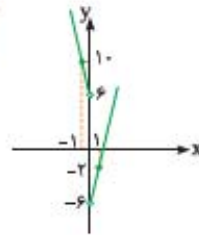
$$x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + 4 = -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

 از طرفی $x = -2$ باید ریشه صورت کسر تابع f نیز باشد تا صورت کسر تابع f نیز مانند تابع g برابر عدد ثابت باشد، پس:

$$x = -2 \Rightarrow b(-2) + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2}$$

حال برای آن که دو تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ و $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر باشند باید $c = 1$ باشد، پس $a + b + c = 4 + 1 + 1 = 6$ است.



حال نمودار هر قسمت را رسم می کنیم تا برد تابع مشخص شود. با توجه به نمودار برد این تابع برابر $(-6, +\infty)$ است.

۴ ۶۸

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

$$1) D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$$

$$2) D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$$

$$3) D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$$

$$4) D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f = g$$

هایلایت

برابری دو تابع:

 در حالت کلی دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

 ۱) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

 ۲) برای هر x از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

۱ ۶۹

به بررسی عبارت ها می پردازیم:

$$\text{الف) } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (1, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = D_g = [0, +\infty) \\ g(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

در گزینه «پ» دامنه هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است، اما مقدار تابع به ازای x های یکسان تفاوت دارد:

$$\text{پ) } \begin{cases} f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 2 \\ g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ت) } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{[x]} \Rightarrow [x] \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = \frac{[x]}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

۱ ۷۰

برای اینکه $|2x^2 + ax + 1| = 2x^2 + ax + 1$ باشد، لازم است که عبارت $2x^2 + ax + 1$ نامنفی باشد، یعنی دلتای آن کوچک تر یا مساوی صفر باشد ($\Delta \leq 0$).

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4(2)(1) \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

۴ ۷۱

$$\text{الف) } D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{x \mid x = \frac{k\pi}{2}\}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|, g(x) = x+1$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|, g(x) = \cos x$$

۲ ۸۱

ابتدا x را به $x - a$ تبدیل می‌کنیم. سپس b واحد از y کم می‌کنیم. معادله منحنی حاصل برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= (x - a)^2 - 6(x - a) + 10 - b \\ \Rightarrow y &= x^2 - 2ax + a^2 - 6x + 6a + 10 - b \\ \Rightarrow y &= x^2 - (2a + 6)x + a^2 + 6a + 10 - b \end{aligned}$$

با مقایسه ضابطه تابع $g(x)$ با معادله منحنی بالا داریم:

$$\begin{cases} 2a + 6 = 12 \\ a^2 + 6a + 10 - b = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $a + b = 3 + 3 = 6$ است.

۲ ۸۲

ابتدا x را به $-x$ و y را به $-y$ (قرینه نسبت به مبدأ مختصات) تبدیل می‌کنیم. سپس 4 واحد به y اضافه می‌کنیم. پس معادله منحنی حاصل برابر است با:

$$y = -(-x - 1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$$

حال محل برخورد منحنی اولیه و منحنی جدید را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{(x - 1)^2}_{x^2 - 2x + 1} &= -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

۱ ۸۳

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع f باشند، در انتقال افقی و عمودی تابع، عمل برخورد تابع با محور طول‌ها تغییر می‌کند.

چون توابع موجود در موارد الف و ب، دچار انتقال افقی و عمودی نشده‌اند، پس x_1 و x_2 صفرهای این توابع نیز هستند.

۱ ۸۴

ابتدا x را به $x - 3$ (۳ واحد به طرف x ‌های مثبت) تبدیل می‌کنیم و سپس 2 واحد از y کم می‌کنیم (۲ واحد به طرف y ‌های منفی):

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow y = -(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 5 - 2 \\ &= -(x^2 - 6x + 9) + 2(x - 3) + 3 = -x^2 + 8x - 12 \end{aligned}$$

برای پیدا کردن بازه‌ای که در آن نمودار بالای نیمساز ربع اول است، باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$x < -x^2 + 8x - 12 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 7x + 12}_{(x-3)(x-4)} < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۴ ۸۵

$$y = 4x - x^2 \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+2} g(x) = 4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

حال نقطه برخورد منحنی جدید با نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Rightarrow 4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow A(1, 3) &\Rightarrow |OA| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

۱ ۸۶

برای این که نمودار نسبت به محور x ‌ها قرینه شود، y را در منفی یک ضرب و برای انتقال آن به اندازه ۱۶ واحد به بالا، ۱۶ واحد به y اضافه می‌کنیم:

$$y = -(x^2 - 2x) + 16 = -x^2 + 2x + 16$$

۲ ۷۶

در تابع f چون $|x|$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$x|x| \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

نامنفی

دامنه تابع g نیز برابر $\mathbb{R}$ است. حال ضابطه این دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x|x|} \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{x^2} = |x| \xrightarrow{x \geq 0} x; x \geq 0$$

$$g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

به ازای $x \geq 0$ ضابطه g برابر $g(x) = x$ می‌شود، پس این دو تابع به ازای دامنه $[0, +\infty)$ با هم مساوی‌اند.

۴ ۷۷

می‌دانیم $f(x) = [x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر -1 است، پس:

$$f^2(x) = ([x] + [-x])^2 = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال همه ضابطه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\text{الف) } \sqrt{f(x)} = \sqrt{[x] + [-x]} = 0; x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{[x] + [-x]} = -1; x \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{پ) } f(-x) = [-x] + [x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

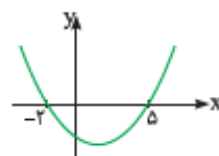
۲ ۷۸

طبق شکل صورت سؤال نمودار تابع $y = x^2$ ابتدا ۲ واحد به سمت راست منتقل شده، سپس نسبت به محور x ‌ها قرینه شده و در نهایت ۱ واحد به بالا منتقل شده:

$$\begin{aligned} y = x^2 &\xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = (x - 2)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(x - 2)^2 \\ &\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = -(x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

۳ ۷۹

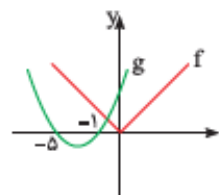
نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ محور x ‌ها را



در دو نقطه با طول‌های ۲ و ۵ قطع می‌کند، حال اگر این سهمی را حداقل ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم، طول نقاط تلاقی‌اش با محور x ‌ها منفی نیست.

۴ ۸۰

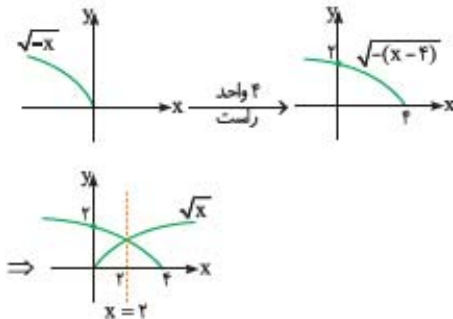
نمودار دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 6x + 5$ را در یک دستگاه



مختصات رسم می‌کنیم. مطابق شکل اگر نمودار g را حداقل ۵ واحد به سمت راست انتقال دهیم، طول نقطه مشترک آن با نمودار f نامنفی می‌شود.

۳ ۹۱

ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه کرده و سپس آن را ۴ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{-x+4}$ نسبت به خط $x=2$ تقارن دارند.

۳ ۹۲

ابتدا x را به $x-12$ تبدیل می‌کنیم و سپس ۲ واحد به y اضافه می‌کنیم تا منحنی $y = \sqrt{x-12} + 2$ به دست آید. حال برای پیدا کردن نقطه برخورد این منحنی با نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-12} + 2 &= \sqrt{x} \xrightarrow{\text{حل معادله}} \sqrt{16} = 4 \xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} (16, 4) \\ \text{پس فاصله نقطه برخورد از مبدأ مختصات برابر است با:} \\ \sqrt{16^2 + 4^2} &= \sqrt{4^2(16+1)} = 4\sqrt{17} \end{aligned}$$

۱ ۹۳

نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. چهارضلعی رنگی یک مربع به قطر ۲ بوده، پس طول ضلع آن برابر $\sqrt{2}$ است و مساحت آن برابر است با:



۲ ۹۴

برای این که نمودار ۴ واحد به چپ منتقل شود باید $x \rightarrow x+4$ تبدیل شود؛ همچنین برای این که نمودار را یک واحد به طرف y های مثبت انتقال دهیم کافیه یک واحد به y اضافه کنیم:

$$\begin{aligned} y &= \left| \frac{1}{4}x \right| - 2 \Rightarrow y = \left| \frac{1}{4}(x+4) \right| - 2 \Rightarrow \\ y &= \left| \frac{1}{4}x + 1 \right| - 2 + 1 \\ \text{بنابراین ضابطه نمودار جدید به صورت } y &= \left| \frac{1}{4}x + 2 \right| - 1 \text{ است.} \\ \text{حال برای به دست آوردن طول نقطه تقاطع نمودار جدید و نمودار} & \\ \text{اولیه داریم:} & \end{aligned}$$

$$y_{\text{new}} = y_{\text{first}} \Rightarrow \left| \frac{1}{4}x + 2 \right| - 1 = \left| \frac{1}{4}x \right| - 2 \xrightarrow{\text{جای گذاری گزینها}} x = -3$$

حال برای پیدا کردن طول نقطه برخورد نمودار جدید با نمودار اولیه داریم:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0 \\ \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x - 8}_{(x-4)(x+2)} &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

چون $x > 1$ است، پس $(4, 8)$ نقطه برخورد دو نمودار است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{4^2(1+4)} = 4\sqrt{5}$$

۲ ۸۷

با توجه به نمودار تابع، چون رأس سهمی روی محور عرض ها قرار دارد، پس ضریب x در ضابطه تابع باید برابر صفر باشد:

$$m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 18 \rightarrow A(0, 18)$$

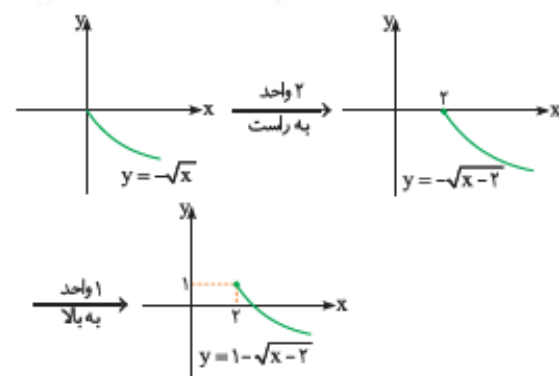
$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \begin{cases} B(-3, 0) \\ C(3, 0) \end{cases}$$

اکنون مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{6 \times 18}{2} = 54$$

۲ ۸۸

برای این که به نمودار داده شده برسیم، باید به ترتیب زیر عمل کنیم:



۱ ۸۹

با توجه به شکل، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ابتدا نسبت به محور y ها قرینه شده تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین منتقل شده، پس ضابطه این نمودار به صورت زیر است:

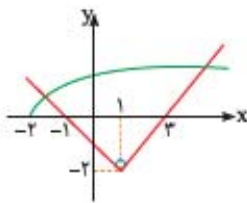
$$y = -2 + \sqrt{-(x-1)} = -2 + \sqrt{-x+1}$$

با مقایسه ضابطه به دست آمده و ضابطه صورت سؤال $a = -2$ و $b = 1$ بوده و $a \times b = -2$ است.

۲ ۹۵

ابتدا x را به $x+1$ (نمودار را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم) تبدیل می‌کنیم تا به $y = \sqrt{x+1+1} = \sqrt{x+2}$ برسیم. سپس نمودار را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -\sqrt{-x+2}$ به دست آید.

۹۷ ۲



برای رسم نمودار $f(x) = \sqrt{x+2}$ باید نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل کنیم و برای رسم نمودار $g(x) = |x-1| - 2$ باید نمودار $y = |x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین منتقل کنیم؛

با توجه به شکل، این نمودارها در ۲ نقطه متقاطع اند.

۹۸ ۱

به ترتیب تبدیل های زیر را انجام می دهیم:

$$\begin{aligned} y &= \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x \rightarrow x + \frac{3\pi}{4}} y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

از طرفی می دانیم $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ است، پس می توانیم ضابطه تابع حاصل را به صورت مقابل نمایش دهیم:

$$y = 2 + \sin x$$

۹۹ ۲

چون نقطه $(-5, 12)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد، پس $f(-5) = 12$ است. برای پیدا کردن نقطه معادل $(-5, 12)$ روی نمودار تابع g داریم:

$$g(-5) = -f(-5) - 2 = -(12) - 2 = -14$$

۱۰۰ ۳

چون نقطه $A(1, -5)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد، پس:

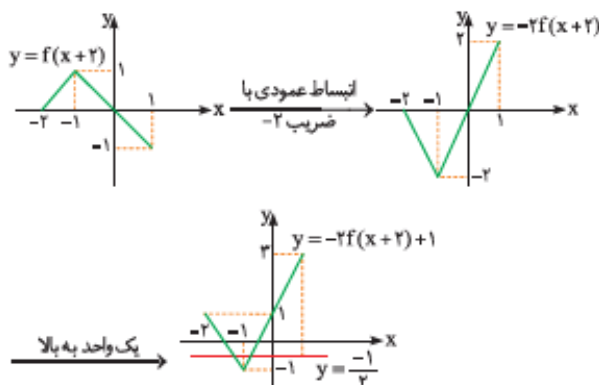
$$-5 = 3 - f(1) \Rightarrow f(1) = 8$$

حال برای یافتن نقطه نظیر A روی تابع $y = \frac{1}{3}f(x-2)$ داریم:

$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}f(3-2) = \frac{1}{3}f(1) = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}$$

پس نقطه $A'(3, \frac{8}{3})$ روی تابع $y = \frac{1}{3}f(x-2)$ قرار دارد.

۱۰۱ ۲



۹۵ ۴

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{۱ واحد}} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\frac{1}{x-1}$$

$$\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۲ واحد}} y = -2 - \frac{1}{x-1} = \frac{-2x+1}{x-1}$$

حال نقطه برخورد این منحنی را با نمودار تابع f پیدا می کنیم:

$$\frac{-2x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow -2x^2 + x = x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس این نمودارها در دو نقطه $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ و $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ متقاطع اند و فاصله هر یک از آن ها از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\begin{aligned} OA = OB &= \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

۹۶ ۳

چون f تابع همانی است، پس $\frac{1}{f} = \frac{1}{x}$ می باشد و داریم:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\text{۱ واحد به}} g(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$\xrightarrow{\text{قدر مطلق}} |g(x)| = \left| \frac{1}{x-a} \right| \xrightarrow[\text{سمت پایین}]{\text{۲ واحد به}} |g(x)| - 2 = \frac{1}{|x-a|} - 2$$

حال با توجه به این که نمودار حاصل با نمودار $\frac{1}{|f|}$ در $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ برخورد می کند داریم:

$$\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x-a|} - 2 \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right|} - 2$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt{2} = \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right|}$$

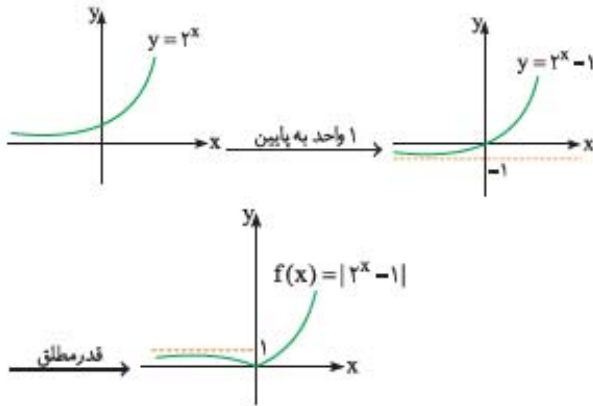
$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1 \xrightarrow{f(x+a)=3} \frac{1}{x + \sqrt{2} - 1} = \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = -\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{f(x+a)=3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2} - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{2} \\ x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 2 - \sqrt{2}$$

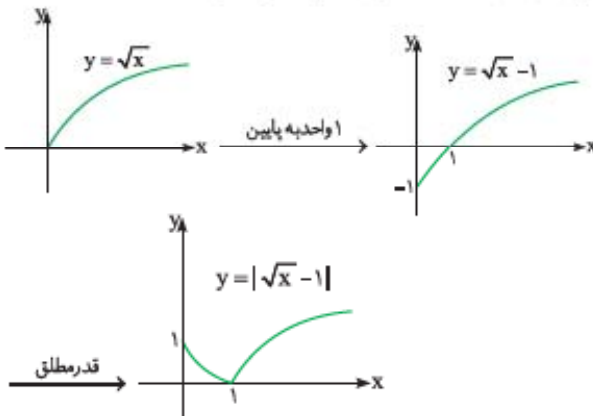
۱۵۵ ۳

ابتدا نمودار تابع $y = 2^x - 1$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌هایی که زیر محور x ‌ها قرار دارند را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



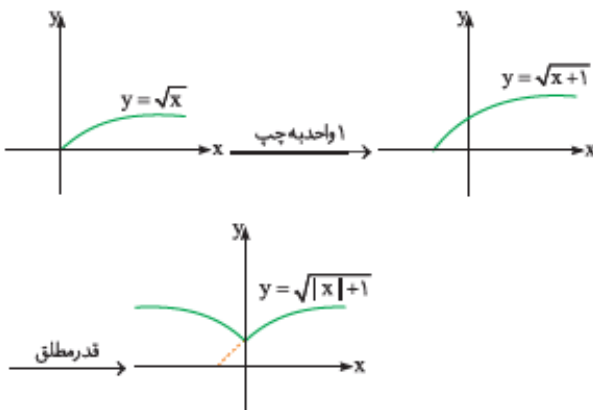
۱۵۶ ۲

نمودار تابع $y = \sqrt{x} - 1$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی که زیر محور x قرار دارند را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



۱۵۷ ۲

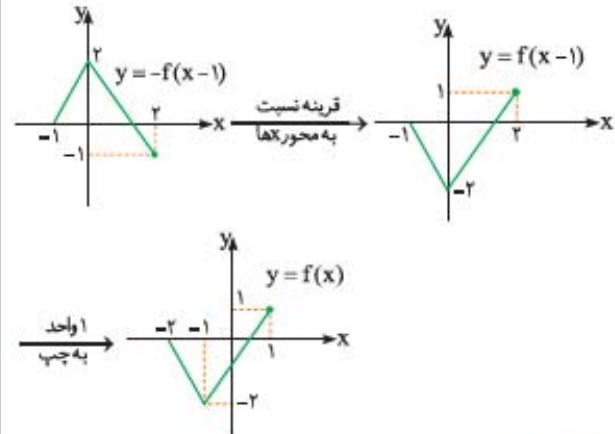
ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ را رسم کرده و قسمتی که در سمت چپ محور x است را حذف می‌کنیم؛ سپس قرینه قسمت باقی‌مانده را نسبت به محور y به دست آورده و آن را به نمودار اضافه می‌کنیم:



۱۵۲ ۲

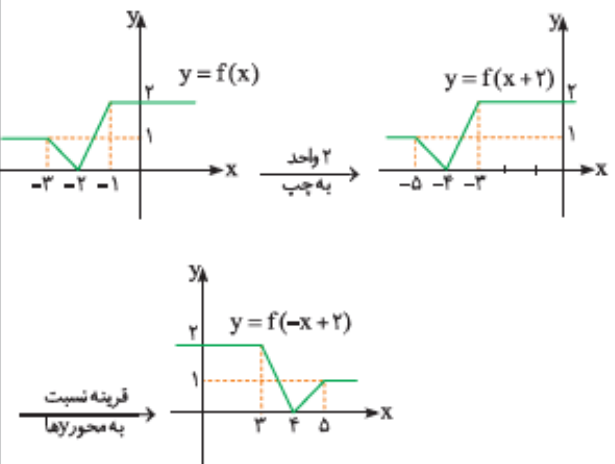
ابتدا نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(x-1)$ پدید آید.

سپس آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا به نمودار $f(x)$ برسیم:



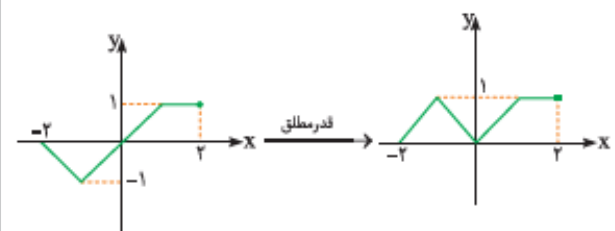
۱۵۳ ۲

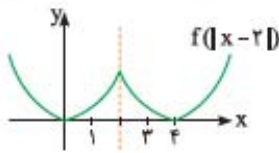
ابتدا نمودار تابع $y = f(x-1)$ را 1 واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(x)$ برسیم، سپس تغییرات را به ترتیب زیر اعمال می‌کنیم.



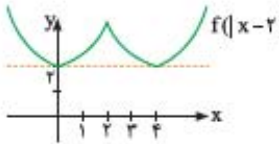
۱۵۴ ۲

قسمتی از نمودار که زیر محور x ‌ها قرار دارد را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:





سپس با حذف قسمت سمت چپ خط $x = 2$ ، قرینه قسمت باقی مانده در سمت راست را به آن اضافه می‌کنیم:



اکنون با ۲ واحد انتقال به سمت بالا، نمودار تابع $f(|x-2|)+2$ حاصل می‌شود:

۲ III

برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{x}{3})$ باید طول تمام نقاط را دو برابر و برای رسم نمودار $y=f(2x)$ باید طول تمام نقاط را نصف کنیم. پس نمودارهای گزینه (۲) به درستی رسم شده‌اند.

۲ III

تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$$y=(x+1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y=(x-1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 3x} y_{\text{new}}=(3x-1)^2$$

حال محل برخورد نمودار تابع $y=(x+1)^2$ و نمودار تابع جدید را مشخص می‌کنیم:

$$(x+1)^2=(3x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3x-1 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-(3x-1) \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

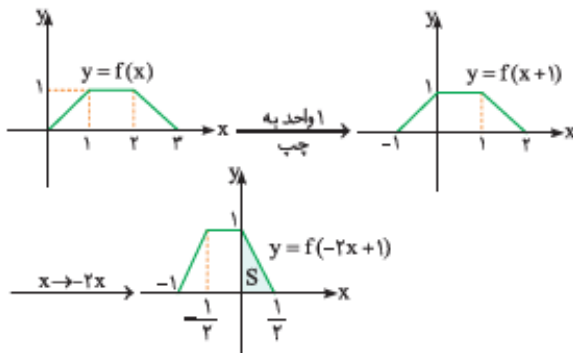
۳ III

$$y=|x| \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y=|x+1| \xrightarrow{\text{انقباض قائم با ضریب ۲}} y=2|x+1|$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y}} y=2|-x+1|=2|1-x|$$

۲ III

ابتدا نمودار را ۱ واحد به چپ منتقل می‌کنیم و سپس تغییرات را مرحله به مرحله مطابق شکل‌های زیر اعمال می‌کنیم:



در ناحیه اول دستگاه مختصات، یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم $\frac{1}{2}$ و ۱ ایجاد شده که مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1=\frac{1}{4}$$

۳ III

با توجه به نمودار، دامنه تابع $y=f(x)$ به صورت بازه $[-2, 4]$ است، پس برای به دست آوردن دامنه $y=3f(2x-1)+1$ داریم:

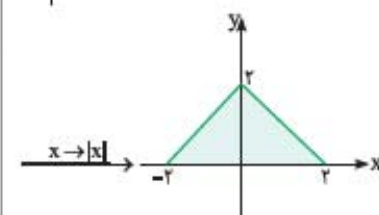
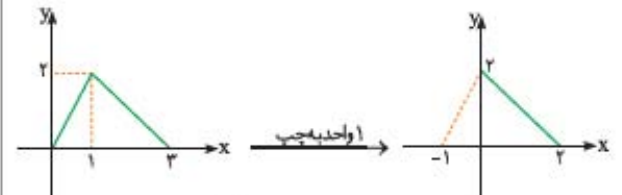
$$-2 \leq 2x-1 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 5 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

بنابراین دامنه این تابع به صورت بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ است و مقدار $b-a$ برابر است با:

$$\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}) = 3$$

۴ ۱۵۸

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=f(x+1)$ به دست آید. سپس قسمت‌هایی از نمودار که در سمت راست محور x قرار دارند را نگه داشته و قرینه آن نسبت به محور y را به آن اضافه می‌کنیم:

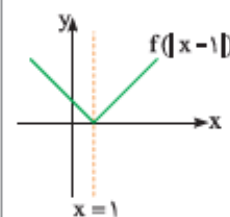
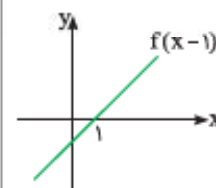


ناحیه محدود به محور x ‌ها و نمودار یک مثلث به قاعده ۴ واحد و ارتفاع ۲ واحد است و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2} \times 4 \times 2=4$$

۲ ۱۵۹

ابتدا به کمک نمودار داده شده، نمودار تابع $f(x-1)$ را رسم می‌کنیم:



اکنون با حذف قسمت سمت چپ خط $x=1$ ، قرینه قسمت باقی مانده در سمت راست را به آن اضافه می‌کنیم:

هابلایت

برای رسم $f(|x-\alpha|)$ ، با توجه به $f(x)$ مراحل زیر را انجام دهید.

۱ نمودار $f(x-\alpha)$ را رسم کنید.

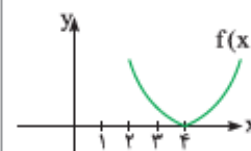
۲ قسمت سمت چپ $x=\alpha$ را حذف کنید.

۳ قرینه قسمت باقی مانده در سمت راست $x=\alpha$ را به آن اضافه کنید.

۲ ۱۶۰

ابتدا به کمک نمودار داده شده، نمودار

تابع $f(x-2)$ را رسم می‌کنیم:



۴ ۱۱۱

$$f(2x) = 3x + 1; 1 \leq x < 2 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} 2 \leq 2x < 4 \Rightarrow D_f = [2, 4)$$

$$g(x-1) = 1-x; 1 < x \leq 3 \xrightarrow{x \rightarrow x-1} 0 < x-1 \leq 2 \Rightarrow D_g = (0, 2]$$

دامنه تابع $f(x) + g(x)$ برابر است با:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [2, 4) \cap (0, 2] = \{2\}$$

۴ ۱۱۲

چون برد تابع $y = f(x)$ در بازه $[-4, 2]$ قرار دارد، پس مقادیر f در این بازه قرار دارند و انتقال و انقباض در راستای محور x تأثیری بر مقادیر f ندارد، پس:

$$-4 \leq f(2x-1) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}f(2x-1) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \frac{1}{2}f(2x-1) - 1 \leq 0$$

پس برد تابع $y = \frac{1}{2}f(2x-1) - 1$ به صورت بازه $[-3, 0]$ است که شامل ۴ عدد صحیح است.

۴ ۱۱۳

ابتدا ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$f(x) = mx + h = -2x + h \xrightarrow{f(-2)=7} -2(-2) + h = 7 \Rightarrow h = 3$$

اکنون اختلاف شیب و عرض از مبدأ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$h - m = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

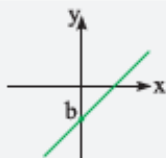
هابلایت

تابع خطی

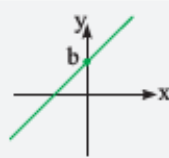
به هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ تابع خطی می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان‌دهنده عرض از مبدأ است. نمودار توابع خطی $y = ax + b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

نمودار تابع $y = ax + b$ در حالت‌های مختلف

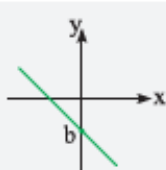
$$a > 0, b < 0$$



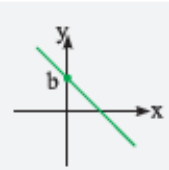
$$a > 0, b > 0$$



$$a < 0, b < 0$$

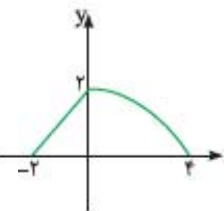
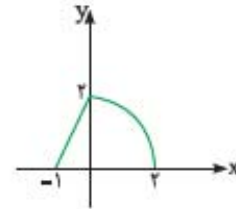
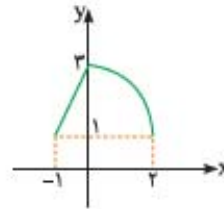


$$a < 0, b > 0$$



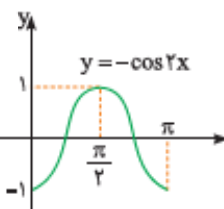
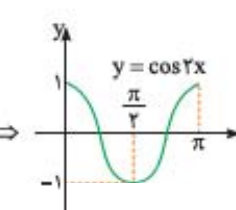
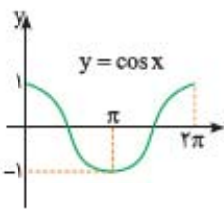
۳ ۱۱۶

ابتدا نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(2x)$ برسیم و سپس طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم (x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل می‌کنیم) تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید:



۲ ۱۱۷

نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم و تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:



۲ ۱۱۸

در ابتدا x را به $2x$ [نصف کردن طول تمام نقاط تابع] و سپس به y های یک واحد اضافه می‌کنیم [واحد به طرف یاهای مثبت] و در آخر y را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$1) y = \cos 2x \Rightarrow 2) y = 1 + \cos 2x \Rightarrow 3) y = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

از طرفی طبق رابطه طلایی در مثلثات، می‌دانیم $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x$ است.

۲ ۱۱۹

چون دامنه تابع $y = 2f(x) + 1$ برابر بازه $[-1, 1]$ است، پس $-1 \leq x \leq 1$ و برای تعیین دامنه $y = f(2x + 1)$ داریم:

$$-1 \leq 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

۳ ۱۲۰

دامنه تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت بازه $(-4, 6)$ است، پس $-4 < x < 6$ و در این تابع داریم:

$$-4 < x < 6 \Rightarrow -8 < 2x < 12$$

حال در تابع $y = 2 - f(\frac{x}{2} + 1)$ خواهیم داشت:

$$-8 < \frac{x}{2} + 1 < 12 \Rightarrow -9 < \frac{x}{2} < 11 \Rightarrow -18 < x < 22$$

۲ ۱۱۸

ابتدا ضابطه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -x - 1, \quad g(x) = 2x + 5$$

عرض نقطه A برابر ۵ است و روی تابع f واقع شده است. مختصات نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 5 \Rightarrow -x - 1 = 5 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6 \rightarrow A(-6, 5)$$

طول نقطه B برابر ۱ و روی تابع g واقع شده است. مختصات نقطه B را به دست می‌آوریم:

$$g(1) = 2(1) + 5 = 7 \rightarrow B(1, 7)$$

اکنون فاصله AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(1 - (-6))^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

۱ ۱۱۹

با فرض $f(x) = ax + b$ داریم:

$$f(f(x) + 3) = a(f(x) + 3) + b = af(x) + 3a + b$$

$$= a(ax + b) + 3a + b = a^2x + ab + 3a + b$$

در ضمن طبق صورت سؤال $f(f(x) + 3) = x + 5$ است، پس:

$$1) a^2x = x \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

$$2) ab + 3a + b = 5 \Rightarrow b + 3 + b = 5 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین $f(x) = x + 1$ می‌باشد و $f(6) = 7$ است.

۴ ۱۲۰

چون تابع f یک تابع ثابت است، پس باید ضریب x و ضریب x^2 برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} m + 2 = 0 \\ n - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -6$$

حاصل $f(1/75) = -6$ است.

۳ ۱۲۱

چون تابع f یک تابع همانی است، باید مقدار مولفه اول و مولفه دوم هر زوج مرتب آن با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow f = \{(1, 1), (5, 5), (4, 4)\}$$

حاصل $f(\sqrt{a^2 + b^2})$ برابر است با:

$$f(\sqrt{a^2 + b^2}) = f(\sqrt{25}) = f(5) = 5$$

۱ ۱۲۲

تابع f یک تابع همانی است، بنابراین ضابطه آن به صورت $f(x) = x$ است. همچنین چون تابع g یک تابع ثابت است، می‌توانیم ضابطه آن را به صورت $g(x) = k$ در نظر بگیریم.

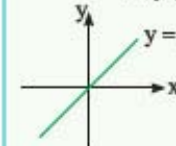
به کمک رابطه داده شده داریم:

$$2g^2(3) - f(5)g(5) + f(2) = 0 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

اکنون حاصل $f(g(6) + 1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(g(6) + 1) = g(6) + 1 = \begin{cases} k = 2 \rightarrow g(6) + 1 = 3 \\ k = \frac{1}{2} \rightarrow g(6) + 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع همانی می‌گویند.



توجه کنید خط $y = x$ نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات است.



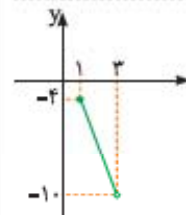
اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع ثابت می‌گویند.

۲ ۱۲۴

چون تابع f یک تابع خطی است، باید شیب محاسبه شده با استفاده از هر دو نقطه این تابع، مقدار یکسانی داشته باشد:

$$\frac{0 - (m - 1)}{2 - 1} = \frac{0 - (m + 3)}{2 - (-3)} \Rightarrow \frac{-m + 1}{1} = \frac{-m - 3}{5} \Rightarrow -5m + 5 = -m - 3 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

۴ ۱۲۵



تابع خطی با دامنه $[1, 3]$ و برد $[-4, 1]$ تنها به صورت زیر قابل رسم است. اکنون به کمک نمودار، ضابطه تابع را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{-1 - (-4)}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\Rightarrow y - (-4) = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x - 1$$

مقدار تابع در $x = \frac{4}{3}$ برابر است با:

$$-3\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = -5$$

۱ ۱۲۶

اگر تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم، به کمک رابطه داده شده داریم:

$$f(x) + f(2x) + 3 = 3x - 3 \Rightarrow ax + b + a(2x) + b + 3 = 3x - 3$$

$$= 3x - 3 \Rightarrow ax + b + 2ax + b + 3 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow 3ax + 2b + 3 = 3x - 3 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 2b + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه f به صورت $f(x) = x - 3$ است.

اکنون حاصل $f(f(0)) = f(-3) = -6$ را به دست می‌آوریم:

۳ ۱۲۷

چون f یک تابع خطی است، پس ضریب x^2 باید برابر صفر شود:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \rightarrow f(x) = 4x + \frac{5}{3}$$

اکنون حاصل $f(1) + f(-2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(1) + f(-2) = 4(1) + \frac{5}{3} + 4(-2) + \frac{5}{3} = -4 + \frac{10}{3} = \frac{-2}{3}$$

۱۳۷ ۴

چون تابع $f(x)$ یک چند جمله‌ای است، باید توان‌های متغیرهای آن، اعداد حسابی (W) باشد، داریم:

$$1) (n-3) \in W \Rightarrow n-3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$$

$$2) \frac{2n+3}{n} \in W \Rightarrow \left(\frac{2n}{n} + \frac{3}{n}\right) \in W$$

$$\Rightarrow \left(2 + \frac{3}{n}\right) \in W \Rightarrow \begin{cases} n=1 & \times \\ n=3 & \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = x^3 + x^3 - 2 + 1 + 3 = 2x^3 + 2$ است.

اکنون حاصل $f(3)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(3) = 2(3)^3 + 2 = 56$$

۱۳۸ ۱

فقط در الف عبارت صورت و مخرج کسر چند جمله‌ای است؛ پس فقط این گزینه مربوط به تابعی گویا است. در عبارت b تابع شامل قدرمطلق است و در عبارت p در صورت کسر $\sqrt{x}$ وجود دارد.

هابلایت

نواع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست، یعنی $Q(x) \neq 0$. پس دامنه آن‌ها به صورت زیر است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

۱۳۹ ۳

در توابع گویا باید صورت و مخرج کسر چند جمله‌ای باشند، پس $k=0$

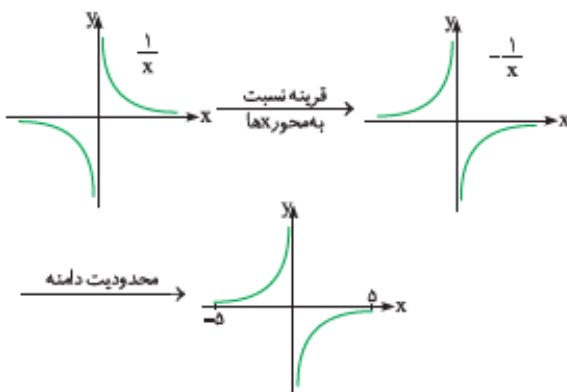
$$\text{است و } f(x) = \frac{x^2}{x-2} \text{ می‌باشد. پس:}$$

$$f(f(1) + 4) = f(-1 + 4) = f(3) = 9$$

۱۴۰ ۴

ابتدا نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ و سپس نمودار تابع $y = \frac{-1}{x}$ را به کمک قوانین انتقال رسم می‌کنیم.

در آخر برای رسم تابع $f(x)$ ، دامنه تابع $y = \frac{-1}{x}$ را در بازه $\{ \} - [-5, 5]$ محدود می‌کنیم:



۱۳۳ ۳

چون f و g ثابت هستند، پس باید ضریب x در آن‌ها صفر باشد:

$$f(x) = b - 3ax \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow f + g = 5$$

$$g(x) = c - (3b - 3)x \Rightarrow 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow bc = 4$$

۱۳۴ ۳

چون f تابعی ثابت است، پس ضریب x و x^2 برابر با صفر هستند:

$$f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2 = abx - ax^2 - 2x + 2b - 7x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (-a - 7)x^2 + (ab - 2)x + 2b \Rightarrow \begin{cases} -a - 7 = 0 \Rightarrow a = -7 \\ ab - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{-7} \end{cases}$$

پس $f(x) = -\frac{4}{7}$ است و تنها عضو برد آن $-\frac{4}{7}$ است.

۱۳۵ ۲

چون تابع f دارای برد تک‌عضوی است، بنابراین تابع f یک تابع ثابت است.

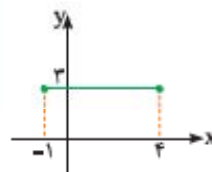
پس باید ضریب x و ضریب x^2 برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \rightarrow f(x) = -c + 4$$

از طرفی برد تابع f ، برابر $\{1 + 2c\}$ است:

$$-c + 4 = 1 + 2c \Rightarrow c = 1 \rightarrow f(x) = 3$$

مطابق شکل، سطح زیر نمودار در فاصله $[-1, 4]$ ، برابر $5 \times 3 = 15$ است.



۱۳۶ ۴

با در نظر گرفتن جمله پرتوان هر گزینه، درجه تابع را به دست می‌آوریم:

$$1) x(x^2) + (x^3)(x) = x^3 + x^4 \rightarrow 4 \text{ درجه}$$

$$2) (x)(x)(x)(x) = x^4 \rightarrow 4 \text{ درجه}$$

$$3) ((2x)(x))^2 + 3x^2 + x = 4x^4 + 3x^2 + x \rightarrow 4 \text{ درجه}$$

$$4) (x^3) + (x)(x)(x) = x^3 + x^3 \rightarrow 3 \text{ درجه}$$

بنابراین درجه چند جمله‌ای گزینه ۴ با سایر گزینه‌ها متفاوت است.

هابلایت

توابع چند جمله‌ای

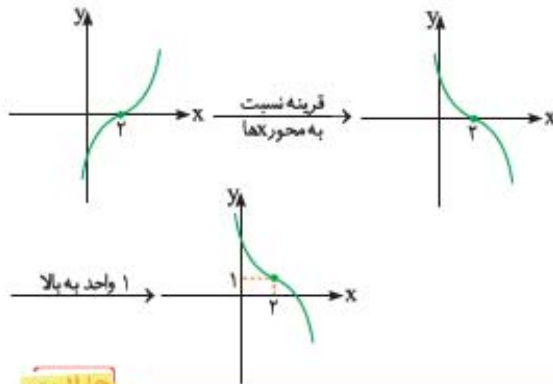
هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq 0$ و همه ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامند. مثلاً تابع $y = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ یک چند جمله‌ای درجه ۲ است، اما تابع $y = x^2 + \sqrt{2x} + 1$ چند جمله‌ای نیست.

چند ویژگی

- ۱) برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.
- ۲) درجه تابع ثابت $f(x) = c$ برابر صفر است.
- ۳) درجه تابع خطی $f(x) = mx + b$ برابر ۱ است.
- ۴) درجه تابع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است.

۱۴۵ ۲

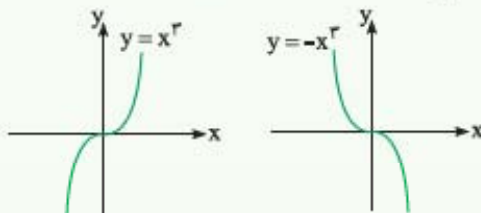
نمودار تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و با کمک قوانین تبدیل تابع، داریم:



هیلایت

تابع درجه سوم

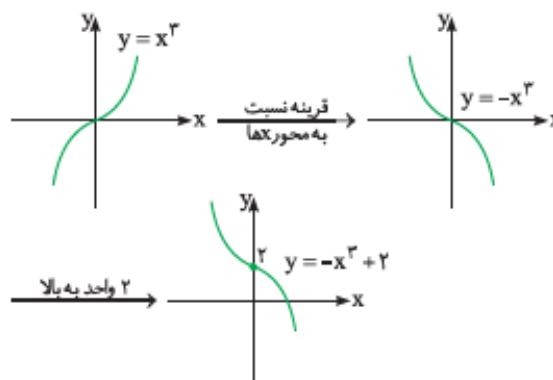
هر تابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با شرط $a \neq 0$ ، یک تابع درجه ۳ است. دامنه و بُرد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $y = x^3$ و $y = -x^3$ به صورت زیر است:



تنها صفر این تابع نقطه $x = 0$ است. یعنی نمودار تابع فقط در نقطه $x = 0$ محور x ها را قطع می‌کند.

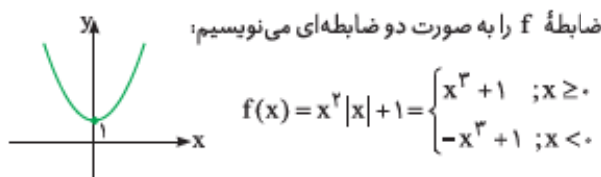
۱۴۶ ۲

در نمودار داده شده، نمودار تابع $y = -x^3$ ، ۲ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا منتقل شده است، پس $a = 2$ ، $b = 1$ است. پس $y = -bx^3 + a$ به صورت $-x^3 + 2$ است و نمودار آن به صورت زیر است:



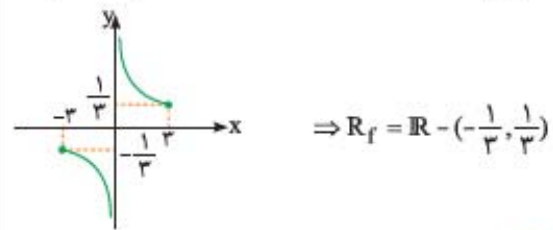
۱۴۷ ۴

ضابطه f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:



۱۴۹ ۲

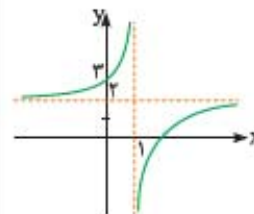
نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در دامنه $\{0\} - [-3, 3]$ رسم می‌کنیم:



۱۴۲ ۳

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم و سپس به کمک تابع $y = \frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2x-2-1}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$



مطابق شکل، نمودار تابع از ناحیه ۳ گذر نمی‌کند.

۱۴۳ ۲

چون نمودار تابع در مقایسه با نمودار تابع $\frac{1}{x}$ ، نسبت به محور x ها قرینه نشده است، می‌توانیم ضریب انبساط عمودی k را مثبت در نظر بگیریم. با اعمال تغییرات زیر بر روی تابع $\frac{1}{x}$ ، نمودار تابع داده شده حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[k>0]{\text{انبساط عمودی}} \frac{k}{x} \xrightarrow[\text{آلفی به راست}]{\text{یک واحد انتقال}} \frac{k}{x-1} \xrightarrow[\text{عمودی به بالا}]{\text{دو واحد انتقال}} \frac{k}{x-1} + 2$$

ضابطه به دست آمده، باید با ضابطه تابع f برابر باشد:

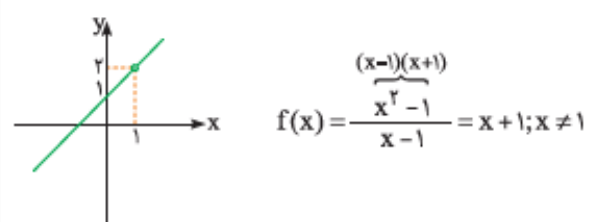
$$f(x) = \frac{mx-1}{x-n} = \frac{k}{x-1} + 2 \Rightarrow \frac{mx-1}{x-n} = \frac{2x+k-2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ k-2=-1 \Rightarrow k=1 \\ n=1 \end{cases}$$

بنابراین حاصل $mn = 2 \times 1 = 2$ است.

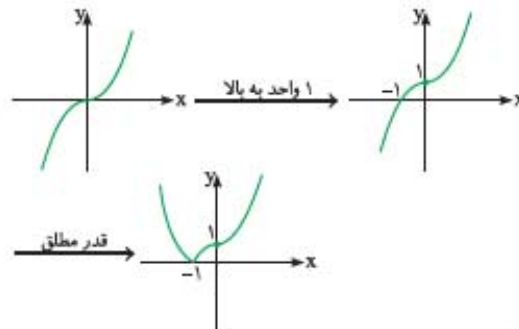
۱۴۴ ۱

به ازای $x = 1$ مخارج کسر صفر می‌شود، پس $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بنابراین:



۱ ۱۴۸

ابتدا نمودار $y = x^3 + 1$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌هایی که زیر محور x ها قرار دارند را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



۲ ۱۴۹

ابتدا ضابطه نمودار داده شده در شکل صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$y = f(x) - xg(x) = ax + b - x(x^2 - 6x + c)$$

$$= -x^3 + 6x^2 + (a - c)x + b$$

پس شکل صورت سؤال از انتقال و قرینه‌یابی نمودار $y = x^3$ به دست آمده است. بنابراین با توجه به قوانین انتقال، این نمودار مربوط به $y = 3 - (x - 2)^3$ است:

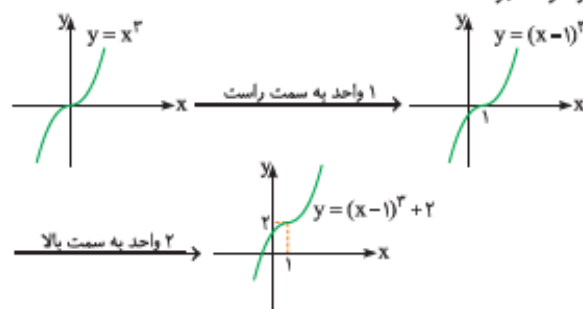
$$y = 3 - (x - 2)^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$$

با مقایسه این ضابطه با ضابطه $y = -x^3 + 6x^2 + (a - c)x + b$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a - c = -12 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow a + b - c = (a - c) + b = -12 + 11 = -1$$

۴ ۱۵۰

ضابطه تابع داده شده را با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای می‌توانیم به صورت $y = (x - 1)^3 + 2$ بنویسیم. بنابراین روند رسم نمودار به صورت زیر خواهد بود:



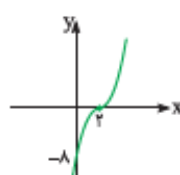
مطابق شکل، نمودار از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

۱ ۱۵۱

ابتدا به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 8 - m = (x - 2)^3 + 8 - m$$

حال نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار $8 - m$ رسم می‌کنیم:



برای این که این نمودار از ناحیه چهارم عبور نکند، باید آن را حداقل ۸ واحد به بالا منتقل کنیم:

$$8 - m \geq 8 \Rightarrow -m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$$

۴ ۱۵۲

ابتدا ضابطه تابع اولیه را به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای ساده می‌کنیم:

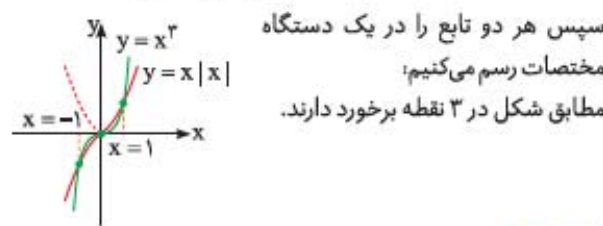
$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = (x - 1)^3 + 1$$

پس باید این نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم تا به نمودار $y = x^3 + 1$ برسیم و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.

۳ ۱۵۳

ابتدا تابع $y = x|x|$ را به ازای ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

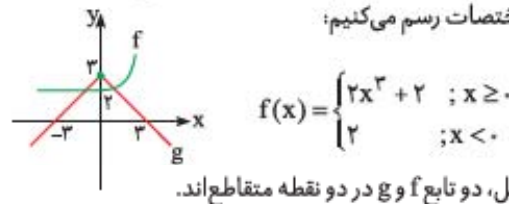


سپس هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

مطابق شکل در ۳ نقطه برخورد دارند.

۲ ۱۵۴

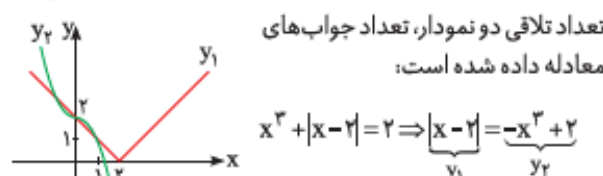
ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم و سپس نمودار دو تابع f, g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند.

۳ ۱۵۵

برای به دست آوردن تعداد جواب‌های معادله، باید نمودار دو تابع $y_1 = |x - 2|$ و $y_2 = -x^3 + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرد.



تعداد تلاقی دو نمودار، تعداد جواب‌های معادله داده شده است:

$$x^3 + |x - 2| = 2 \Rightarrow \underbrace{|x - 2|}_{y_1} = \underbrace{-x^3 + 2}_{y_2}$$

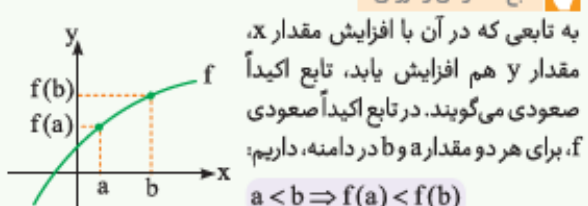
مطابق شکل، دو نمودار در ۳ نقطه تلاقی دارند، بنابراین معادله داده شده، دارای ۳ جواب است.

۳ ۱۵۶

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه صعودی برابر $[4, 8]$ و بزرگ‌ترین بازه نزولی برابر $[1, 3]$ است. بنابراین مقدار $a + d$ برابر $4 + 3 = 7$ است.

میانبر

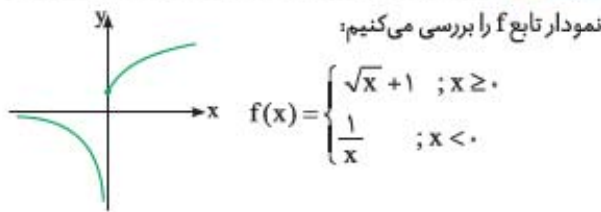
تابع صعودی و نزولی



به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش یابد، تابع اکیداً صعودی می‌گویند. در تابع اکیداً صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

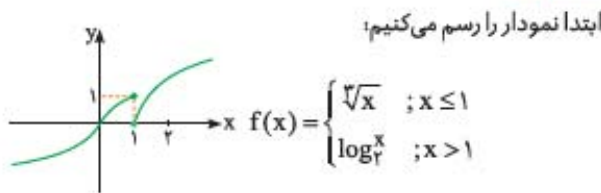
$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

۱۵۰ ۳



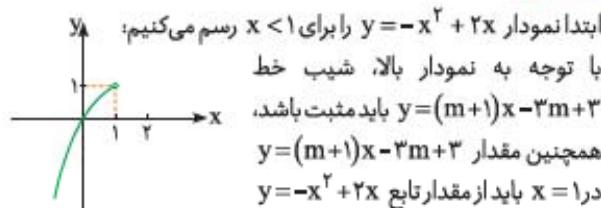
با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ یک‌به‌یک است؛ اما از آن جایی که ابتدا نزولی و سپس صعودی بوده، پس غیریک‌نواست.

۱۵۱ ۳



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty, 1]$ و $(1, +\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه اکیداً صعودی است.

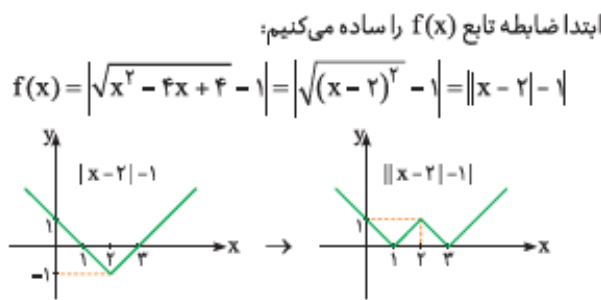
۱۵۲ ۴



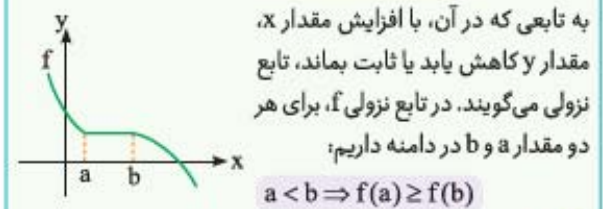
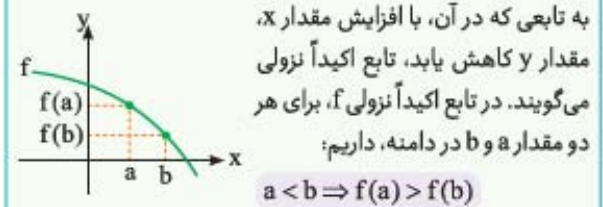
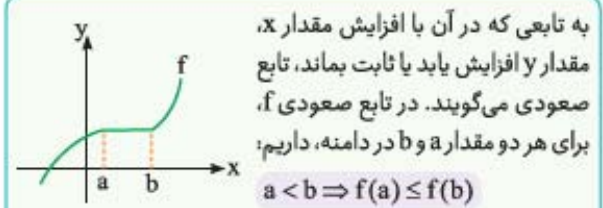
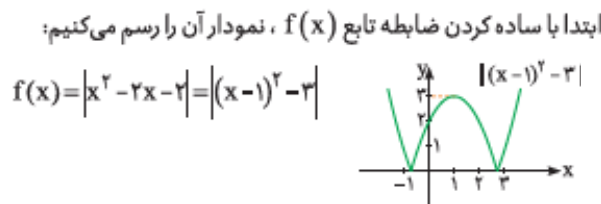
$$\begin{cases} m+1 > 0 & \Rightarrow m > -1 \\ x=1: (m+1) - 3m + 3 \geq -(1)^2 + 2(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in (-1, 1.5]$$

۱۵۳ ۲



۱۵۴ ۲



کلمه اکید نشان می‌دهد تابع در هیچ بازه‌ای ثابت نیست. اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک است، اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد. تابع ثابت $y = k$ ، تنها تابعی است که در هر بازه هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. بنابراین یک تابع یکنوا است.

۱۵۷ ۲

تعریف آورده شده در صورت سوال، مربوط به تعریف تابع اکیداً نزولی است. بنابراین در تابع $f(x)$ ، به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که تابع در آن اکیداً نزولی باشد. طول رأس سهمی برابر $2 = \frac{-(-8)}{2(2)} = x_8$ و دهانه سهمی رو به بالا است. بنابراین تابع در بازه $(-\infty, 2]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن اکیداً نزولی است.

۱۵۸ ۳

چون بازه $[1, +\infty)$ بزرگترین بازه اکیداً نزولی برای تابع $f(x)$ است، پس طول رأس سهمی برابر ۱ و دهانه سهمی رو به پایین است:

$$\begin{cases} x_8 = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 6}{2(\frac{m}{2})} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 6}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 6 = m \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases} \\ \frac{m}{2} < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases}$$

با توجه به منفی بودن مقدار m ، تنها $m = -2$ قابل قبول است.

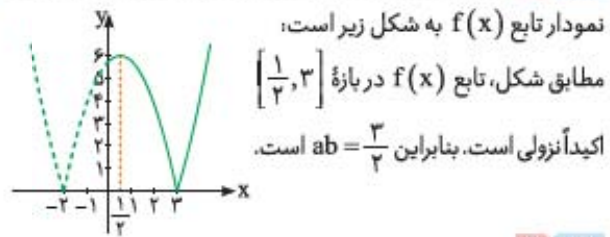
۱۵۹ ۲

چون تابع f در بازه $[-3, 2]$ غیر یکنواست، پس طول رأس سهمی در این بازه قرار دارد:

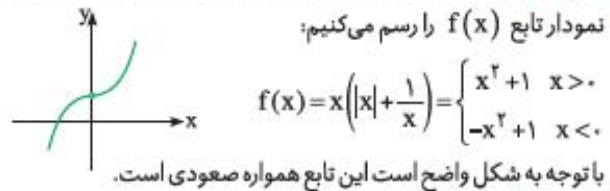
$$\begin{aligned} -3 < -\frac{b}{2a} < 2 & \Rightarrow -3 < -\frac{m^2 - 1}{-4} < 2 \Rightarrow -12 < m^2 - 1 < 8 \\ \Rightarrow -11 < m^2 < 9 & \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow |m| < 3 \end{aligned}$$

همواره برقرار

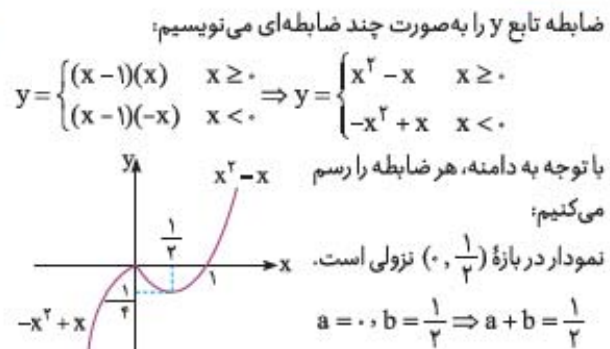
۱ ۱۵۵



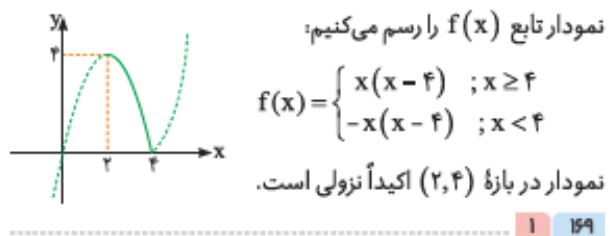
۲ ۱۵۶



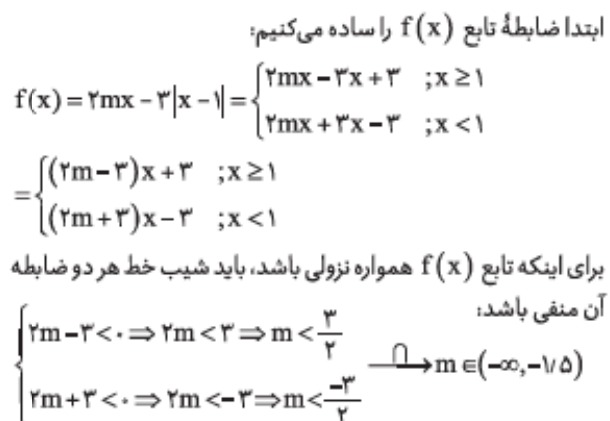
۲ ۱۵۷



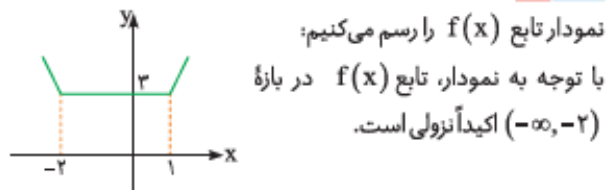
۳ ۱۵۸



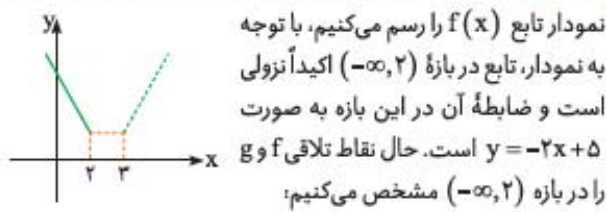
۱ ۱۵۹



۱ ۱۶۰



۱ ۱۶۱



$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $2x^2 + x - 15$ عدد ۲ را در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)(2x - 5) = 0$$

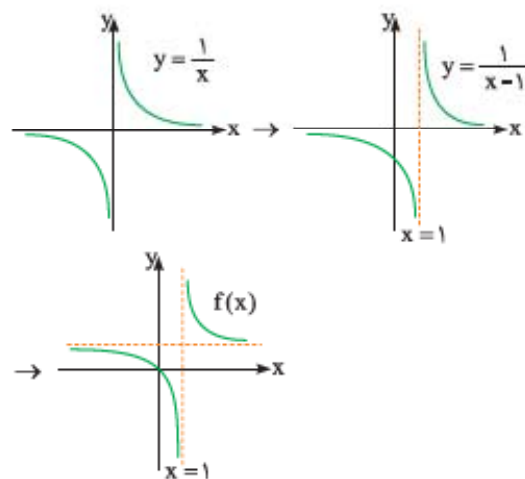
$$x = -\frac{5}{2}, x = \frac{5}{2}$$

چون $x < 2$ است، پس فقط $x = -\frac{5}{2}$ قابل قبول است.

۲ ۱۶۲

با توجه به صورت سوال، باید به دنبال بازه‌ای باشیم که تابع $f(x)$ در آن اکیداً نزولی باشد. ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$



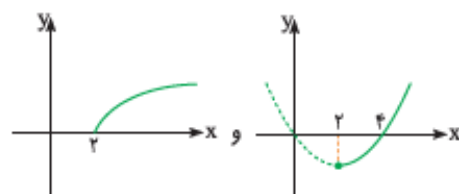
مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $[-2, 0)$ اکیداً نزولی است.

۱ ۱۶۳

ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. چون $x - 2$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

از طرفی تابع $f(x)$ از مجموع دو تابع $y_1 = \sqrt{x-2}$ و $y_2 = x^2 - 4x$ تشکیل شده که هر دوی آن‌ها در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند:



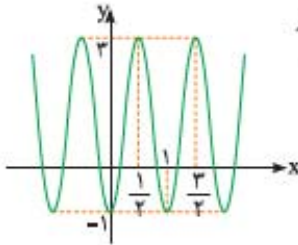
پس تابع f که از جمع دو تابع اکیداً صعودی به وجود آمده نیز تابعی اکیداً صعودی است.

۱۷۹ ۲

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده کرده و آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 1 + 2 \cos(2\pi x - \pi) = 1 + 2 \cos(\pi - 2\pi x) = 1 - 2 \cos(2\pi x)$$

با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه $[1, 1/5]$ اکیداً صعودی است.

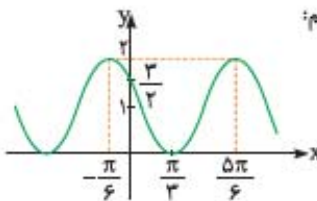


۱۸۰ ۱

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{6})$$

$$= 1 + \cos(2x + \frac{\pi}{3})$$



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ اکیداً صعودی است.

۱۸۱ ۳

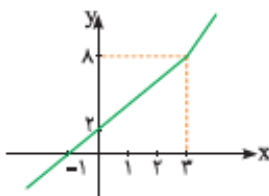
چون تابع $f(x)$ هم صعودی و هم نزولی است، پس باید نمایانگر یک تابع ثابت باشد:

$$\begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ n-2=0 \Rightarrow n=2 \end{cases}$$

ضابطه تابع g به صورت $g(x) = 3x - 1 + |x + 3|$ است.

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 4 & ; x \geq 3 \\ 2x + 2 & ; x < 3 \end{cases}$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است.



۱۸۲ ۳

با توجه به این که $f(x) = mx^2 - nx - k$ تابعی ثابت می‌باشد، باید $m = n = 0$ باشند. حال برای تابع بودن رابطه زوج مرتبی داده شده داریم:

$$\{(-1, -1), (0, k), (-1, -1)(3k + 2, 2k + 1)\} \Rightarrow (-1, -1) = (0, k)$$

$$\Rightarrow k = -1 \xrightarrow{f(x) = -k} f(x) = 1 \Rightarrow f(\sqrt{5}) = 1$$

۱۸۳ ۱

چون تابع f هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین نمایانگر یک تابع ثابت است و همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های آن با هم برابرند.

$$\begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b + 3 = 4 \Rightarrow b = 1 \\ a - c = 4 \Rightarrow 2 - c = 4 \Rightarrow c = -2 \end{cases}$$

حاصل $|a| + |b| + |c|$ برابر است با:

$$|a| + |b| + |c| = |2| + |1| + |-2| = 5$$

۱۷۴ ۴

برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید ضریب x^3 منفی باشد:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow |k| < 3 \Rightarrow -3 < k < 3$$

بنابراین مقادیر قابل قبول k عبارت‌اند از: $0, \pm 1, \pm 2$ و مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۱۷۵ ۱

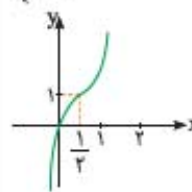
چون تابع $g(x)$ یک تابع همانی است، پس داریم:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

اکنون ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 8x^3 - 12x + 6x = (2x - 1)^3 + 1$$

با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است.



۱۷۶ ۴

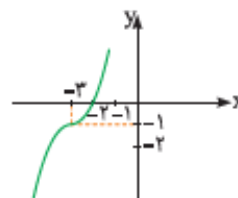
چون نمودار تابع $f(x)$ فقط در نقطه $(-3, -1)$ بر خط به موازات محور x ها مماس است، پس می‌توان ضابطه آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x) = k(x + 3)^3 - 1$$

چون ضریب x^3 در تابع $f(x)$ برابر یک است، پس $k = 1$ است.

اکنون نمودار تابع $|f(x)|$ را رسم می‌کنیم:

طبق نمودار، تابع $|f(x)|$ در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است و کمترین مقدار k برابر -2 است.



۱۷۷ ۴

چون یک خط افقی در نقطه $(2, -1)$ بر تابع f مماس است، می‌توانیم ضابطه آن را به صورت $f(x) = k(x - 2)^3 - 1$ در نظر بگیریم.

از طرفی نمودار از مبدأ مختصات نیز می‌گذرد:

$$f(0) = 0 \Rightarrow k(0 - 2)^3 - 1 = 0 \Rightarrow -8k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -\frac{1}{8}(x - 2)^3 - 1$ است.

اکنون طول نقطه برخورد نمودار با خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{8}(x - 2)^3 - 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{8}(x - 2)^3 = 2 \Rightarrow (x - 2)^3 = -16 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{-16} \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt[3]{2}$$

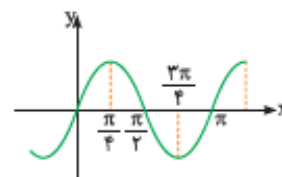
۱۷۸ ۳

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه‌های

$$[\frac{3\pi}{4}, \pi] \text{ و } [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$$

اکیداً صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ اکیداً نزولی است.



۳ ۱۸۴

 چون تابع f یک تابع نزولی است، پس باید $f(-2) \geq f(0) \geq f(1)$ باشد؛

$$f(-2) \geq f(0) \geq f(1) \Rightarrow 1 \geq m^2 - 1 \geq |m| - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) m^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow m^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \\ 2) |m| - 2 \leq 1 \Rightarrow |m| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq m \leq 3 \\ 3) m^2 - 1 \geq |m| - 2 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

 از اشتراک سه بازه به دست آمده، حدود m برابر $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ به دست می‌آید که این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

۱ ۱۸۵

 چون تابع f یک تابع اکیداً صعودی است، پس باید $f(1) < f(2) < f(3)$ باشد؛

$$f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow a < a^2 - 2a + 2 < 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) a^2 - 2a + 2 < 10 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 < 0 \Rightarrow a \in (-2, 4) \\ 2) a < 10 \Rightarrow a \in (-\infty, 10) \\ 3) a < a^2 - 2a + 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 > 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

 از اشتراک ۳ بازه به دست آمده، حدود a برابر $(-2, 1) \cup (2, 4)$ به دست می‌آید که این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

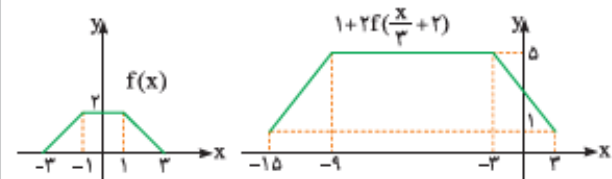
۱ ۱۸۶

 می‌دانیم انتقال عمودی، وضعیت یکنوایی را تغییر نمی‌دهد. پس تنها تغییرات افقی تابع $y = 1 - 3f(2 - x)$ را بررسی می‌کنیم؛

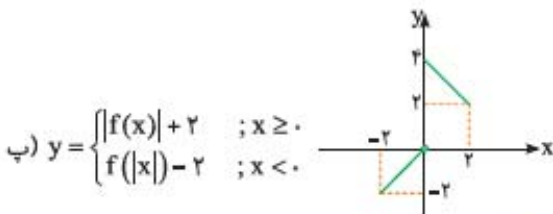
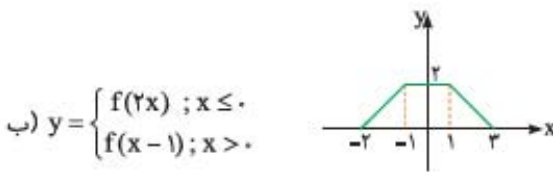
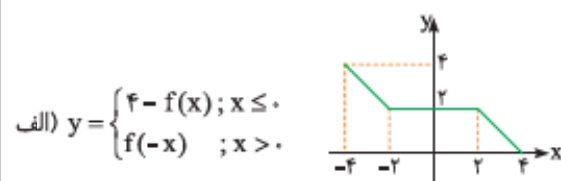
$$-2 \leq 2 - x \leq 5 \Rightarrow -4 \leq -x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$$

 بنابراین تابع $y = 1 - 3f(2 - x)$ در بازه $[-3, 4]$ اکیداً نزولی است.

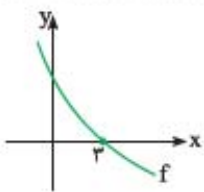
۲ ۱۸۷

 ابتدا به کمک نمودار داده شده در صورت سوال، نمودار تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ را رسم می‌کنیم؛

 مطابق نمودار بالا، تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ در بازه $[-15, -9]$ اکیداً صعودی است.

۲ ۱۸۸

 به کمک نمودار تابع $f(x)$ ، نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم؛


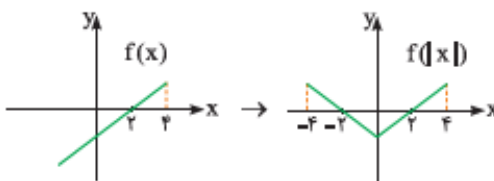
۴ ۱۸۹

 چون f تابعی اکیداً نزولی است و از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد، نمودار آن را به صورت مقابل

 در نظر می‌گیریم؛
حال دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ را تعیین می‌کنیم؛

$$x^2 f(x) \geq 0 \xrightarrow{x^2 \geq 0} f(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

 پس ۴ عدد صحیح و نامنفی به صورت $x = 0, 1, 2, 3$ در دامنه تابع $g(x)$ هستند.

۳ ۱۹۰

 مطابق صورت سوال، یک نمودار فرضی برای تابع $f(x)$ رسم می‌کنیم و به کمک آن $f(|x|)$ را رسم می‌کنیم؛

 اکنون دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)f(|x|)}$ را به دست می‌آوریم؛

$$(x-1)f(|x|) \geq 0$$

x	-4	-2	1	2	4
$x-1$	-	-	+	+	+
$f(x)$	+	+	-	-	+
$(x-1)f(x)$	-	+	+	-	+

 طبق جدول تعیین علامت بالا، دامنه تابع برابر $[-2, 1] \cup [2, 4]$ است.

۳ ۱۹۱

 می‌دانیم $D_g = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ است. ابتدا دامنه

 تابع $g - 2f$ را به دست می‌آوریم؛

$$D_{g-2f} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$g - 2f = \{(-1, 5 - 2(3)), (1, 4 - 2(2)), (2, 3 - 2(4)), (3, 2 - 2(1))\}$$

$$\Rightarrow g - 2f = \{(-1, -1), (1, 0), (2, -5), (3, 0)\}$$

 بنابراین در تابع $g - 2f$ ، زوج مرتب $(0, 1)$ وجود ندارد.

۱۹۵ ۱

ابتدا با جایگذاری $x = 5$ در تابع f ، مقدار $f(5)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(5) = \frac{3(5) - 4}{5 + 2} = \frac{11}{7}$$

اکنون حاصل $(\frac{3g-f}{3f+g})(5)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3g-f}{3f+g}\right)(5) &= \frac{3g(5) - f(5)}{3f(5) + g(5)} = \frac{3(1) - \frac{11}{7}}{3(\frac{11}{7}) + (1)} = \frac{3 - \frac{11}{7}}{\frac{33}{7} + 1} \\ &= \frac{\frac{10}{7}}{\frac{40}{7}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۱۹۶ ۴

$$x=1: \begin{cases} 2f+g=1 \\ 3f-2g=4 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\frac{6}{5}, g(1)=-\frac{5}{5}$$

$$x=2: \begin{cases} 2f+g=2 \\ 3f-2g=0 \end{cases} \Rightarrow f(2)=\frac{4}{5}, g(2)=\frac{6}{5}$$

$$x=3: \begin{cases} 2f+g=4 \\ 3f-2g=3 \end{cases} \Rightarrow f(3)=\frac{11}{5}, g(3)=\frac{6}{5}$$

بنابراین تابع $f-g$ بصورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f-g &= \left\{ \left(1, \frac{6}{5} - \left(-\frac{5}{5}\right)\right), \left(2, \frac{4}{5} - \frac{6}{5}\right), \left(3, \frac{11}{5} - \frac{6}{5}\right) \right\} \\ &= \left\{ \left(1, \frac{11}{5}\right), \left(2, -\frac{2}{5}\right), \left(3, \frac{5}{5}\right) \right\} \end{aligned}$$

۱۹۷ ۱

در تابع $f(x+1)$ اگر به جای x قرار دهیم $x-1$ به تابع $f(x)$ می‌رسیم یعنی باید طول همه نقاط را با عدد ۱ جمع کنیم. بنابراین تابع $f(x)$

به صورت زیر خواهد بود: $f(x) = \{(2,1), (4,3), (5,3), (6,0)\}$

حال برای به دست آوردن تابع $f(2x)$ کفایت مقادیر طول نقاط تابع $f(x)$ را نصف کنیم: $f(2x) = \{(1,1), (2,3), (2.5,3), (3,0)\}$

۱۹۸ ۳

$$\begin{aligned} (1) (f+g)(-1) &= 3 \Rightarrow f(-1) + g(-1) = 3 \Rightarrow -a + b + (1-b) + 4 = 3 \\ &\Rightarrow -a + 5 = 3 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (f+g)(1) &= 5 \Rightarrow f(1) + g(1) = 5 \Rightarrow a + b + (b-1) + 4 = 5 \\ &\Rightarrow 2 + 2b + 3 = 5 \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

بنابراین حاصل $a^2 + b^2 = 2^2 + 0^2 = 4$ است.

۱۹۹ ۲

$$\text{ابتدا حاصل } g\left(\frac{-1}{2}\right) \text{ را به دست می‌آوریم: } g\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{2}{\frac{-1}{2}} = 4$$

اکنون حاصل $(3f + \frac{g}{V})(x)$ را در نقطه $x = 4$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left(3f + \frac{g}{V}\right)(4) &= 3f(4) + \frac{g(4)}{V} = 3(\sqrt{4+5}) + \frac{-(4)^2 + 4 + 1}{V} \\ &= 3(3) + \frac{-16 + 4 + 1}{V} = 9 + \frac{-11}{V} = 7/42 \end{aligned}$$

بنابراین حاصل $[(3f + \frac{g}{V})(4)]$ برابر است با:

$$[(3f + \frac{g}{V})(4)] = [7/42] = 7$$

هجابلیت

اعمال روی ضابطه توابع

توابع را نیز می‌توان مانند اعداد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد و توابع جدید به دست آورد. [البته در هنگام تقسیم، تابع واقع در مخرج نباید صفر باشد.]

۱) برای هر x متعلق به دامنه هر دو تابع f و g ، می‌توان توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f \cdot g$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), D_{f+g} = D_f \cap D_g \quad \text{مجموع دو تابع}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), D_{f-g} = D_f \cap D_g \quad \text{تفاضل دو تابع}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \quad \text{ضرب دو تابع}$$

۲) برای هر x متعلق به دامنه هر دو تابع f و g که در آن $g(x) \neq 0$ باشد، می‌توان تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

۱۹۲ ۱

با توجه به اینکه $D_f \cap D_g = \{-1, 0, 2\}$ است، داریم:

$$\left(\frac{1}{f-g+1}\right)(-1) = \frac{1}{f(-1) - g(-1) + 1} = \frac{1}{0 - 1 + 1} \quad \times$$

$$\left(\frac{1}{f-g+1}\right)(0) = \frac{1}{f(0) - g(0) + 1} = \frac{1}{-3 - (-2) + 1} \quad \times$$

$$\left(\frac{1}{f-g+1}\right)(2) = \frac{1}{f(2) - g(2) + 1} = \frac{1}{3 - (-4) + 1} = \frac{1}{8}$$

بنابراین تابع $\frac{1}{f-g+1}$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{f-g+1} = \left\{ \left(2, \frac{1}{8}\right) \right\}$$

۱۹۳ ۱

$$\frac{(f^2 - 2g)(1)}{(2f + 3g)(-1)} = \frac{f^2(1) - 2g(1)}{2f(-1) + 3g(-1)} = \frac{(3)^2 - 2(2)}{2(4) + 3(-1)} = \frac{9-4}{8-3} = 1$$

۱۹۴ ۳

ابتدا به کمک روابط داده شده، مقدار a و b را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(0) = 5 \Rightarrow f(0) + g(0) = 5 \Rightarrow f(0) = 5 - g(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = 5 - 1 = 4 \Rightarrow 2a + 3b = 0 \quad (1)$$

$$(f-g)(2) = 1 \Rightarrow f(2) - g(2) = 1 \Rightarrow f(2) = 1 + g(2)$$

$$\Rightarrow f(2) = 1 + 5 = 6 \Rightarrow b - 2a = 2 \quad (2)$$

به کمک روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ b - 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $2b - 4a = 2(\frac{1}{2}) - 4(\frac{-3}{4}) = 4$ است.

۱ ۲۵۵

 دامنه تابع f برابر $D_f = (-2, 3)$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است.

 برای محاسبه دامنه تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ داریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = (-2, 3) - \{x | g(x) = 0\}$$

 از آنجایی که تابع g به ازای $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = -1$ صفر می‌شود، پس:

$$D_{\frac{f}{g}} = (-2, 3) - \{-1, 0, 1\}$$

 بنابراین دامنه تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ تنها شامل یک عدد صحیح است.

۴ ۲۵۱

 به ازای دامنه مشترک، دو تابع f و g را از هم کم می‌کنیم:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} (3x+2) - (-2x^2+1) & ; x \leq -3 \\ (4x^2-3) - (-2x^2+1) & ; -3 < x < 3 \\ (4x^2-3) - (-5x+6) & ; x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+1 & ; x \leq -3 \\ 6x^2-4 & ; -3 < x < 3 \\ 4x^2+5x-9 & ; x \geq 3 \end{cases}$$

۲ ۲۵۲

 ابتدا دامنه تابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{3x+6} \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{a-2x} + b \rightarrow D_g = (-\infty, \frac{a}{2}]$$

 دامنه تابع $y = (f+g)(x)$ برابر $D_f \cap D_g$ است. پس:

$$[-2, 18] = [-2, +\infty) \cap (-\infty, \frac{a}{2}] = [-2, \frac{a}{2}] \rightarrow \frac{a}{2} = 18 \Rightarrow a = 36$$

 اکنون به کمک رابطه $(f+g)(1) = 4$ داریم:

$$(f+g)(1) = 4 \Rightarrow f(1) + g(1) = 4 \Rightarrow \sqrt{3(1)+6} + \sqrt{36-2(1)} + b = 4 \\ \Rightarrow 4 = \sqrt{36} + \sqrt{34} + b = 4 \Rightarrow 6 + 4 + b = 4 \Rightarrow b = -6$$

 بنابراین حاصل $a - 2b = (36) - 2(-6) = 36 + 12 = 48$ است.

۲ ۲۵۳

 مطابق شکل، دامنه تابع h و g را به دست می‌آوریم:

$$D_h = [-1, 3], D_g = (-\infty, 4]$$

 اکنون دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow D_f = D_{\frac{h}{g}} = D_h \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{h}{g}} = [-1, 3] - \{-3, 1, 4\} = [-1, 3] - \{1\}$$

۳ ۲۵۴

 ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم. مطابق شکل داریم:

$$D_f = [-3, 3], D_g = (-2, +\infty)$$

 دامنه تابع $\left(\frac{f+g}{g}\right)(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_{\frac{f+g}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$$

$$= (-2, 3] - \{-1, 0, 4\} = (-2, 3] - \{-1, 0\}$$

 بنابراین حاصل $ab + c^3 + d^3$ برابر است با:

$$ab + c^3 + d^3 = (-2)(3) + (-1)^3 + (0)^3 = -6 - 1 = -7$$

۱ ۲۵۵

 ابتدا به کمک نمودار، دامنه توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f(x-1)} = [-1, 3] \Rightarrow D_{f(x)} = [-2, 2]$$

$$D_{g(x+1)} = (-2, 1] \Rightarrow D_{g(x)} = (-1, 2]$$

 اکنون دامنه توابع $h(x) = f\left(\frac{x-4}{3}\right)$ و $k(x) = g\left(\frac{2x-1}{3}\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$D_h: -2 \leq \frac{x-4}{3} \leq 2 \Rightarrow -4 \leq x-4 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq x \leq 10 \Rightarrow D_h = [0, 10]$$

$$D_k: -1 < \frac{2x-1}{3} \leq 2 \Rightarrow -3 < 2x-1 \leq 6 \Rightarrow -1 < x \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow D_k = (-1, 3.5]$$

 دامنه تابع $h(x) \times k(x) = f\left(\frac{x-4}{3}\right)g\left(\frac{2x-1}{3}\right)$ برابر است با:

$$D_{h \times k} = D_h \cap D_k = [0, 10] \cap (-1, 3.5] = [0, 3.5]$$

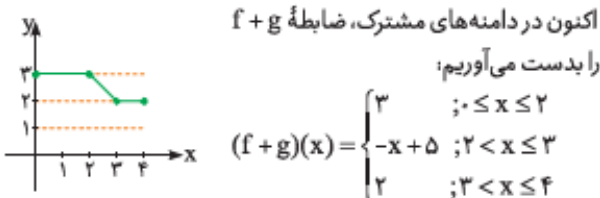
۱ ۲۵۶

 ابتدا به کمک نمودار، ضابطه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ -x+4 & ; 2 < x \leq 4 \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} 1 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ x-2 & ; 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

 اکنون در دامنه‌های مشترک، ضابطه $f+g$

را به دست می‌آوریم:



۲ ۲۵۷

 ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$D_f: \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+\sqrt{x^2-4} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$D_g: \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-4} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

 اکنون در دامنه مشترک، ضابطه $(f.g)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) \times g(x) = \frac{2}{x+\sqrt{x^2-4}} \times \frac{2}{x-\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{x^2-(x^2-4)} = 1$$



۲۲۲ ۱

ابتدا به کمک نمودار، ضابطه توابع $(f+g)$ و $(f-g)$ را به دست می آوریم:

$$(f+g)(x) = 2x^2, (f-g)(x) = 2x$$

اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ در نظر بگیریم، داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2$$

$$\Rightarrow (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c') = 2x^2 \Rightarrow \begin{cases} a+a' = 2 \\ b+b' = 0 \\ c+c' = 0 \end{cases}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x$$

$$\Rightarrow (a-a')x^2 + (b-b')x + (c-c') = 2x \Rightarrow \begin{cases} a-a' = 0 \\ b-b' = 2 \\ c-c' = 0 \end{cases}$$

از ۳ دستگاه معادله به دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} a+a' = 2 \\ a-a' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b+b' = 0 \\ b-b' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b' = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+c' = 0 \\ c-c' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c' = 0 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه توابع f و g به صورت زیر است:

$$f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = x^2 - x$$

اکنون حاصل $(f.g)(1)$ را به دست می آوریم:

$$(f.g)(1) = f(1) \times g(1) = 2 \times 0 = 0$$

۲۲۳ ۴

ابتدا به کمک شکل، ضابطه دو تابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + 2, (f.g)(x) = (-x+2)\left(x+\frac{5}{3}\right) = (-x+2)\left(x+\frac{5}{3}\right)$$

اکنون ضابطه تابع g را به دست می آوریم:

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{(-x+2)\left(x+\frac{5}{3}\right)}{f(x)} \Rightarrow g(x) = x + \frac{5}{3}$$

بنابراین حاصل $a+b = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ است.

۲۲۴ ۴

ابتدا به کمک نمودار، ضابطه تابع $f.g$ را به دست می آوریم:

$$(f.g)(x) = -(x-2)(x+2)$$

$$\rightarrow (f.g)(x) = f(x) \times g(x) = -(x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+a)} \times g(x) = (x-2)(x+2)$$

از طرفی تابع $f.g$ در $x=2$ و $x=-1$ دارای حفره است. بنابراین $x=2$ و $x=-1$ ریشه مشترک صورت و مخارج آن است. پس $a=1$ و ضابطه تابع g به صورت $g(x) = -(x+1)(x-2)$ است.

اکنون حاصل عبارت خواسته شده را به دست می آوریم:

$$f(1) - g(0) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

۲۵۸ ۲

با توجه به اینکه نمودار $f+g$ ، نمایانگر یک تابع خطی و $f-g$ یک تابع ثابت است، بنابراین هر دو تابع f و g خطی بوده اند و می توان $g(x) = cx + d$ و $f(x) = ax + b$ در نظر گرفت.

$$(f+g)(x) = fx + 12 \Rightarrow f(x) + g(x) = (a+c)x + (b+d) = 4x + 12$$

$$(f-g)(x) = 4 \Rightarrow (a-c)x + (b-d) = 4$$

با حل دو دستگاه مقابل داریم:

$$\begin{cases} a+c = 4 \\ a-c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+d = 12 \\ b-d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ d = 4 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه توابع f و g به صورت زیر است:

$$f(x) = 2x + 8, \quad g(x) = 2x + 4$$

اکنون حاصل $f(1).g(1)$ را به دست می آوریم:

$$f(1).g(1) = 10 \times 6 = 60$$

۲۵۹ ۳

ابتدا به کمک نمودار، ضابطه $f+g$ را به دست می آوریم:

$$(f+g)(x) = -\frac{1}{3}x + 1$$

اکنون حاصل $g(-2)$ را به دست می آوریم:

$$(f+g)(-2) = 2 \Rightarrow f(-2) + g(-2) = 2 \Rightarrow -4 + g(-2) = 2 \Rightarrow g(-2) = 6$$

۲۶۰ ۴

ابتدا دامنه دو تابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{5-x}} \rightarrow D_f = (-\infty, 5)$$

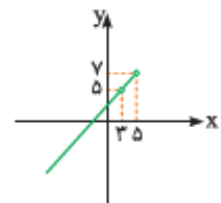
$$g(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x-3} \rightarrow D_g = (-\infty, 5] - \{3\}$$

دامنه تابع $f.g$ برابر است با: $D_{f.g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 5) - \{3\}$

اکنون در دامنه مشترک، ضابطه تابع $f.g$ را به دست می آوریم.

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$= \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{5-x}} \times \frac{\sqrt{5-x}}{x-3} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2$$



۲۶۱ ۱

ابتدا به کمک نمودار، ضابطه تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = -3x - 6$$

برای محاسبه مقدار $g(3)$ و $g(-1)$ داریم:

$$(f+g)(-1) = f(-1) \Rightarrow f(-1) + g(-1) = f(-1) \Rightarrow g(-1) = 0$$

$$(f+g)(3) = -4 \Rightarrow f(3) + g(3) = -4 \Rightarrow -15 + g(3) = -4 \Rightarrow g(3) = 11$$

اکنون حاصل $f(1).g(-1) + g(3)$ را حساب می کنیم:

$$\underbrace{f(1).g(-1)}_0 + g(3) = g(3) = 11$$

۲ ۲۱۵

 ابتدا به کمک نمودار، ضابطه توابع f و $f.g$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + 9, \quad (f.g)(x) = \frac{-2}{9}x(x+9)$$

 اکنون ضابطه تابع g را به دست می‌آوریم:

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x) = \left(\frac{-2}{9}x\right)(x+9) \Rightarrow g(x) = \frac{-2}{9}x$$

 اکنون حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ را به دست می‌آوریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 + \left(\frac{-2}{9}\right)^2 + 0 = \frac{4}{81}$$

۲ ۲۱۶

 ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x^2-4x+4}} \rightarrow D_f: \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-4x+4 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = [-2, +\infty) - \{2\}$$

$$g(x) = |x-2| \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

 دامنه تابع $(f.g)$ برابر $D_{f.g} = D_f \cap D_g = [-2, +\infty) - \{2\}$ است.

 اکنون با به دست آوردن ضابطه تابع $f.g$ آن را رسم می‌کنیم:

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}+1}{|x-2|} \times |x-2| = \sqrt{x+2} + 1$$

 مطابق نمودار، برد تابع $f.g$ برابر $\{3\} - [1, +\infty)$ است.

۲ ۲۱۷

 ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

 دامنه تابع $f+g$ برابر $D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, +\infty)$ است.

 اکنون با به دست آوردن ضابطه تابع $f+g$ آن را رسم می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

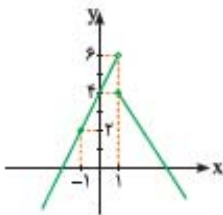
$$= \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 2$$

 مطابق نمودار، برد تابع $f+g$ برابر $(2, +\infty)$ است.

۱ ۲۱۸

 ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -x+5 & ; x \geq 1 \\ 2x+4 & ; -1 \leq x < 1 \\ 3x+5 & ; x < -1 \end{cases}$$


 اکنون با رسم تابع $f+g$ ، برد آن را محاسبه می‌کنیم:

 مطابق شکل، برد تابع $f+g$ برابر $(-\infty, 6)$ است.

۱ ۲۱۹

 دامنه تابع f برابر $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ است. با توجه به دامنه توابع f و g ،

 مقادیر مختلف تابع $y = (\sqrt{(f^2+g).g})(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x=1: y = \sqrt{(f^2(1)+g(1)).g(1)} = \sqrt{(2+2) \times 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x=0: y = \sqrt{(f^2(0)+g(0)).g(0)} = \sqrt{(3+3) \times 3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

 بنابراین بیشترین مقدار این تابع، برابر $3\sqrt{2}$ است.

۲ ۲۲۰

 تابع $g(x)$ را با توجه به دامنه تابع f تشکیل می‌دهیم ($D_g = D_f$):

$$g(2) = 2 + f(2) = 2 + 7 = 9 \quad g(3) = 3 + f(3) = 3 + (-1) = 2$$

$$g(4) = 4 + f(4) = 4 + 2 = 6 \quad g(5) = 5 + f(5) = 5 + 4 = 9$$

$$R_g = \{2, 6, 9\}$$

 اعضای برد تابع g عبارت است از:

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{\text{مجموع اعضای برد}} 2+6+9=17$$

۱ ۲۲۱

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت ۱: اگر x عددی صحیح باشد آن گاه $x - [x] = 0$ و $[x] + [-x] = 0$ است پس:

$$f(x) - g(x) = 0 - 3^x = 0 - 1 = -1$$

حالت ۲: اگر x عددی غیرصحیح باشد، آن گاه $[x] + [-x] = -1$ و $0 < x - [x] < 1$ است، پس:

$$f(x) - g(x) = -1 - 2^{x-[x]}$$

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow 3^x < 2^{x-[x]} < 3^1 \Rightarrow 1 < 2^{x-[x]} < 2$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -1 > -2^{x-[x]} > -2 \xrightarrow{-1} -2 > -1 - 2^{x-[x]} > -3$$

 بنابراین اگر x عددی غیرصحیح باشد $-3 < f(x) - g(x) < -2$ است، پس برد تابع $f - g$ برابر است با:

$$R_{f-g} = (-3, -2) \cup \{-1\}$$

۲ ۲۲۲

 ابتدا ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+|x|}{|x+1|+1} = \begin{cases} \frac{2x}{x+2} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$


 اکنون با رسم تابع $\frac{f}{g}$ ، برد آن را محاسبه می‌کنیم:

 مطابق شکل، برد تابع $\frac{f}{g}$ برابر $[0, 2]$ است.

۱ ۲۲۷

ابتدا $f(\sqrt{3}-1)$ را به دست می‌آوریم:
 $f(x) = |x-1| + |2x+1|$
 $\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = |\sqrt{3}-2| + |2(\sqrt{3}-1)+1|$
 $\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = (2-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$
 حال با جای‌گذاری $\sqrt{3}+1$ در تابع g داریم:

$$g(f(\sqrt{3}-1)) = g(\sqrt{3}+1) = [-(\sqrt{3}+1)+1] = [-\sqrt{3}] = -2$$

۱ ۲۲۸

ابتدا ضابطه g را به صورت $g(x) = (x+1)^2$ می‌نویسیم و سپس مقادیر $f(1-\sqrt{2})$ و $g(1-\sqrt{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$1) f(1-\sqrt{2}) = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

$$2) g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = f(6-4\sqrt{2}) - g(\sqrt{2}-1)$$

$$= |6-4\sqrt{2}| - (\sqrt{2}-1+1)^2 = 6-4\sqrt{2} - 2 = 4-4\sqrt{2}$$

۱ ۲۲۹

چون عبارت $\sin \pi x - 1$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:
 $\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \quad (1)$

از طرفی می‌دانیم مقادیر سینوس همواره در بازه $[-1, 1]$ هستند؛ بنابراین نامساوی (۱) تنها در صورتی برقرار است که $\sin \pi x = 1$ باشد، بنابراین:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای x ، تمام ورودی‌های تابع f ، اعدادی غیر صحیح هستند. همچنین می‌دانیم عبارت $[x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر -1 است. پس:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1} = (-1) + \sqrt{0} = -1$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(x)) = f(-\frac{1}{2}(-1)) = f(\frac{1}{2}) = -1 + 0 = -1$$

۳ ۲۳۰

ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = f([x] + f(x)) = f([x] + 2[x] - x) = f(3[x] - x)$$

$$= 2[3[x] - x] - 2[3[x] - x] = 6[x] - 2[3[x] - x] = 2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x]$$

حال با توجه به این که $f(-\frac{5}{3}) = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$ می‌باشد مقدار $g(f(-\frac{5}{3}))$ را به دست می‌آوریم:

$$g(f(-\frac{5}{3})) = g(-\frac{7}{3}) = 2[-\frac{7}{3}] = 2 \times (-3) = -6$$

۳ ۲۳۱

با فرض $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ ، خروجی ماشین، همان خروجی تابع $g \circ f$ است. بنابراین اگر ورودی ماشین را a در نظر بگیریم، داریم:

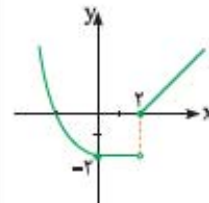
$$g(f(a)) = \frac{f(a)}{3} \Rightarrow \frac{f(a)}{\sqrt{f(a)+1}} = \frac{f(a)}{3} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow 2a - 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۲ ۲۲۳

ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; x < 0 \\ -2 & ; 0 \leq x < 2 \\ x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$



اکنون نمودار تابع $f+g$ را رسم می‌کنیم:

۴ ۲۲۴

ابتدا $g(f(a)) = 5$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

$$a \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{g} 5 \Rightarrow (a, \bigcirc) \in f, (\bigcirc, 5) \in g$$

حال چون زوج مرتب $(5, 6)$ در تابع g وجود دارد، پس $\bigcirc = 6$ بوده و در نتیجه $f(a) = 6$ است؛ $f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$

هتایت

نحوه تشکیل تابع $f \circ g(x)$

مقادیر $g(x)$ به عنوان ورودی تابع f است.



۳ ۲۲۵

از آن جایی که اشتراک دامنه توابع f و g به صورت $\{2, 4\}$ است، پس:
 $f \times g = \{(2, -2 \times 3), (4, 1 \times 2)\} = \{(2, -6), (4, 2)\}$

حال تابع $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$-1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 1$$

$$2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} -6 \Rightarrow f \circ g = \{(2, -6), (4, 2)\}$$

$$4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -2$$

$$\Rightarrow f \times g + f \circ g = \{(4, 0)\}$$

۲ ۲۲۶

با توجه به صورت سؤال داریم:

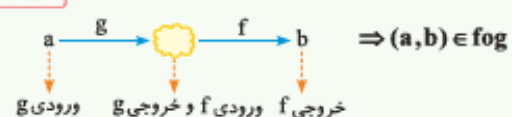
$$(4, 2) \in f \circ g \Rightarrow 4 \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} 2 \Rightarrow (\bigcirc, 2) \in f, (4, \bigcirc) \in g$$

چون $f \in (3, 2)$ ، پس $\bigcirc = 3$ است. پس $a = 4$ و در نتیجه $a = 4$ است. از طرفی:

$$(4, 1) \in g \circ f \Rightarrow 4 \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow (4, \bigcirc) \in f, (\bigcirc, 1) \in g$$

با توجه به این که $f \in (4, 5)$ ، پس $\bigcirc = 5$ است؛ بنابراین $(5, 1) \in g$ و در نتیجه $b = 5$ خواهد بود. در نتیجه دوتایی (a, b) به صورت $(4, 5)$ است.

هتایت



به پوره دیگه! اطراح می‌تونست توی همین سؤال، بپرسه:

بُرد تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$f \circ g = \{(1, 1), (3, 7), (4, 2), (5, 7)\} \Rightarrow R_{f \circ g} = \{1, 2, 7\}$$

۲ ۳۳۷

 ابتدا $f(g(1))$ را محاسبه می‌کنیم:

برای پیدا کردن $g(1)$ باید در تابع $g(x) = \begin{cases} f(x+1); & x < 1 \\ f(x-1); & x \geq 1 \end{cases}$ سراغ ضابطه پایینی برویم:

$$g(1) = f(1-1) = f(0) \xrightarrow{f(x)=x^2+1; x < 2} f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(g(1)) = f(f(0)) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

۳ ۳۳۸

ضابطه تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f(x)) = 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - |x - 2|| - 2|$$

$$= 2 - |-|x - 2|| = f(x)$$

هادایت

اگر ضابطه توابع f و g را داشته باشیم، برای تشکیل ضابطه تابع $f \circ g$ باید در تابع f به جای همه x ها، $g(x)$ قرار دهیم.

۲ ۳۳۹

 ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ g(x) = x - 3 \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = (x^2 + 2x) - 3$$

 حال معادله $(g \circ f)(x) = 2$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 + 2x - 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -2 \\ P = \alpha \times \beta = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2(-5) = 14$$

به هوره دیگره ا طرح می‌تونست اینهوری بهره،
 جواب بزرگ تر معادله $f \circ g(x) = 1$ کما م است؟

 جواب: $2 + \sqrt{2}$

۴ ۳۴۰

 در تابع g ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

با جای‌گذاری $x = 2$ در تابع $g \circ f$ داریم:

$$g(f(2)) = g(1) = 4$$

 تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 2$ برابر ۴ می‌شود، گزینه (۴) است.

۲ ۳۴۱

 ابتدا ضابطه تابع‌های $f \circ g(x)$ و $f(x+3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1) f(g(x)) = 2((3x+1)^2 - (3x+1) - 3) = 2(9x^2 + 3x - 3)$$

$$2) f(x+3) = 2((x+3)^2 - (x+3) - 3) = 2(x^2 + 5x + 3)$$

۴ ۳۳۲

 برای پیدا کردن $f(g(1))$ باید ابتدا $g(1)$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = 6 - f(x-3) \xrightarrow{x=1} g(1) = 6 - f(-2)$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار}} g(1) = 6 - 2 = 4$$

بنابراین $f(g(1)) = f(4)$ است. طبق نمودار $f(4) = 8$ است، پس:
 $f \circ g(1) = 8$

۲ ۳۳۳

با توجه به شکل صورت سوال $f(x+1) = x+2$ و $g(x-1) = -x+4$ است. حالا ابتدا $f(3)$ و $g(-3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=2} f(3) = 2+2 = 4$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=-2} g(-3) = 2+4 = 6$$

پس $f(4) + f(6) = g(3) + f(g(-3)) = g(4) + f(6)$ است. حالا $f(6)$ و $f(4)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=5} f(6) = 5+2 = 7$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=5} g(4) = -5+4 = -1$$

پس $g(4) + f(6) = -1 + 7 = 6$ است.

۳ ۳۳۴

 اعضای تابع $g \circ f$ را پیدا می‌کنیم:

$$a \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5$$

$$-1 \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \frac{2b-1}{b+1}$$

$$1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} -1$$

$$3 \xrightarrow{f} -4 \xrightarrow{g} 3$$

با توجه به صورت سوال، اعضای بُرد تابع $g \circ f$ به صورت $\{-1, 0, 1, 3, 5\}$ است، پس:

$$(1)c = 3, (2)\frac{2b-1}{b+1} = 1 \Rightarrow 2b-1 = b+1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow b \times c = 2 \times 3 = 6$$

۱ ۳۳۵

 می‌دانیم $f(2) = 1$ است، پس:

$$g(f(x)) = x^2 - x + 1 \xrightarrow{x=2} g(f(2)) = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow g(1) = 3$$

حالا در رابطه $f \circ g(x) = x^2 + 3x + 1$ به جای x عدد ۱ می‌گذاریم:

$$f(g(1)) = 1^2 + 3 + 1 = 5 \xrightarrow{g(1)=3} f(3) = 5$$

۳ ۳۳۶

 ابتدا $g(3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(g(x) + x) = 6x + 1 \xrightarrow{x=3} f(g(3) + 3) = 6 \times 3 + 1 = 19$$

حالا اگر در رابطه $f(x+1) = 2x+1$ به جای x عدد ۹ قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم $f(10) = 19$ است. پس:

$$g(3) + 3 = 10 \Rightarrow g(3) = 7$$

بنابراین $f(g(3)) = f(7)$ است و داریم:

$$f(x+1) = 2x+1 \xrightarrow{x=6} f(7) = 2(6) + 1 = 13$$

۲۴۶ ۴

می‌دانیم $f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ است. حالا ضابطه $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم و برای این‌که ببینیم نمودار آن در کدام بازه زیرمحور x ها قرار دارد، خواهیم داشت:

$$f(g(x)) = ([x]-2)([x]-5) < 0 \Rightarrow 2 < [x] < 5$$

چون حاصل $[x]$ مقداری صحیح است، پس $[x] = 3$ یا $[x] = 4$ است، یعنی:

بنابراین نمودار fog در بازه $[3, 5)$ زیرمحور x ها قرار دارد و $b-a = 5-3 = 2$ است.

۲۴۷ ۴

ضابطه gof را تشکیل می‌دهیم و آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$gof(x) = 1 \Rightarrow |2|x-3|-7| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2|x-3|-7 = 1 \\ 2|x-3|-7 = -1 \end{cases}$$

حالا هر یک از معادله‌های (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$1) 2|x-3|-7 = 1 \Rightarrow |x-3| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ x-3 = -4 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$2) 2|x-3|-7 = -1 \Rightarrow |x-3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 3 \Rightarrow x = 6 \\ x-3 = -3 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله $(gof)(x) = 1$ برابر است با:

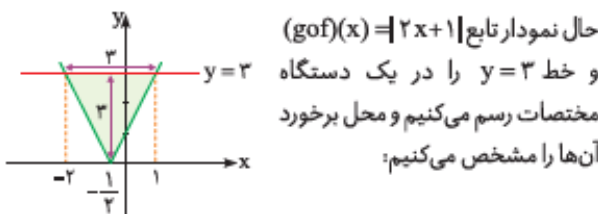
$$7 + (-1) + 6 + 0 = 12$$

۲۴۸ ۳

ابتدا ضابطه تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$g(f(x)) = \sqrt{4(x^2+x)+1} = \sqrt{4x^2+4x+1}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$



$$|2x+1| = 3 \Rightarrow x = -2, x = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{4} \times 3 \times 3 = \frac{9}{4} = 4/5$$

۲۴۹ ۲

چون نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه با طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع می‌کند پس $f(6) = 0$ و $f(-\frac{1}{4}) = 0$ است. حال برای مشخص کردن محل برخورد نمودار تابع fog با محور x ها، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 9 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

۲۵۰ ۲

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(g(x)) = f(2x+1) = \begin{cases} 2(2x+1)-12; 2x+1 \geq 3 \\ (2x+1)^2-1; 2x+1 < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \begin{cases} 4x-10; x \geq 1 \\ 4x^2+4x; x < 1 \end{cases}$$

حالا نقاط تلاقی این دو نمودار را پیدا می‌کنیم:

$$fog(x) = f(x+3) \Rightarrow 2(9x^2+3x-3) = 2(x^2+5x+3)$$

$$\Rightarrow 8x^2-2x-6 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

پس این دو نمودار در دو نقطه به طول‌های ۱ و $x = -\frac{3}{4}$ متقاطع‌اند.

۲۴۲ ۲

ضابطه تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

حالا با توجه به رابطه $(f \circ f)(x) = f(x-3) + f(x+1)$ داریم:

$$a^2x + ab + b = a(x-3) + b + a(x+1) + b$$

$$\Rightarrow a^2x + ab = 2ax - 2a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \xrightarrow{a \neq 0} a = 2 \\ ab = -2a + b \Rightarrow 2b = -4 + b \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

پس $f(x) = 2x - 4$ است و $f(5) = 10 - 4 = 6$ است.

۲۴۳ ۱

با توجه به $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ ضابطه‌های $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را به دست آورده و معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ را حل می‌کنیم:

$$1) (gof)(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$2) (fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow (6x+7)(x+6) = (2x+7)(x+2) \Rightarrow 6x^2+43x+42 = 2x^2+11x+14$$

$$\Rightarrow 4x^2+32x+28 = 0 \Rightarrow \frac{4x^2+32x+28}{a+c=b} = 0 \Rightarrow x = -1, x = -7$$

می‌توانستیم از گزینه‌ها اعداد را جای‌گذاری کنیم.

۲۴۴ ۲

ابتدا ضابطه fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{2}\right) - 2 = \frac{x^2-4x-5}{4}$$

می‌دانیم عرض نقاطی از نمودار تابع که زیر محور x ها قرار می‌گیرند، منفی است:

$$\frac{x^2-4x-5}{4} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

چون $x = 0$ و $x = 4$ در نامعادله $f(g(x)) < 0$ صدق می‌کنند؛ پس گزینه (۲) درست است.

۲۴۵ ۳

می‌دانیم $[x] + [-x]$ به ازای x های صحیح برابر صفر و به ازای x های غیرصحیح برابر ۱- است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می‌گیریم:

$$x \in \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(0) = 4$$

$$x \notin \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(-1) = 3$$

پس به ازای تمام x های غیرصحیح تابع gof برابر ۳ است.

۲۵۴ ۲

چون $f(g(x))$ را داریم و $f(3)$ را می‌خواهیم، پس $g(x)$ را برابر ۳ می‌گذاریم:

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

حالا در تابع $(fog)(x)$ به جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{x=2} f(g(2)) = \frac{2}{2-3} \Rightarrow f(3) = -2$$

هابلایت

یافتن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع g [تابع درونی] را می‌دهند و ضابطه تابع f [تابع بیرونی] یعنی $f(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ضابطه تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به دست می‌آوریم.

۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به دست می‌آوریم.

۳ در تابع $f(t)$ به جای همه t ها، x می‌گذاریم تا ضابطه $f(x)$ به دست آید.

۴ به پوره دیگه اطراح می‌تونست یه سوال میدید و البته سفت بیرسه. اینجوری: اگر $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x - 1$ باشد، بُرد تابع $f(x)$ کدام است؟
 جواب: $f(x) = \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow \text{بُرد} = \mathbb{R} - \{1\}$

۲۵۵ ۳

با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x + 1 = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = 2(t^2 - 2t + 1) + 3(t-1) + 5$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده، $f(t) = 2t^2 - t + 4$ می‌شود که با

جای‌گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ خواهد شد.

پس با جای‌گذاری عدد دلخواه $x = 0$ در تابع fog داریم:

$$f(g(0)) = 5 \xrightarrow{g(0)=1} f(1) = 5 \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

۴ به پوره دیگه اطراح می‌تونست بیرسه:

$$\frac{31}{8}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

دومدار تابع f از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟ جواب: سوم و چهارم

حالا برای حل معادله $fog(x) = 0$ هریک از ضابطه‌ها را برابر صفر می‌گذاریم:

$$x \geq 1: 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x < 1: 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 4x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{3}{2} + 0 + (-1) = \frac{1}{2}$ است.

۲۵۱ ۲

با توجه به نمودار تابع $g(x)$ در صورت سؤال $g(2) = 0$ است، پس برای حل معادله داریم:

$$g(f(g(x+2))) = 0 \Rightarrow f(g(x+2)) = 2$$

حالا باید $f(x)$ را برابر ۲ قرار دهیم:

$$f(x) = \left| -\frac{1}{3}x - 1 \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x - 1 = 2 \Rightarrow x = -9 \\ -\frac{1}{3}x - 1 = -2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

پس باید $g(x+2)$ برابر ۳ یا ۹ باشد:

$$g(x+2) = 9 \rightarrow \text{یک جواب}$$

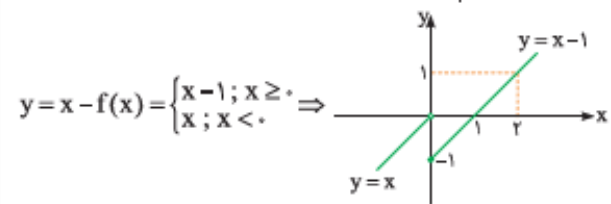
$$g(x+2) = 3 \rightarrow \text{یک جواب}$$

پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۲۵۲ ۱

ضابطه تابع‌های $y = fog$ و $y = x - f(x)$ را پیدا می‌کنیم و نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1; & x^2 - x \geq 0 \\ 0; & x^2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1; & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \\ 0; & 0 < x < 1 \end{cases}$$



دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x = 2$ مشترک هستند.

۲۵۳ ۴

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) - g(x) = -x + 5$ است. در ضمن با توجه به رابطه صورت سؤال $2g(x) = 3f(x) - 14$ است، پس:

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = -x + 5 \\ 3f(x) - 2g(x) = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(x) + 2g(x) = 2x - 10 \\ 3f(x) - 2g(x) = 14 \end{cases}$$

از حل دو معادله و دو مجهول بالا نتیجه می‌گیریم $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = 3x - 1$ است. بنابراین:

$$f(g(x)) = 2(3x - 1) + 4 = 6x + 2$$

از طرفی با توجه به نمودار صورت سؤال، $f(g(x)) = -\frac{2}{a}x + 2$ است، پس:

$$-\frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

با جای گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^2 + 7x + 9$ می شود و معادله محور تقارن آن برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2} = -3.5$$

۳ ۲۵۹

ابتدا ضابطه تابع g را به دست می آوریم. فرض کنیم $f(x) = t$ باشد:

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} \Rightarrow g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20 = 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 20$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده $g(t) = 2t^2 - t + 5$ خواهد شد، که با جایگذاری x به جای t ، ضابطه g به صورت $g(x) = 2x^2 - x + 5$ خواهد شد. پس:

$$f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۴ ۲۶۰

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$1) g(f(x)) = 3f(x) + 4 \Rightarrow g(x) = 3x + 4$$

$$2) f(g(x)) = 2g^2(x) + g(x) + 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$$

حالا تابع $(f-g)(x)$ را پیدا می کنیم و داریم:

$$y = f(x) - g(x) = (2x^2 + x + 1) - (3x + 4) = 2x^2 - 2x - 3$$

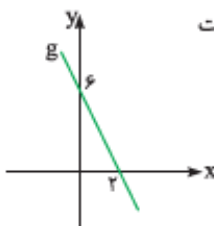
در این سهمی طول رأس برابر $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ است و کم ترین مقدار آن برابر است با:

$$y_{\min} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} - 1 - 3 = -3.5$$

۳ ۲۶۱

ابتدا ضابطه تابع gof را مرتب و دسته بندی می کنیم:

$$g(f(x)) = 6 - 3(2x^2 + x) = 6 - 3f(x)$$



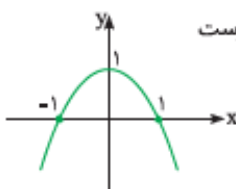
پس $g(x) = 6 - 3x$ است و نمودارش به صورت زیر است که فقط از ناحیه سوم نمی گذرد:

۱ ۲۶۲

با توجه به نمودار صورت سؤال، سهمی fog محور x ها را در دو نقطه $x=0$ و $x=2$ قطع کرده و نقطه رأس آن $A(1,1)$ است، پس $(fog)(x) = -x^2 + 2x$ است. در ضمن تابع خطی g محور x ها را در نقطه ۱ قطع می کند و عرض از مبدأ آن نیز ۱ است، پس $g(x) = -x + 1$ است. حالا برای پیدا کردن تابع f داریم:

$$g(x) = -x + 1 = t \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow f(g(x)) = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f(t) = -(1-t)^2 + 2(1-t) = -t^2 + 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 1$$



با توجه به نمودار تابع f ، فقط عبارت (پ) درست است.

۴ ۲۵۶

فرض می کنیم $2x - 3 = t$ باشد، بنابراین: $x = \frac{t+3}{2}$

$$\Rightarrow f(2x-3) = f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

حال عبارت به دست آمده را ساده می کنیم و در انتها به جای t مجدداً x قرار می دهیم:

$$f(t) = 4\left(\frac{t^2+6t+9}{4}\right) - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

پوش سرخس با قرار دادن $x=0$ در ضابطه $f(2x-3)$ داریم:

$$f(-3) = 4(0)^2 - 14(0) + 13 \Rightarrow f(-3) = 13$$

تنها گزینه ای که با قرار دادن $x=-3$ برابر ۱۳ می شود، گزینه (۴) است.

۴ ۲۵۷

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x - 3 = t \Rightarrow x = t + 3 \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(1-x) = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x) + 2}{1-2x+x^2+2-2x+2} \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

پوش سرخس می توانیم در تابع $f(x-3)$ به جای x عبارت $4-x$ قرار دهیم.

جوابیات

اگر ضابطه $f(\square)$ را داشته باشیم، برای مشخص کردن ضابطه $f(\bigcirc)$ از طریق عددگذاری، بهترین عدد از حل معادله $\square = \bigcirc$ به دست می آید.

پوش سرخس برای عددگذاری در این سؤال ابتدا باید عدد مناسب را به دست آوریم:

$$x - 3 = 1 - x \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در } f(x-3)} f(2-3) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 \Rightarrow f(-1) = 1$$

با قرار دادن $x=2$ در ضابطه $f(1-x)$ ، به $f(-1)$ می رسمیم و می دانیم $f(-1)=1$ است، پس گزینه ای نشان دهنده ضابطه $f(1-x)$ است که با قرار دادن $x=2$ در آن، حاصل برابر ۱ شود. در میان گزینه ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۴ ۲۵۸

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می کنیم:

$$fog(x) = (2x+1)g(x) + 6x = (2x+1)(2x-3) + 6x$$

$$= 4x^2 + 2x - 3$$

حالا با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 + 2x - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t+3}{2}\right) - 3 = (t+3)^2 + (t+3) - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 7t + 9$$

۲ ۳۶۳

 واضح است که $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ است، پس:

$$f(x^2 - x) = (x^4 - 2x^3 + x^2) + 5 = (x^2 - x)^2 + 5$$

 حالا به جای $x^2 - x$ می‌توانیم x بگذاریم، یعنی $f(x) = x^2 + 5$ است.

۴ ۳۶۴

 ابتدا ضابطه $f(\frac{x^2-2}{x}) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ را مرتب و دسته‌بندی می‌کنیم:

$$f(x - \frac{2}{x}) = (x^2 + \frac{4}{x^2} - 4) + (x - \frac{2}{x}) = (x - \frac{2}{x})^2 + (x - \frac{2}{x})$$

 حالا به جای $x - \frac{2}{x}$ می‌گذاریم x ، ببینید:

$$f(x) = x^2 + x$$

به چهره رنگه! نمونه‌های معروف تر و البته ساده‌تر این سوال رو اینطور مطرح می‌کنند:
 اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ در کدام بازه زیر محور x محاسبات؟

۲ ۳۶۵

 در ضابطه $fog(x)$ به جای x عدد ۱ می‌گذاریم:

$$f(g(1)) = \frac{5(1) - 2}{3(1) + 1} = \frac{3}{4} \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-1 + a}{-1 - 1} = \frac{3}{4} \Rightarrow -44 + 4a = -36 \Rightarrow a = 2$$

هایلایت

یافتن ضابطه تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب

 در بعضی از سوالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع f (تابع بیرونی) داده شده و ضابطه تابع g (تابع درونی) یعنی $g(x)$ را می‌خواهند.

برای حل این مدل سوالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

 ۱ در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ را قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

 ۲ تابع $f(g(x))$ به دست آمده را مساوی با تابع مرکب fog که در مسأله داده شده، قرار می‌دهیم و معادله حاصل را برحسب $g(x)$ حل می‌کنیم.

۲ ۳۶۶

 با توجه به ماشین داده شده، $g(f(x)) = 2x$ است. حال برای به دست آوردن $f(5)$ یک بار در تابع $(gof)(x)$ به جای x عدد ۵ می‌گذاریم و یک بار هم در تابع $g(x)$ به جای x ها، $f(5)$ می‌گذاریم:

$$g(f(5)) = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow 3f(5) + 4 = 10 \Rightarrow f(5) = 2$$

$$g(f(5)) = 3f(5) + 4$$

۳ ۳۶۷

 ابتدا ضابطه تابع‌های f و fog را با کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 4(x^2 + 4x + 4) + 2 = 4(x + 2)^2 + 2$$

$$fog(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2$$

 حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می‌دهیم و آن را با ضابطه fog در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 4(g(x) + 2)^2 + 2 \\ f(g(x)) = (x + 1)^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow 4(g(x) + 2)^2 = (x + 1)^2$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow \begin{cases} 2(g(x) + 2) = x + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \times \\ 2(g(x) + 2) = -x - 1 \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

۲ ۳۶۸

 بهتر است ابتدا ضابطه دو تابع f و fog را ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{2x + 2 - 1}{x + 1} = 2 - \frac{1}{x + 1}$$

$$fog(x) = \frac{2x}{x + 1} = \frac{2x + 2 - 2}{x + 1} = 2 - \frac{2}{x + 1}$$

 حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می‌دهیم و آن را با ضابطه fog داده شده در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2 - \frac{1}{g(x) + 1} \\ f(g(x)) = 2 - \frac{2}{x + 1} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{g(x) + 1} = \frac{2}{x + 1}$$

$$\Rightarrow g(x) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

۱ ۳۶۹

 ابتدا با کمک اتحاد مربع کامل، ضابطه توابع f و fog را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$f(g(x)) = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

 حال در تابع f ، به جای همه x ها، $g(x)$ می‌گذاریم:

$$f(g(x)) = (g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

 از طرفی در صورت سؤال $f(g(x)) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ است، پس:

$$(g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f + g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x + 1) = x^2 - 1 \\ (f + g)(x) = (x^2 - x - 2) + (-x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

۲ ۳۷۰

 چون ترکیب تابع $f(x)$ با خودش، تابعی خطی است، پس $f(x)$ تابعی خطی بوده و داریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

 با توجه به صورت سؤال $f(f(x)) = 4x - 3$ است، پس:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{\text{نظری}} a < 0 \Rightarrow a = -2$$

$$ab + b = -3 \Rightarrow -2b + b = -3 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

۲۷۳۳ ۲

دامنه تابع f برابر $x \leq 5$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای پیدا کردن دامنه تابع $f \circ g$ باید دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow x^2 + 4x \leq 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+5) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم دامنه تابع $f \circ g$ به صورت بازه $[-5, 1]$ است، پس:

$$a \times b = -5 \times 1 = -5$$

۲۷۳۴ ۲

ابتدا دامنه تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

حال باید جواب نامعادله $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را مشخص کنیم:

$$1) \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$2) \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \xrightarrow{2x^2 \geq 0} 1-x^2 < 0 \Rightarrow 1 < x^2$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \text{ یا } x = 0$$

با توجه به این که اشتراک جواب‌های به دست آمده از نامعادله برابر

$$D_{f \circ g} = \{x \neq \pm 1 \mid x = 0\} = \{0\}$$

$x = 0$ است، پس:

پس $x = \frac{1}{4}$ را در تابع $g \circ f$ قرار می‌دهیم:

$$g(f(\frac{1}{4})) = g(\frac{5}{3}) = \sqrt{\frac{5}{3} - (\frac{5}{3})^2} = \sqrt{\frac{5}{3}(1 - \frac{5}{3})} = \sqrt{-\frac{10}{9}}$$

پس گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) حذف می‌شوند.

۲۷۳۵ ۱

ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم. از آن جایی که عبارت $x + |x|$

به ازای $x > 0$ برابر $2x$ و به ازای $x \leq 0$ برابر صفر است، پس $D_f = \mathbb{R}$

است. در تابع کسری g نیز مخرج نباید صفر شود، پس $D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

است، بنابراین:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, \sqrt{x+|x|} \neq 4\}$$

تابع f به ازای $x \leq 0$ برابر صفر و به ازای $x > 0$ برابر $2x$ می‌شود، پس:

$$D_{g \circ f} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

پس چون $x = -1$ و $x = 8$ در تابع $g \circ f$ صدق نمی‌کنند؛

پس گزینه (۱) درست است.

پس $f(x) = -2x + 3$ است. حالا با توجه به این که $fog(x) = x^2 - x + 3$ است، سراغ پیدا کردن تابع $g(x)$ می‌رویم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = x^2 - x + 3 \\ f(g(x)) = -2g(x) + 3 \end{cases} \Rightarrow -2g(x) + 3 = x^2 - x + 3$$

$$\Rightarrow -2g(x) = x^2 - x \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

طول رأس این سهمی برابر $\frac{1}{2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})}$ و بیشترین مقدار آن برابر است با:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

۲۷۱ ۴

نمودار تابع fog محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۴ و صفر قطع کرده است و چون نقطه رأس آن $(2, -4)$ است، پس $fog(x) = x^2 - 4x$ می‌باشد. در ضمن $f(x) = 2x + 8$ است. حالا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2g(x) + 8 \\ f(g(x)) = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow 2g(x) + 8 = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 8) \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

۲۷۲ ۱

ابتدا دامنه توابع g و f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}; D_f = \mathbb{R} - \{1\}; g(x) = \frac{3x-4}{x+2}; D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid \frac{3x-4}{x+2} \neq 1\}$$

$$= \{x \neq -2 \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-2, 3\} \Rightarrow a+b = -2+3 = 1$$

به پوره دیگه! طراح می‌تونست اینجوری بپرسه:

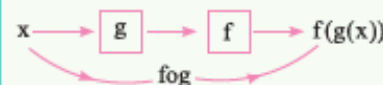
اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و دامنه تابع $f \circ f$ برابر $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، مقدار $a+b$

کدام است؟ جواب: $a+b = 0+1 = 1$

هابلایت

یافتن دامنه تابع مرکب

با توجه به نحوه تشکیل تابع fog مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر ورودی تابع f قرار می‌گیرد، پس دامنه تابع fog به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۳ ۲۷۹

در مرحله اول لازم است دامنه توابع f و g را با توجه به $-1 \leq x \leq 3$ به دست آوریم.

$$f(2x+1) = 3x - 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x-1}{2}} -2 \leq 2x \leq 6$$

$$\xrightarrow{+1} -1 \leq 2x+1 \leq 7 \Rightarrow D_f = [-1, 7]$$

$$g(x) = 4x - 3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_g = [-1, 3]$$

ضابطه $f(x)$ را هم پیدا کنیم وارد مرحله بعدی می‌شویم:

$$f(2x+1) = 3x - 2 \xrightarrow{\substack{2x+1=t \\ x=\frac{t-1}{2}}} f(t) = \frac{3t-3}{2} - 2 = \frac{3t-7}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x-7}{2}$$

سپس با توجه به تعریف، دامنه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-1, 3] \mid \underbrace{-1 \leq 4x-3}_{\text{I}} \leq \underbrace{7}_{\text{II}}\}$$

$$(II) \quad -1 \leq 4x-3 \leq 7 \xrightarrow{+3} 2 \leq 4x \leq 10 \xrightarrow{+4} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$(I) \cap (II) = [-1, 3] \cap [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] \Rightarrow D_{f \circ g} = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$$

۲ ۲۸۰

با توجه به شکل صورت سؤال، f تابعی خطی با ضابطه $f(x) = x+2$ و دامنه $[-2, 1]$ است، پس:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 1] \mid -2 \leq f(x) \leq 1\}$$

حال نامعادله $-2 \leq f(x) \leq 1$ را حل می‌کنیم:

$$-2 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $D_{f \circ f} = [-2, -1]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

نکته: به پوره دیکه! فراح می‌تونست همین سوالو اینپوری پیرسه، و تابع $y = (f \circ f)(x)$ با دامنه $[-2, 1]$ را در نظر بگیرد. دامنه تابع $y = (f \circ f)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ ۲۸۱

با توجه به نمودار صورت سؤال $g(x) = -\frac{1}{x}x + 2$ و دامنه آن برابر بازه

$[-2, 4]$ است. حالا دامنه تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}} : \frac{-x^2+6x-8}{-(x-2)(x-4)} > 0 \Rightarrow 2 < x < 4$$

حالا برای پیدا کردن دامنه تابع $f \circ g$ باید هر دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in [-2, 4]$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow 2 < -\frac{1}{x}x + 2 < 4 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{x}x < 2$$

$$\Rightarrow -4 < x < 0$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم $-2 \leq x < 0$ است که شامل دو عدد صحیح -2 و -1 است.

۴ ۲۷۶

ابتدا دامنه تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

$$g(x) = \log_7(x^2+2x) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_7(x^2+2x) \leq 3\}$$

بنابراین باید جواب نامعادله $\log_7(x^2+2x) \leq 3$ را مشخص کنیم:

$$\log_7(x^2+2x) \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq 7^3$$

$$\Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه $f \circ g$ برابر می‌شود با:

$$D_{f \circ g} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

پوش سریعتر: با قرار دادن $x = -2$ در تابع $f \circ g$ عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس $x = -2$ نباید در دامنه تابع باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

۱ ۲۷۷

ابتدا دامنه تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}} \Rightarrow -x^2+x+2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2$$

$$g(x) = (\frac{1}{x})^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < (\frac{1}{x})^x < 2\}$$

می‌دانیم همواره $-1 < (\frac{1}{x})^x$ است. پس کفایت نامعادله $(\frac{1}{x})^x < 2$ را حل کنیم:

$$(\frac{1}{x})^x < 2 \Rightarrow (x^{-2})^x < 2 \Rightarrow x^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

پس دامنه $f \circ g$ برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\} = (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

پوش سریعتر: $x = 0$ در تابع $f \circ g$ صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شود. $x = 1$ نیز در تابع $f \circ g$ صدق می‌کند، پس جواب گزینه (۱) است.

۳ ۲۷۸

ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

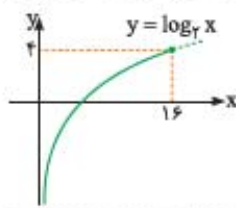
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \mid -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \mid -1 \leq \tan x \leq 1, \tan x \neq 0\}$$

با توجه به این که $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ است، از $-1 \leq \tan x \leq 1$ و $\tan x \neq 0$ نتیجه می‌گیریم

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ است، بنابراین دامنه تابع $f \circ g$ به صورت $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4})$ است.

پس دامنه تابع fog برابر بازه $A = (0, 8)$ است. بُرد تابع $g(x)$ در بازه $(0, 8)$ برابر $(0, 16)$ است. حالا برای پیدا کردن محدوده بُرد تابع fog، می‌توانیم نمودار تابع f را در بازه $(0, 16]$ رسم کنیم:



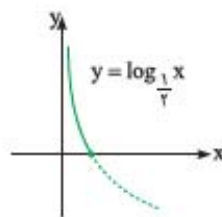
$\Rightarrow$ بُرد تابع fog $B = (-\infty, 4]$
پس $A \cap B = (0, 4]$ است که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

۱ ۲۸۶

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)$$

می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ است، پس $0 < \sin^2 x \leq 1$ است. در ضمن چون $\sin^2 x$ جلوی لگاریتم قرار دارد، پس $0 < \sin^2 x \leq 1$ است. حالا به نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ توجه کنید:

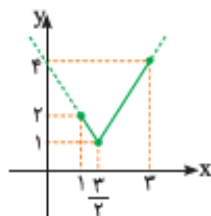


چون در تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)$ عبارت جلوی لگاریتم در بازه $(0, 1]$ قرار دارد، پس بُرد تابع f در این بازه به صورت بازه $[0, +\infty)$ است.

۳ ۲۸۷

می‌دانیم $0 < \sin^2 x \leq 1$ است، پس:

$$0 < 2 \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2 \sin^2 x \leq 3$$



حالا باید بُرد تابع f را به ازای ورودی $[1, 3]$ پیدا کنیم:

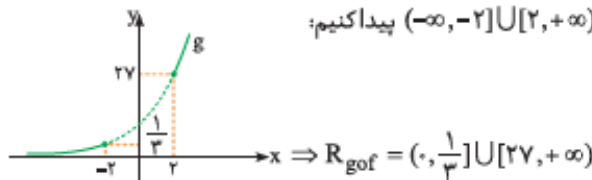
$$\Rightarrow R_{fog} = [1, 4]$$

دام‌تستی اگر ابتدا و انتهای بازه $[1, 3]$ رو در تابع f قرار بدی، بُرد تابع fog رو بازه $[2, 4]$ به دست می‌اری که غلطه!

۴ ۲۸۸

می‌دانیم $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ است. پس: $f(x) = \log_x^x + \frac{1}{\log_2 x}$

در ضمن می‌دانیم مجموع هر عدد حقیقی با معکوسش در بازه $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, -2]$ است. حالا باید بُرد تابع g را به ازای ورودی $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ پیدا کنیم:



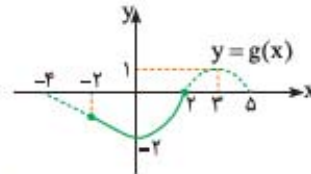
تجربیات

- ۱ اگر $x > 0$ باشد: $x + \frac{1}{x} \geq 2$
- ۲ اگر $x < 0$ باشد: $x + \frac{1}{x} \leq -2$

۳ ۲۸۳

برای پیدا کردن بُرد fog، بُرد تابع f یعنی بازه $[-2, 2]$ را به عنوان دامنه تابع g در نظر بگیریم:

با توجه به نمودار تابع g در بازه $[-2, 2]$ ، بُرد تابع g در این بازه برابر $[-2, 0]$ است که شامل ۳ عدد صحیح ۰ و ۱ و ۲ است.



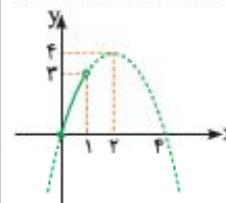
تجربیات

یافتن بُرد تابع مرکب

برای به دست آوردن بُرد تابع مرکب fog به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ابتدا بُرد تابع درونی یعنی g را به دست می‌آوریم.
- ۲ بُرد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع بیرونی یعنی f در نظر می‌گیریم.
- ۳ سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنه جدید به دست می‌آوریم.

۲ ۲۸۳



می‌دانیم $0 \leq 2x - [2x] < 2$ است. بنابراین باید بُرد $g(x) = -x^2 + 4x$ را به ازای ورودی $[0, 1)$ به دست آوریم:

$$\Rightarrow \text{بُرد تابع } g = [0, 3)$$

۳ ۲۸۴

ابتدا ضابطه g را ساده می‌کنیم و سپس تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{-2(x+1) + 3}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

از طرفی می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ پس $0 \leq x - [x] + 1 < 2$ بنابراین:

$$0 < [x] - x + 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 1$$

پس بُرد تابع fog به صورت $[1, +\infty)$ است.

پروژه سرور چون $-1 < [x] - x \leq 0$ است، می‌توانستیم نمودار تابع $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ را رسم کنیم و بُرد آن را در بازه $(-1, 0]$ به دست آوریم.

۳ ۲۸۵

دامنه تابع $f(x) = \log_x^x$ برابر $x > 0$ و دامنه تابع $g(x) = \lambda x - x^2$ برابر $\mathbb{R}$ است. حالا دامنه تابع fog را پیدا می‌کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow \lambda x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \lambda$$

۳۹۳ ۴

 ابتدا دامنه تابع y را به دست می آوریم:

$$f(x+1) - f(2-x) > 0 \Rightarrow f(x+1) > f(2-x)$$

$$\Rightarrow x+1 < 2-x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

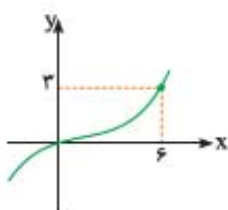
 از طرفی دامنه تابع f برابر $[-4, 5]$ است:

$$-4 \leq x+1 \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 4 \quad (2)$$

$$-4 \leq 2-x \leq 5 \Rightarrow -6 \leq -x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 6 \quad (3)$$

 از اشتراک ۳ بازه بالا، محدوده x برابر $[-3, 0.5]$ به دست می آید.

۳۹۴ ۴

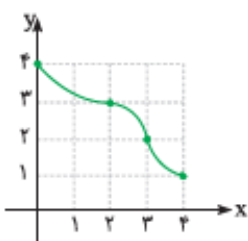

 از آن جایی که f تابعی اکیداً صعودی است و از نقطه $A(6, 3)$ می گذرد، نمودار آن را به صورت مقابل فرض می کنیم. با توجه به نمودار، به ازای $x \leq 6$ رابطه $f(x) \leq 3$ برقرار است، پس:

$$f(g(x)) \leq 3 \Rightarrow g(x) \leq 6 \Rightarrow x^2 - x \leq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

۴ به چرخه! طراح توی همین سوال، میتونست اینجوری پرسه درامنه تابع $y = \sqrt{3 - (f \circ g)(x)}$ کراست؟

۳۹۵ ۲


 با توجه به این که f تابعی اکیداً نزولی، $D_f = [1, 4]$ و $R_f = [1, 4]$ و $f(3) = 2$ و $f(2) = 3$ است، نمودار f را به صورت مقابل فرض می کنیم و با توجه به مقادیر تابع داریم:

$$1 \leq f(f(x)) \leq 2 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

 پس مجموعه نامعادله شامل سه عدد صحیح $x = 0, 1, 2$ است.

۳۹۶ ۲

 تابع f از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y = x$ و $y = \sqrt{x} - 2$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است:

$$f(f(x)) \leq f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

 از طرفی به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، باید $x \geq 0$ باشد.

 حالا دامنه تابع $f \circ f(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(x) \in D_f \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) \geq 0$$

همواره مثبت

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

 از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می گیریم $1 \leq x \leq 2$ است که شامل اعداد صحیح $x = 1$ و $x = 2$ می باشد.

۳۹۷ ۳

به بررسی عبارت ها می پردازیم:

$$\text{الف) } \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 3 \\ 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} -1 \end{cases} \Rightarrow \text{fog} = \{(0, 3), (3, -1)\}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 3 \end{cases} \Rightarrow \text{fof} = \{(0, 3), (1, 0), (3, 1)\}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 2 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 3 \end{cases} \Rightarrow \text{gof} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

تابع fog نزولی و توابع fof و gof غیریکنوا هستند.

۳۹۸ ۱

$$f(x+2) - f(3-2x) > 0 \Rightarrow f(x+2) > f(3-2x)$$

$$\Rightarrow x+2 > 3-2x \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

 از طرفی دامنه تابع f برابر بازه $[-6, 4]$ است:

$$-6 < x+2 \leq 4 \Rightarrow -8 < x \leq 2 \quad (2)$$

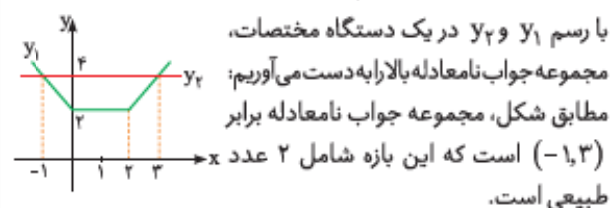
$$-6 < 3-2x \leq 4 \Rightarrow -9 < -2x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq x < \frac{9}{2} \quad (3)$$

 از اشتراک ۳ بازه بالا، عدد x برابر $(\frac{1}{3}, 2]$ به دست می آید که این بازه تنها شامل دو عدد صحیح است.

۳۹۹ ۲

$$f(4-|x|) - f(|x-2|) > 0 \Rightarrow f(4-|x|) > f(|x-2|)$$

$$\Rightarrow 4-|x| > |x-2| \Rightarrow \underbrace{|x|}_{y_1} + \underbrace{|x-2|}_{y_2} < 4$$


 با رسم y_1 و y_2 در یک دستگاه مختصات،

مجموعه جواب نامعادله بالا را به دست می آوریم:

مطابق شکل، مجموعه جواب نامعادله برابر

 $(-1, 3)$ است که این بازه شامل ۲ عدد

طبیعی است.

۴۰۰ ۱

$$1) f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Rightarrow (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 2$$

در ضمن چون دامنه تابع مجموعه ای از مقادیر منفی است، پس:

$$2) m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$3) -3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow \frac{a < 0, \Delta < 0}{\text{همواره برقرار است.}}$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) مجموعه جواب نامعادله برابر

$$\left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2, \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right)$$

 یعنی $m = -1$ در این بازه قرار دارد.

مجموعه کتاب‌های آی کیو قرن جدید

• ویژه کنکور ۱۴۰۵ •



درسنامه

ریاضیات تجربی جامع

دهم | یازدهم | دوازدهم

آموزش تیپ تست‌های کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمی

تالیف
جدید

فهرست

۱۴۲ کاربرد مشتق

۱۵۸ مجموعه، الگو و دنباله

۱۷۰ توان گویا و عبارت جبری

۱۷۸ هندسه پایه

۱۸۹ هندسه تحلیلی

۲۱۲ آمار

۲۱۹ شمارش بدون شمردن

۲۲۸ احتمال

تابع

۳۲ معادله و تابع درجه دوم

۴۴ معادله و نامعادله

۵۴ قدرمطلق و برکت

۶۳ تابع نمایی و لگاریتمی

۷۳ مثلثات

۹۷ حد و پیوستگی

۱۱۹ مشتق

تابع

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیازهای این فصل، فصل‌های توان و عبارت جبری، معادله و نامعادله، معادله و تابع درجه دوم و کمی هم مثلثات است. و دانستن تابع هم پیش‌نیاز موضوع‌های لگاریتم و تابع نمایی، نمودار توابع مثلثاتی، حد و پیوستگی، مشتق و کاربرد مشتق است.

توصیه: سعی کنید توجه ویژه‌ای به رسم توابع مختلف داشته باشید. در کنکورهای اخیر، طراح علاقه بسیار زیادی به مفاهیم و همچنین سؤالات ترکیبی داشته. بنابراین اگر می‌خواهید خیالتون از این فصل راحت باشه، باید راه‌حل‌های علمی و اصولی رو یاد بگیرید و از اونا برای حل تست‌ها استفاده کنید. البته در کنارش می‌تونید (به عنوان روش دوم) کارهای سریع‌تر مثل استفاده از گزینه‌ها و عددگذاری رو هم تمرین کنید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۶	۴	۳	۴	۴	۴	۵	۴

درس مفاهیم تابع

درس

تابع و تشخیص آن

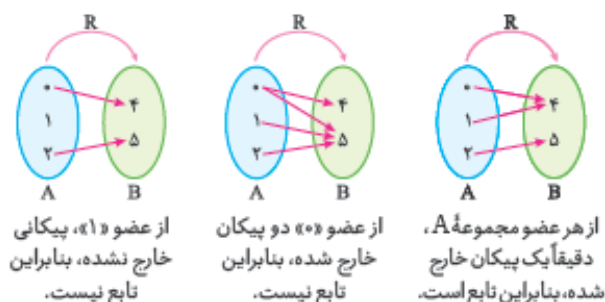
۱ اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، دارای مؤلفه اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفه دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

مثال اگر رابطه $f = \{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

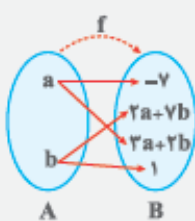
چون رابطه داده شده یک تابع است، باید مؤلفه‌های دوم در زوج مرتب‌های $(3, a+2b)$ و $(3, 7)$ و همچنین $(5, 4)$ و $(5, 2a-b)$ برابر باشند، پس:

$$\begin{cases} a+2b=7 \\ 2a-b=4 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=2$$

۲ اگر یک رابطه به صورت نمودار پیکانی بیان شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.



تست اگر نمودار مقابل نمایش یک تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟



- کدام است؟
- ۴ (۱)
۲ (۲)
-۴ (۳)
-۲ (۴)

۴ نمایش زوج مرتبی نمودار پیکانی داده شده به صورت:

$$f = \{(a, -7), (a, 2a+7b), (b, 2a+7b), (b, 1)\}$$

است و برای آن که رابطه فوق یک تابع باشد باید روابط زیر

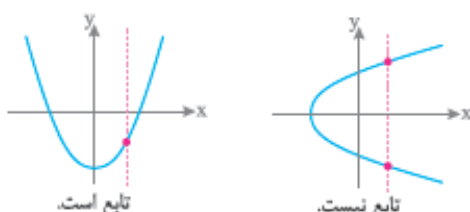
برقرار باشد:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2a+7b &= -7 \Rightarrow b=1, a=-3 \Rightarrow a+b=-2 \\ 2) \quad 2a+7b &= 1 \end{aligned}$$

۳ یک نمودار به شرطی متعلق به یک تابع است که هر خط موازی محور y ها،

نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

به نمودارهای زیر دقت کنید:



می‌دانیم به تابع‌هایی که برای x ‌های مختلف، ضابطه‌های مختلف دارند تابع‌های چند ضابطه‌ای می‌گویند. روابطی که به صورت چند ضابطه‌ای بیان می‌شوند، در صورتی تابع هستند که:

- دامنه‌های ضابطه‌ها با یکدیگر اشتراکی نداشته باشند.
- در صورت وجود اشتراک بین دامنه‌های ضابطه‌ها، به ازای x ‌های مشترک، باید y ‌های یکسان داشته باشند.
- هر یک از ضابطه‌ها در بازه خود تابع باشند.

مثلاً رابطه $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 2 \\ x+2 & ; x \leq 2 \end{cases}$ تابع نیست، چون $x=2$ در دامنه دو ضابطه وجود دارد ولی مقادیر y یکسانی تولید نمی‌کند:

ضابطه بالا: $f(2) = 2-1 = 1$

ضابطه پایین: $f(2) = 2+2 = 4$

تست اگر رابطه زیر تابع باشد، واسطه حسابی a و b کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & ; x \geq 1 \\ a & ; x = 1 \\ |x| + \frac{3b}{x} & ; x \leq 1 \end{cases}$$

(۱) ۲/۵ (۲) ۳/۵ (۳) ۴/۵ (۴) ۵/۵

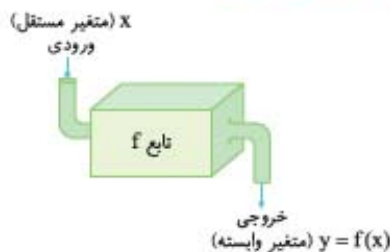
۴ چون $x=1$ در دامنه هر سه ضابطه قرار دارد، پس باید به ازای $x=1$ مقدار سه ضابطه یا هم برابر شود.

$$x=1: (1)^2 + 3(1) = a = |1| + \frac{3b}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{a+b}{2} = \frac{4+1}{2} = 2.5$$

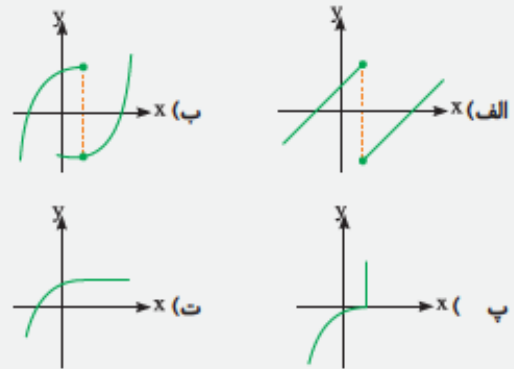
مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد [هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی‌های یکسان باشند].



منظور از $f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه $x=a$ است. بنابراین برای محاسبه مقدار تابع در $x=a$ ، باید در ضابطه تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم. اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان دهنده عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

تست چه تعداد از نمودارهای زیر نشان دهنده یک تابع است؟



(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱ در نمودارهای (الف)، (ب) و (پ) خطی موازی محور y ‌ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس این نمودارها نمی‌توانند نشان دهنده یک تابع باشند.

۲ برای تشخیص تابع بودن رابطه‌هایی که به صورت معادله بیان می‌شوند، می‌توان از مثال نقض استفاده کرد؛ یعنی اگر به ازای یک x بیش از یک مقدار برای y به دست بیاید، آن رابطه مربوط به یک تابع نیست.

مثال آیا رابطه $x^2 + y^2 = 4$ نشان دهنده یک تابع است؟

اگر به جای x عدد صفر را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=0 \Rightarrow 0^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

بنابراین این رابطه مربوط به یک تابع نیست چون یک x پیدا کردیم که به ازای آن بیش از یک جواب برای y به دست آمد.

تست کدام رابطه، یک تابع نیست؟

$$(۱) |x| + y^2 = 0 \quad (۲) |x-1| + |y-2| = 0$$

$$(۳) f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 1 \\ 2x & ; x \leq 1 \end{cases} \quad (۴) y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

۳ در گزینه (۳) چون $x=1$ می‌تواند در هر دو ضابطه قرار بگیرد ولی اعداد یکسانی تولید نمی‌کند، پس تابع نیست. حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

می‌دانیم جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر می‌شود که هر دو برابر صفر باشند؛ پس در گزینه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$(۱) \begin{cases} |x|=0 \Rightarrow x=0 \\ y^2=0 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع است}$$

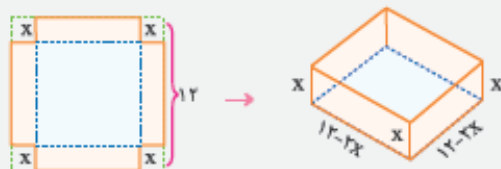
$$(۲) \begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |y-2|=0 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع است}$$

در گزینه (۴) چون $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x+1|$ است و به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس این رابطه نیز نشان دهنده یک تابع است.

تست از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع ۱۲ سانتی متر می‌خواهیم یک جعبه در باز بسازیم. برای این منظور از چهار گوشه این مقوا چهار مربع به ضلع x بریده و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام یک از توابع زیر، حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟

$$\begin{aligned} V &= x(12-2x)^2 (2) & V &= 2x(12-x)^2 (1) \\ V &= x^2(12-2x) (4) & V &= x^2(12-x) (3) \end{aligned}$$

۲ با توجه به شکل، حجم جعبه را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow V = x(12-2x)^2$$

دامنه تابع

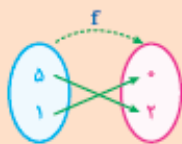
به مجموعه ورودی‌های تابع f ، دامنه تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنه تابع



$$D_f = [2, 4]$$

نمودار در دستگاه مختصات؛
تصویر نمودار روی محور x ها



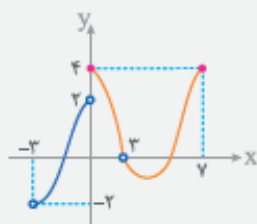
$$D_f = \{1, 5\}$$

نمودار ون (پیکانی)؛
مجموعه‌ای که از اعضای آن،
پیکان خارج شده

$$f = \{(1, 2), (5, 0)\} \Rightarrow D_f = \{1, 5\}$$

زوج مرتبی؛
مجموعه همه مؤلفه‌های اول

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. دامنه تابع f کدام است؟



$$[-3, 7] \cup [4, 7] (1)$$

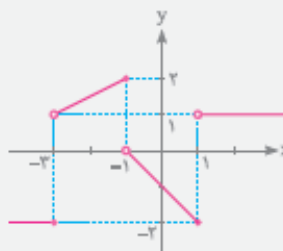
$$(-3, 7] (2)$$

$$[-2, 4] (3)$$

$$(-3, 7] - \{3\} (4)$$

۴ با توجه به شکل، تصویر نمودار روی محور x برابر بازه $D_f = (-3, 7] - \{3\}$ است. پس:

تست شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\frac{f(1)+f(f(-1))}{f(-5)}$ کدام است؟



- کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{2}$
 - (۲) -2
 - (۳) $\frac{1}{2}$
 - (۴) 2

۳ با توجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه‌های خواسته شده در کسر را جای‌گذاری می‌کنیم:

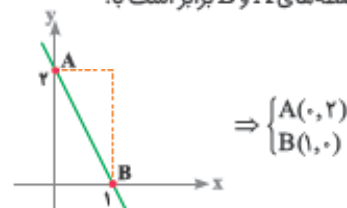
$$\frac{f(1)+f(f(-1))}{f(-5)} = \frac{-2+f(2)}{-2} = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات یا توابعی دیگر

در مورد نقاط برخورد یک تابع با محورهای مختصات یا برخورد دو تابع، به نکات زیر توجه کنید:

- ۱ عرض نقطه برخورد تابع $f(x)$ با محور x ها برابر صفر است.
- ۲ طول نقطه برخورد تابع $f(x)$ با محور y ها برابر صفر است.

مثلاً در نمودار تابع زیر مختصات نقطه‌های A و B برابر است با:



$$\Rightarrow \begin{cases} A(0, 2) \\ B(1, 0) \end{cases}$$

اگر نمودار تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول a عرض b قطع کنند، در این صورت مقدار این دو تابع در نقطه برخورد با هم برابر است، یعنی:

$$f(a) = g(a) = b$$

تست خط $f(x) = -2x + 1$ و سهمی به معادله $g(x) = x^2 + bx + c$ در دو

نقطه به طول‌های ۱ و ۲ متقاطع‌اند. کدام است؟

$$4 (4) \quad 3 (3) \quad 2 (2) \quad 1 (1)$$

۳ چون این دو نمودار در نقاط ۱ و ۲ متقاطع‌اند، پس:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow -2 \times 1 + 1 = 1 + b + c \Rightarrow b + c = -2$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow -2 \times 2 + 1 = 4 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = -7$$

$$\Rightarrow b = -5, c = 3$$

تابع نویسی

در بعضی از مسائل می‌خواهیم مساحت، محیط، حجم و ... از یک شکل هندسی را برحسب تابعی از یک متغیر بیان کنیم. در این سوالات ابتدا با توجه به شکل مسئله همه متغیرهای موجود در مسئله را برحسب متغیر خواسته شده به دست می‌آوریم و سپس در فرمول مساحت، محیط و ... جای‌گذاری می‌کنیم.

دامنه توابع معروف

برای تعیین دامنه تابع f با داشتن ضابطه آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱ دامنه تابع چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x) = 2x^2 + 4x^2 - x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۲ چون عبارت‌های کسری به ازای ریشه مخرج، تعریف نشده هستند؛ پس دامنه آن‌ها برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

۳ در رادیکال‌های با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$$y = \sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

۴ چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} \mid (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$y = x + \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

۵ چون $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین $(k \in \mathbb{Z})$:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

$$y = 5 + 2\cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

۶ در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$$y = \log \begin{cases} > 0 \\ > 0, \neq 1 \end{cases}$$

$$y = \log_{(3-x)}(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 3-x > 0 \Rightarrow 3 > x \Rightarrow D_f = (1, 2) \cup (2, 3) \\ 3-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

تذکره ۱ هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطه تابع را ساده کنید.

تذکره ۲ در توابع چندضابطه‌ای، دامنه تابع از اجتماع دامنه همه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

مثلاً برای به دست آوردن دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{1-x^2}$ باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

اما اگر ابتدا تابع را ساده کنیم به $y = \frac{1}{1-x}$ تبدیل می‌شود که دامنه آن به اشتباه $\mathbb{R} - \{1\}$ به دست می‌آید!

تست دامنه تابع $f(x) = \frac{2+x}{x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ می‌باشد

حاصل $a+2b$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & \text{صفر} \end{matrix}$$

۴ چون دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است، پس $x=2$ ریشه مضاعف مخرج تابع f است، پس مخرج به صورت $(x-2)^2$ می‌باشد،

$$\text{در نتیجه: } x^2+ax+b = (x-2)^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow a=-4, b=4$$

$$\text{پس } a+2b = -4+2 \times 4 = 4 \text{ است.}$$

تست دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ به صورت بازه $[a, b]$ است.

مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

۴ باید عبارت زیر هر یک از رادیکال‌ها بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{x-1} \Rightarrow 4 \geq x-1 \Rightarrow 5 \geq x \end{cases}$$

بنابراین دامنه تابع f به صورت بازه $[1, 5]$ است و در نتیجه $a+b=6$ است.

تست دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ با ضابطه $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} \mathbb{R} - \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \emptyset & \mathbb{N} \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

۳ عبارت $-\sin^2 \pi x$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد؛ پس باید $-\sin^2 \pi x \geq 0$ باشد. در ضمن می‌دانیم $-\sin^2 \pi x$ عبارتی کوچک‌تر یا مساوی صفر است، پس باید $-\sin^2 \pi x = 0$ باشد:

$$-\sin^2 \pi x = 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi \Rightarrow x = k$$

پس x می‌تواند همه اعداد صحیح باشد؛ یعنی $D_f = \mathbb{Z}$ است.

تست دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{1-\log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

$$\begin{matrix} (1, 1] & [1, 1] & [2, 1] & (1, 2] \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

۴ باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و $1-\log(x-1)$ نامنفی باشد:

$$1) \ 0 < x-1 \Rightarrow 1 < x$$

$$2) \ 0 \leq 1-\log(x-1) \Rightarrow \log(x-1) \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 10 \Rightarrow x \leq 11$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده $D_f = (1, 11]$ است.

میانبر با جای‌گذاری $x=11$ عبارت زیر رادیکال برابر صفر و عبارت جلوی لگاریتم مثبت می‌شود، پس گزینه (۴) درست است.

میانبر هنگام یافتن دامنه توابع، در صورتی که گزینه‌ها به صورت بازه بیان شده باشد، می‌توانیم با عددگذاری مناسب از گزینه‌ها، جواب را به دست آوریم. در انتخاب عدد باید دقت کنیم که این عدد باعث تفاوت در گزینه‌ها شود.

تست دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} (0, 2] & (0, 2) & (-\infty, 2] - \{0\} & (-\infty, 2] \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}$$

۱ عدد $x=1$ در گزینه‌های (۳) و (۴) وجود دارد که باعث منفی شدن عبارت زیر رادیکال می‌شود:

$$x=1 \Rightarrow \text{در تابع صدق نمی‌کند.}$$

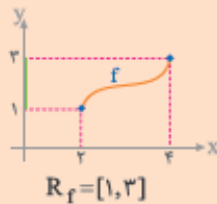
پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند. یکی از تفاوت‌های بین گزینه (۱) و گزینه (۲) عدد $x=2$ است که در بازه گزینه (۱) قرار دارد ولی در بازه گزینه (۲) وجود ندارد.

$$x=2 \text{ در دامنه تابع بوده } \Rightarrow \text{در تابع صدق می‌کند.} \Rightarrow x=2$$

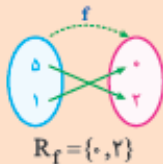
پس گزینه (۲) نادرست است و گزینه (۱) پاسخ صحیح است.

قدرمطلق، جزء صحیح، رادیکال با فرجه فرد، سینوس و کسینوس شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند.

مشخص کردن بُرد تابع



نمودار در دستگاه مختصات؛
تصویر نمودار روی محور y ها



نمودار ون (پیکانی)؛
مجموعه‌ای که به اعضای آن
پیکان وارد شده

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\} \Rightarrow R_f = \{2\}$$

زوج مرتبی؛
مجموعه همه مؤلفه‌های دوم



تست نمودار تابع f به صورت زیر است.
بُرد تابع f کدام است؟

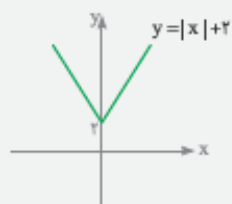
- (۱) $(-\infty, 3] - \{-1, 1\}$
- (۲) $(-1, 1) \cup (1, 3]$
- (۳) $(-\infty, 1) \cup (1, 3]$
- (۴) $(-\infty, 3]$

۴ با توجه به شکل، تصویر نمودار روی محور y ها برابر بازهٔ $(-\infty, 3]$ است، پس: $R_f = (-\infty, 3]$

یافتن بُرد تابع از روی ضابطه

برای تشخیص بُرد تابع از روی ضابطه، یکی از راه‌ها رسم شکل و استفاده از تصویر نمودار روی محور y هاست.

مثال بُرد تابع $f(x) = |x| + 2$ را به دست آورید.



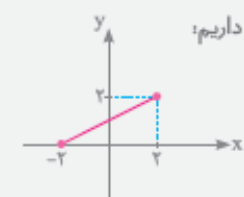
برای تعیین بُرد تابع $f(x)$ نمودار را رسم می‌کنیم و داریم:

$$\Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

بُرد توابع خطی در حالت کلی برابر با $\mathbb{R}$ است. اما اگر دامنهٔ تابع محدود شده باشد.

می‌توانیم مقدار تابع را در نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه به دست آوریم و آن دو نقطه را به هم متصل کنیم.

مثال بُرد تابع $f(x) = \frac{1}{x}x + 1$ با دامنهٔ $[-2, 2]$ را به دست آورید.



ابتدا $f(-2)$ و $f(2)$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 2]$$

تست دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۳ رادیکال با فرجهٔ فرد شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند، پس برای تعیین دامنهٔ تابع f می‌توانیم دامنهٔ $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ را به دست آوریم؛ پس:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$$
یافتن دامنهٔ توابع ساخته شده با $f(x)$

وقتی نمودار تابع f را در اختیار داریم، باید به موارد زیر توجه کنیم:

وضعیت x

۱ منظور از $x > 0$ ، قسمت‌های سمت راست محور y است.

۲ منظور از $x < 0$ ، قسمت‌های سمت چپ محور y است.

وضعیت $f(x)$

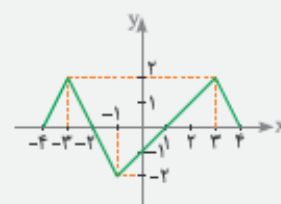
۱ منظور از $f(x) > 0$ ، قسمت‌های بالای محور x است.

۲ منظور از $f(x) < 0$ ، قسمت‌های پایین محور x است.

توجه منظور از $f(x) = 0$ ، نقاط برخورد نمودار f با محور x است.

در بعضی از سؤالات، ضابطه یا نمودار تابع f را به ما می‌دهند و از ما دامنهٔ تابع $\sqrt{f(x)}$ یا $\sqrt{xf(x)}$ یا ... را می‌خواهند. در این سؤالات باید با توجه به ضابطه یا نمودار داده شده، مشخص کنیم عبارت زیر رادیکال در کدام ناحیه بزرگتر یا مساوی صفر است.

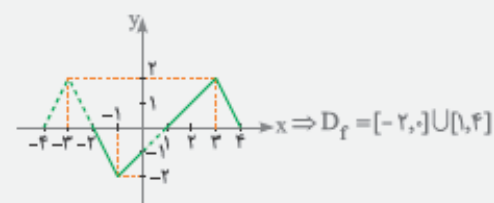
مثال اگر نمودار تابع f به صورت



زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را تعیین کنید.

برای تعیین دامنهٔ $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; f(x) \geq 0 & \text{راست و بالای محور } x \text{ ها} \\ x \leq 0; f(x) \leq 0 & \text{چپ و پایین محور } x \text{ ها} \end{cases}$$



بُرد تابع

به مجموعهٔ خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

تست بُرد تابع $f(x) = x|x| - 2x$ در بازه $(-2, 2)$ کدام است؟

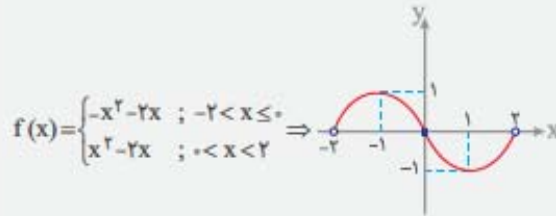
(۱) $(-2, 2)$

(۲) $[-1, 1]$

(۳) $(0, +\infty)$

(۴) $[-3, 3]$

۲ ضابطه f را در ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل برد تابع f برابر $[-1, 1]$ است.

برای تعیین برد توابع کسری روش ثابتی وجود ندارد ولی به کمک برخی نامساوی‌ها می‌توانیم بُرد بعضی از این توابع کسری را به دست آوریم.

۱ عبارات $\frac{x^2}{x^2+1}$ ، $\frac{|x|}{|x|+1}$ و $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$... همگی نامنفی بوده و از یک کوچکتر هستند، [پهن صورت کسر کوچکتر از مخرج است] پس:

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 1, 0 \leq \frac{|x|}{|x|+1} < 1, 0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$$

دقت کنید که همه این کسرها به ازای $x=0$ مقدارشان صفر می‌شود، به همین خاطر برای $x=0$ علامت مساوی قرار دادیم ولی چون صورت و مخرج مساوی نیستند، برای عدد یک علامت مساوی نمی‌گذاریم.

۲ عبارات $\frac{1}{x^2+1}$ ، $\frac{1}{|x|+1}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$... همگی مثبت و از یک کوچکتر هستند [صفر نمی‌شوند] و به ازای $x=0$ برابر یک می‌شوند، بنابراین:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1, 0 < \frac{1}{|x|+1} \leq 1, 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

تست برد تابع $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ کدام است؟

(۱) $(0, 2]$

(۲) $[1, 2)$

(۳) $[2, +\infty)$

(۴) $[1, +\infty)$

۲ ابتدا صورت کسر را به صورت $\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$ می‌نویسیم و سپس کسر را تفکیک می‌کنیم:

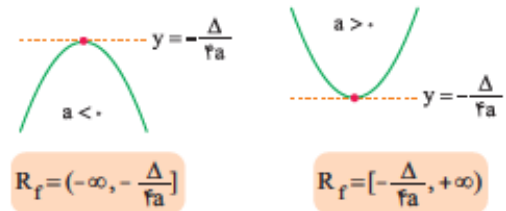
$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + 1$$

همچنین واضح است که $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 1$ است، پس:

$$1 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + 1 < 2 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 2$$

پس برد این تابع به صورت بازه $[1, 2)$ است. $R_f = [1, 2)$

برای یافتن برد توابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، می‌توانیم عرض رأس سهمی را به دست آوریم، سپس با توجه به علامت a برد تابع را تعیین کنیم:



تست برد تابع $f(x) = (3x+1)^2 - (2x-1)^2$ کدام است؟

(۱) $[-5, +\infty)$

(۲) $(-\infty, 5]$

(۳) $[5, +\infty)$

(۴) $(-\infty, -5]$

۱ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = (3x+1)^2 - (2x-1)^2 = (9x^2 + 6x + 1) - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 5x^2 + 10x \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times 5} = -1$$

$$\Rightarrow f(-1) = 5(-1)^2 + 10(-1) = -5$$

در ضمن چون علامت ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالاست و برد آن برابر $[-5, +\infty)$ است.

برای یافتن بُرد توابع چندضابطه‌ای باید بُرد تک تک ضابطه‌ها را به دست آورده و بین آن‌ها اجتماع بگیریم.

تست بُرد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -x-1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

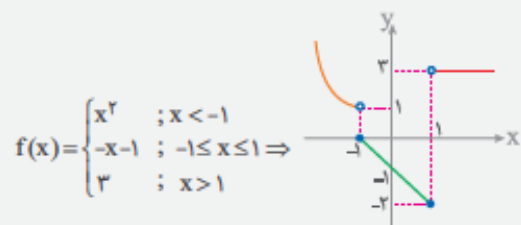
(۱) $\mathbb{R} - [0, 1)$

(۲) $[-2, 0] \cup (1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -2] \cup [0, 1)$

(۴) $[-2, +\infty)$

۲ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع f به صورت بازه $[-2, 0] \cup (1, +\infty)$ است.

برای تعیین برد توابع شامل قدرمطلق، می‌توانیم تابع را در ریشه‌های داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم و برد تابع حاصل را بیابیم.

تست دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. چه تعداد از

موارد زیر دو تابع f, g مساوی‌اند؟

الف) $f(x) = 2 \log x$ و $g(x) = \log x^2$

ب) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x) = 1$

ج) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = x$

د) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

۱ به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) $D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$

ب) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

ج) $D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

د) $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f = g$

برای بررسی دقیق‌تر عبارت (د) ضابطه توابع موجود در این گزینه را ساده می‌کنیم تا برابر بودن آن‌ها را نشان دهیم:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

برابری دو تابع

در حالت کلی دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

۲ برای هر x از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

به عبارت دیگر برای این که دو تابع مساوی باشند، باید دامنه‌های دو تابع برابر بوده و ضابطه‌هایشان بعد از ساده کردن یکسان باشد.

مثلاً دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^2}{x}$ با هم مساوی نیستند، چون دامنه یکسانی ندارند، هرچند به ظاهر، پس از ساده کردن ضابطه g ، همان ضابطه f به دست می‌آید.

$$\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{x^2}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

ولی دو تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x}{x^2}$ با هم مساوی‌اند، چون دامنه

هر دو تابع برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است و ضابطه آن‌ها نیز برای هر $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ یکسان است:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

تذکر ممکن است دو تابع f و g دارای دامنه و برد یکسان باشند، ولی خود توابع با هم مساوی نباشند.

مثلاً دامنه هر دو تابع $f = \{(1, 2), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 4), (3, 2)\}$ برابر $\{1, 3\}$ و برد آن‌ها $\{2, 4\}$ است، ولی این دو تابع برابر نیستند.

انتقال و تبدیل نمودار تابع

درس

انتقال نمودار $y=f(x)$

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای انتقال افقی و عمودی آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است:

۱ $y=f(x)+k$: نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور y انتقال می‌دهیم.

اگر $k > 0$ باشد، منحنی به سمت بالا و اگر $k < 0$ باشد منحنی به سمت پایین می‌رود.



۲ $y=f(x+k)$: نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور x انتقال می‌دهیم.

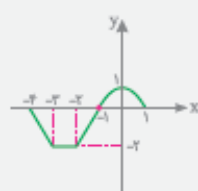
اگر $k > 0$ باشد، منحنی به سمت چپ و اگر $k < 0$ باشد، منحنی به سمت راست می‌رود.



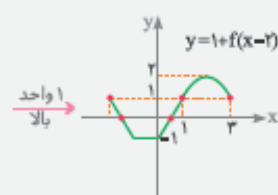
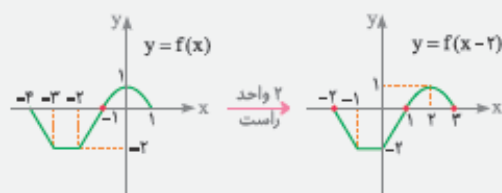
مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت

زیر است. نمودار تابع $y=1+f(x-2)$

را رسم کنید.



نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-2)$ به دست آید، سپس آن را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=1+f(x-2)$ برسیم:



تست نمودار تابع $y = (x+1)^2$ را ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم و سپس آن را با ضریب ۳ در راستای افقی منقبض می‌کنیم. نمودار حاصل و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-1, 1$ ۲) $0, 1$ ۳) $0, -1$ ۴) $-1, 0, 1$

۲ تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$$y = (x+1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = (x-1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 3x} y_{\text{new}} = (3x-1)^2$$

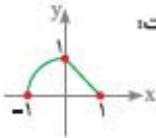
حال محل برخورد نمودار تابع $y = (x+1)^2$ و نمودار تابع جدید را

مشخص می‌کنیم:

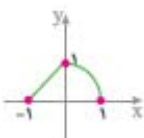
$$(x+1)^2 = (3x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3x-1 \Rightarrow x=1 \\ x+1 = -(3x-1) \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

قرینه نمودارها

فرض می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است:

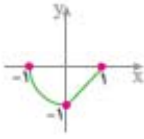


۱ رسم نمودار تابع $f(-x)$:



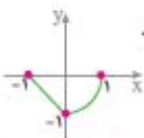
نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

۲ رسم نمودار تابع $-f(x)$:



نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

۳ رسم نمودار تابع $-f(-x)$:



نمودار $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.

تذکره ۱ برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار $kf(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. **تذکره ۲** اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار تابع $y = -|x-1|$ را رسم کنید.

برای رسم نمودار تابع $y = -|x-1|$ ، ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = |x-1|$ به وجود آید. سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



تست به ترتیب با کدام انتقال‌ها نمودار $y = x^2 + 6x + 4$ به روی نمودار $y = x^2 - 4x + 3$ منطبق می‌شود؟

۱) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا

۲) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا

۳) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین

۴) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت پایین

۱ ابتدا ضابطه هر دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = (x^2 + 6x + 4) - 5 = (x+3)^2 - 5$$

$$y = (x^2 - 4x + 3) - 1 = (x-2)^2 - 1$$

داخل پرانتز از $x+3$ به $x-2$ رسیده است، یعنی $x-5$ تبدیل شده، پس نمودار ۵ واحد به سمت راست منتقل شده و چون بیرون پرانتز از -5 به -1 رسیده یعنی به اندازه ۴ واحد اضافه شده، پس نمودار ۴ واحد به سمت بالا منتقل شده است.

انبساط و انقباض نمودار $y = f(x)$

اگر نمودار $y = f(x)$ موجود باشد، برای انبساط

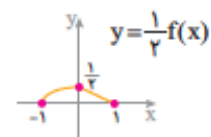
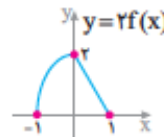
و انقباض آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است:



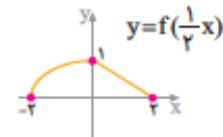
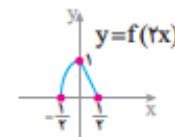
۱ $y = kf(x)$: عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور y بازتر) می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور y فشرده‌تر) می‌شود.



۲ $y = f(kx)$: طول تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را $1/k$ برابر می‌کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $1/k$ منقبض می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب k منبسط می‌شود.



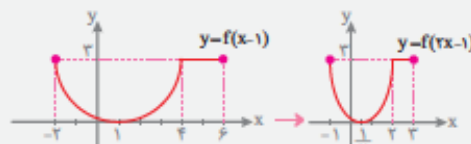
مثال نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت

مقابل است. نمودار تابع $y = f(2x-1)$

را رسم کنید.



ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:



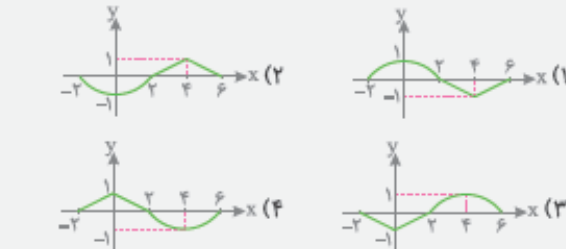
تبدیل نمودارهای $f(x)$ و $f(ax+b)$ به یکدیگر

برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ با کمک نمودار تابع $y=f(x)$ ، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

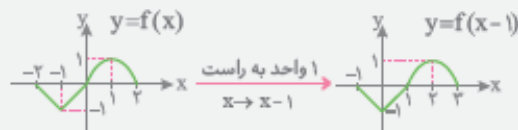
۱ با توجه به علامت b ، نمودار $y=f(x)$ را به اندازه b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.

۲ طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.

تست نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{1}{3}x-1)$ کدام است؟



۴ تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:



برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ با کمک نمودار $y=f(ax+b)$ برعکس مراحل فوق عمل می‌کنیم:

۱ طول تمام نقاط نمودار را بر a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y=f(x+b)$ برسیم.

۲ اگر $b > 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت راست و اگر $b < 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

مثال نمودار تابع $y=f(3x+2)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کنید.

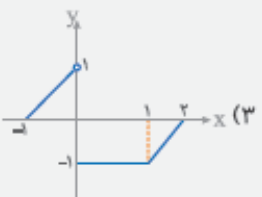
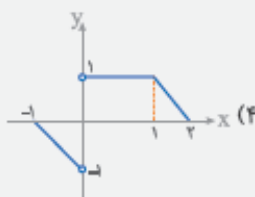
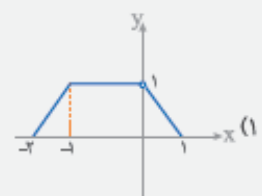
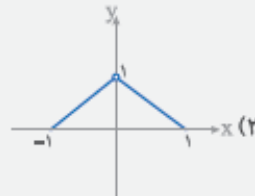
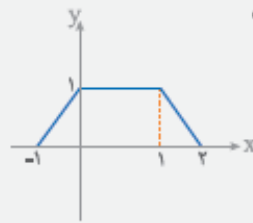


ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



تست نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت

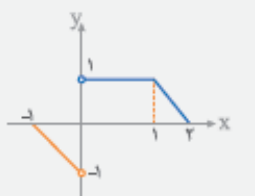
مقابل است. نمودار تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ کدام است؟



۴ تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ در $x > 0$ برابر

$y=f(x)$ و در $x < 0$ برابر $y=-f(x)$

است، بنابراین نمودار آن به صورت زیر است:



تست نمودار تابع $y=|x-1|+2$ را نسبت به محور y ها قرینه

می‌کنیم، سپس آن را ۳ واحد به طرف x های مثبت و ۱ واحد به طرف

y های منفی منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

$$y=|x-2|+1 \quad (1) \quad y=|x-1|-2 \quad (2)$$

$$y=|x+2|-1 \quad (3) \quad y=|x+1|+2 \quad (4)$$

۲

$$y=|x-1|+2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y=|-x-1|+2=|x+1|+2$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} y=|x-3+1|+2 \xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}} y=|x-2|+2-1=|x-2|+1$$

تست نقطه $(-5, 12)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ واقع شده است.

این نقطه، با چه نقطه‌ای از نمودار تابع $g(x)=-f(x)-2$ متناظر

است؟ (برگرفته از کتاب دوسی)

$$(-5, 14) \quad (1) \quad (-5, -14) \quad (2)$$

$$(3, 14) \quad (3) \quad (-3, -14) \quad (4)$$

۲ چون نقطه $(-5, 12)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارد، پس

$$f(-5)=12 \text{ است. برای پیدا کردن نقطه معادل } (-5, 12) \text{ روی}$$

نمودار تابع g داریم:

$$g(-5)=-f(-5)-2=-(12)-2=-14$$

درس انواع تابع

توابع چند جمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq 0$ و همه ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامند.

مثلاً تابع $y = x^4 + \sqrt{2}x + 1$ یک چند جمله‌ای درجه ۴ است، اما تابع $y = x^4 + \sqrt{2x} + 1$ چند جمله‌ای نیست.

چند ویژگی

- ۱ برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.
- ۲ درجه تابع ثابت $f(x) = c$ برابر صفر است.
- ۳ درجه تابع خطی $f(x) = mx + b$ برابر ۱ است.
- ۴ درجه تابع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است.

تابع خطی

به هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ تابع خطی می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان‌دهنده عرض از مبدأ است.

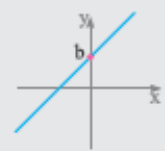
نمودار توابع خطی $y = ax + b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

 نمودار تابع $y = ax + b$ در حالت‌های مختلف

$a > 0, b < 0$



$a > 0, b > 0$



$a < 0, b < 0$



$a < 0, b > 0$



تذکره ۱ اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع

$y = x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع همانی می‌گویند.



توجه کنید خط $y = x$ نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات است.

تذکره ۲ اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی



$y = ax + b$ به تابع $y = b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع ثابت می‌گویند.

مثال اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و بدانیم $f(3) + g(3) = 5$

است، حاصل $f(4) \times g(5)$ را به دست آورید.

چون f تابعی همانی است، پس $f(3) = 3$ است، بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم:

$$f(3) + g(3) = 5 \Rightarrow 3 + g(3) = 5 \Rightarrow g(3) = 2$$

حال چون تابع g ثابت است، پس به ازای تمام مقادیر برابر ۲ است.

$$f(4) \times g(5) = 4 \times 2 = 8 \quad \text{بنابراین:}$$

برای نوشتن ضابطه تابع خطی باید شیب خط و مختصات یک نقطه از آن یا مختصات دو نقطه از خط را در اختیار داشته باشیم.

تست اگر نمودار تابع خطی f محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع

کند و بدانیم $f(1) = f(-3) + 8$ است، مقدار $f(2)$ کدام است؟

$$-1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

۴ چون تابع خطی $f(x) = ax + b$ محور y ها را با عرض ۱ قطع می‌کند، پس:

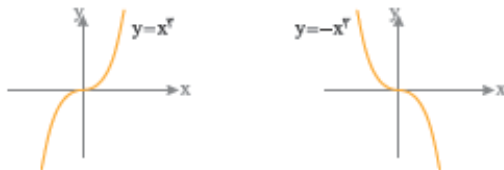
$$f(1) = f(-3) + 8 \Rightarrow a + b = -3a + b + 8 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$a + 1 = -3a + 1 + 8 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

تابع درجه سوم

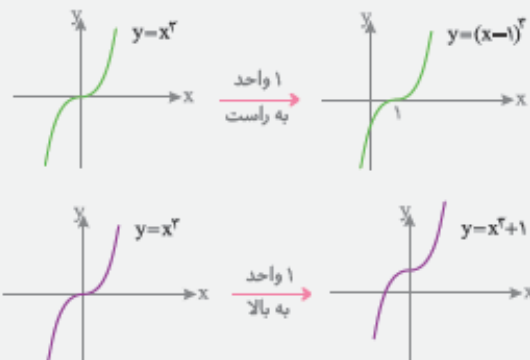
هر تابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با شرط $a \neq 0$ ، یک تابع درجه ۳ است. دامنه و بُرد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

نمودار تابع $y = x^3$ و $y = -x^3$ به صورت زیر است:

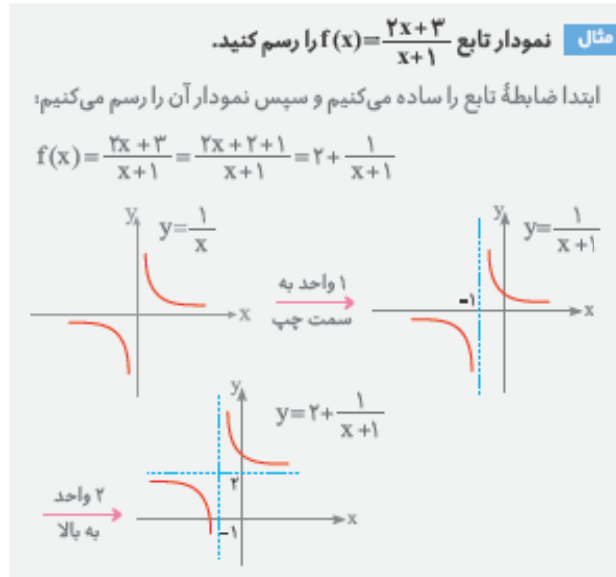


تنها صفر این تابع نقطه $x = 0$ است. یعنی نمودار تابع فقط در نقطه به طول $x = 0$ محور x ها را قطع می‌کند.

مثال نمودار تابع $y = x^3 + 1$ و $y = (x-1)^3$ را رسم کنید.

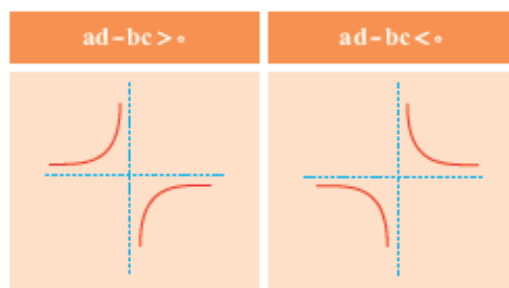


با توجه به نمودار، واضح است که دامنه و برد تابع برابر با $\mathbb{R} - \{0\}$ است. برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ می‌توانیم ضابطه تابع را ساده کنیم و از قوانین انتقال استفاده کنیم.



برای رسم سریع‌تر تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- خط قائم $x = -\frac{d}{c}$ و خط افقی $y = \frac{a}{c}$ را به صورت خط چین رسم می‌کنیم.
- با توجه به علامت $ad - bc$ نمودار را به یکی از شکل‌های زیر رسم می‌کنیم:



نکته اگر $ad - bc = 0$ باشد، ضابطه تابع به فرم $f(x) = \frac{a}{c}$ تبدیل می‌شود که تابعی ثابت است.

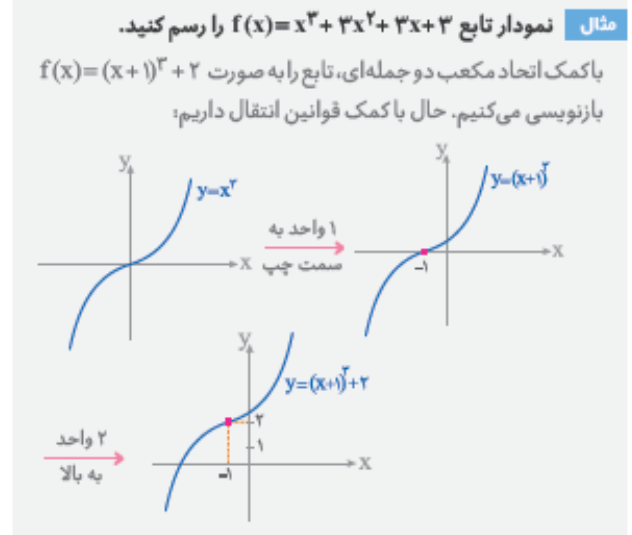
مثال برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ به روش گفته شده، ابتدا خط قائم $x = -1$ و خط افقی $y = 2$ را به صورت خط چین رسم می‌کنیم. حال چون $ad - bc = 2 - 3 < 0$ است، پس نمودار به صورت زیر خواهد بود:



در بعضی از سوالات که ضابطه تابع درجه سوم به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ داده می‌شود، می‌توانیم به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، آن‌ها را به صورت $y = (x-a)^3 + k$ بنویسیم و با کمک قوانین انتقال نمودار آن را رسم کنیم.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^3$$

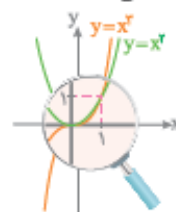
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \Rightarrow f(x) = (x-2)^3$$



نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$ زیر ذره‌بین

با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ مشاهده می‌کنیم:

- هر دو تابع در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند.
- این دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 0$ متقاطع‌اند.
- در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^3$ است.
- در بازه $(1, +\infty)$ نمودار تابع $y = x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.



توابع گویا

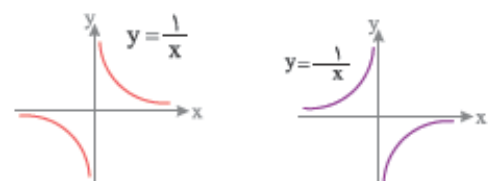
هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست، یعنی $Q(x) \neq 0$. پس دامنه آن‌ها به صورت زیر است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

مثلاً توابع زیر همگی گویا هستند.

$$y = \frac{\frac{1}{4}x - 1}{x^2 + x + 9}, \quad y = \frac{\sqrt{2}x + 5}{x^2 + 4}, \quad y = \frac{1}{x+2}$$

نمودار تابع گویای $y = \frac{1}{x}$ و $y = -\frac{1}{x}$ به صورت زیر است:

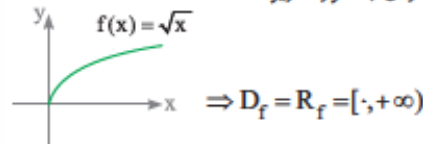
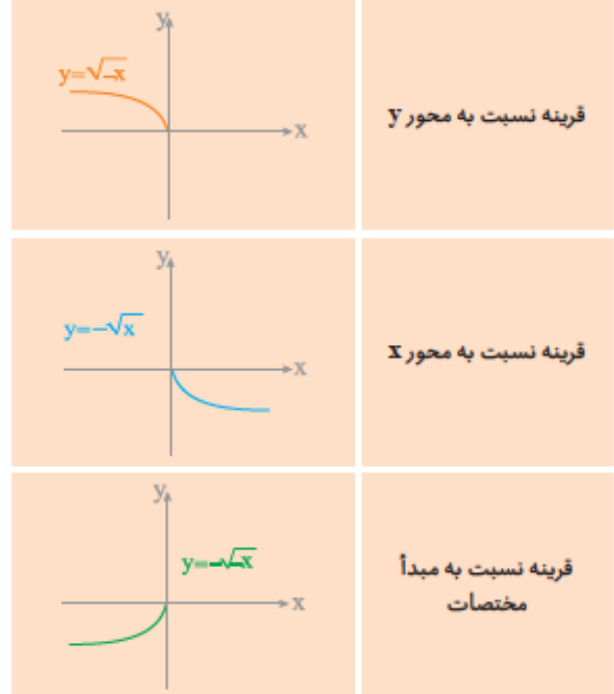


تابع رادیکالی [تابع ریشه دوم]

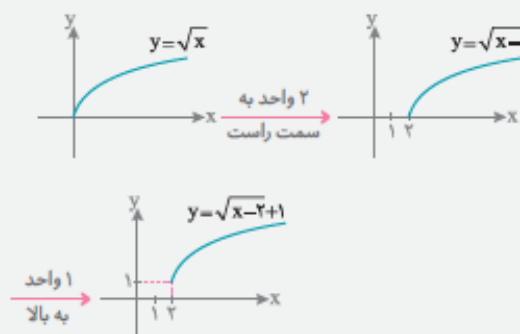
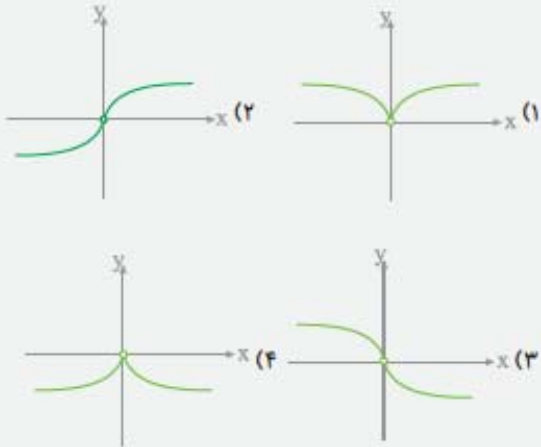
به تابع $f(x)$ که در آن ضابطه‌ای برحسب x زیر رادیکال باشد تابع رادیکالی می‌گویند؛ مانند:

$$y = \sqrt{5x^2 + 1}, \quad y = 5 + \sqrt{3x - 4}, \quad y = \sqrt{\frac{2x+7}{x-1}}$$

به حالتی خاص از تابع رادیکالی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع ریشه دوم می‌گویند و آن را به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ نمایش می‌دهند و نمودار آن به صورت زیر است:


 قرینه نمودار $y = \sqrt{x}$ نسبت به محورهای مختصات


با کمک قوانین انتقال، می‌توانیم نمودار توابع رادیکالی به فرم $y = \sqrt{ax+b}+c$ را از روی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنیم.

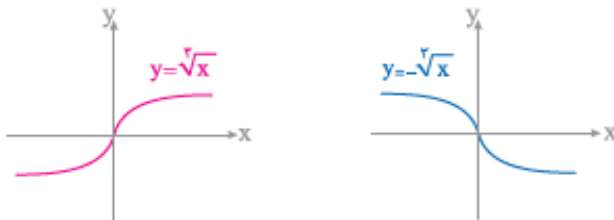
 مثال نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}+1$ را رسم کنید.

 تست نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}$ کدام است؟


۲ برای رسم، ابتدا آن را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

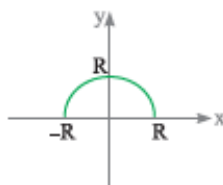
$$f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

توجه کنید چون $x=0$ در دامنه f وجود ندارد، پس نمودار آن در این نقطه توخالی است.

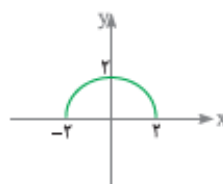
نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x}$ و $y = -\sqrt[3]{x}$ به صورت زیر است:



نمودار تابع $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R است:



نمودار تابع $y = \sqrt{4 - x^2}$ به صورت زیر است:

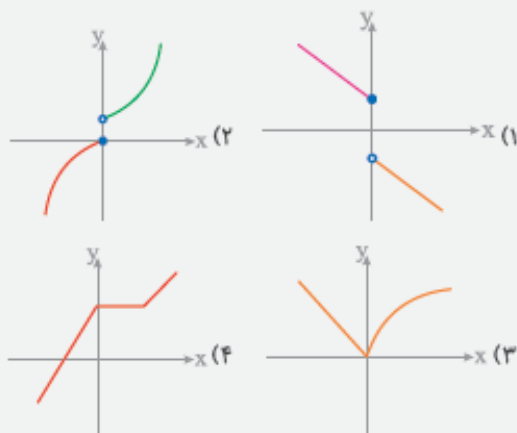


درس تابع صعودی و نزولی

تابع صعودی و نزولی

تست کدام نمودار مربوط به تابعی مانند f است که برای هر $x_1, x_2 \in D_f$

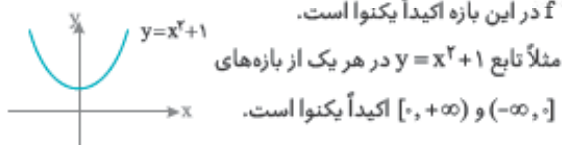
که $x_1 < x_2$ باشد، $f(x_1) < f(x_2)$ است؟



۲ صورت سؤال معرف تابعی اکیداً صعودی است. در میان گزینه‌ها فقط نمودار گزینه (۲) اکیداً صعودی است.

تابع یکنوا و غیریکنوا

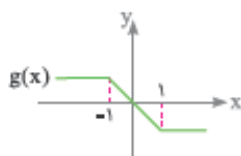
اگر تابع f در بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه اکیداً یکنوا است.



اگر تابع f در بازه $[a, b]$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه یکنوا است و اگر تابع f در بازه $[a, b]$ نه صعودی باشد و نه نزولی، به آن تابع غیریکنوا می‌گوییم.

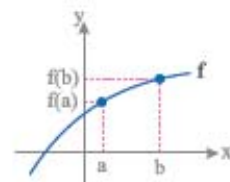


مثلاً نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. این تابع در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. پس در این بازه اکیداً یکنوا است. از طرفی در بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی است. پس در این بازه‌ها نیز اکیداً یکنوا است. اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی (غیریکنوا).



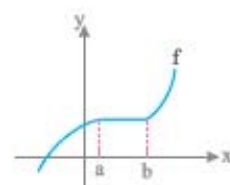
نمودار تابع $g(x)$ در شکل زیر دیده می‌شود. این تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ یکنوا [نزولی] است اما اکیداً یکنوا نیست. تابع ثابت $y = k$ ، تنها تابعی است که در هر بازه هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. بنابراین یک تابع یکنوا است.

به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش یابد، تابع اکیداً صعودی می‌گویند. در تابع اکیداً صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



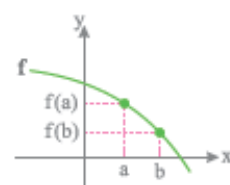
$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع صعودی می‌گویند. در تابع صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد، تابع اکیداً نزولی می‌گویند. در تابع اکیداً نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند، تابع نزولی می‌گویند. در تابع نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



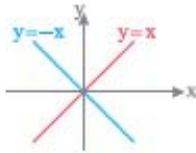
$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

تذکره ۱ کلمه اکید نشان می‌دهد تابع در هیچ بازه‌ای ثابت نیست.

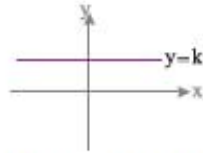
تذکره ۲ اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک است، اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد.



مثلاً، تابع $y = -\frac{1}{x}$ تابعی یک‌به‌یک است، اما به علت جهش در اطراف $x = 0$ ، تابعی اکیداً صعودی نیست.



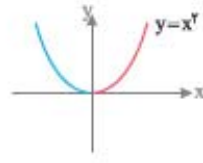
$y=x$ اکیداً صعودی
 $y=-x$ اکیداً نزولی



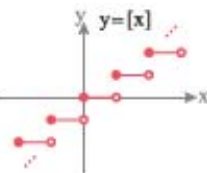
تنها تابع هم صعودی و هم نزولی



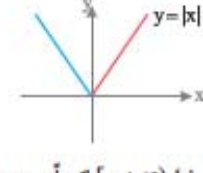
اکیداً صعودی



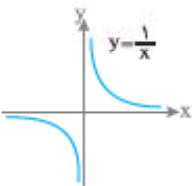
در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی
در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی



صعودی



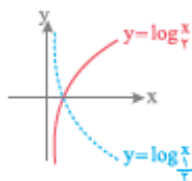
در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی
در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی



در هر یک از بازه‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی. امادر $\mathbb{R}$ غیر یکنوا



اکیداً صعودی



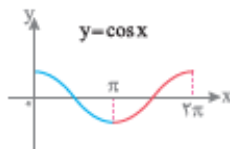
برای مبنای بزرگتر از یک، اکیداً صعودی
برای مبنای بین 0 و 1، اکیداً نزولی



برای پایه بزرگتر از یک، اکیداً صعودی
برای پایه بین صفر و یک، اکیداً نزولی



در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی
در بازه‌های $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ و $[0, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی



در بازه $[0, \pi]$ اکیداً نزولی
در بازه $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی

مثال ۱ یکنوایی تابع $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ را بررسی کنید.

می‌دانیم x^2 عبارتی نامنفی است، پس کسر $\frac{x^2}{x^2+1}$ مثبت بوده و چون مقدار مخرج کسر از صورت آن یک واحد بیشتر است، در نتیجه $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$. بنابراین، تابع $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ ، در واقع تابع ثابت $y=0$ است که تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

مثال ۲ اگر تابع $f = \{(3, 2a-1), (1, 5), (4, -3)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a را پیدا کنید.

در تابع $f = \{(1, 5), (3, 2a-1), (4, -3)\}$ ، ترتیب مؤلفه‌های اول به صورت $1 < 3 < 4$ است. با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی، خواهیم داشت:

$$f(4) < f(3) < f(1) \Rightarrow -3 < 2a-1 < 5 \xrightarrow{+1} -2 < 2a < 6 \xrightarrow{+2} -1 < a < 3$$

تست تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x^2}$ در چه تعداد از بازه‌های زیر

صعودی است؟

الف) $(-1, 1)$

ب) $(0, +\infty)$

پ) $(-\infty, +\infty)$

۲ (۲)

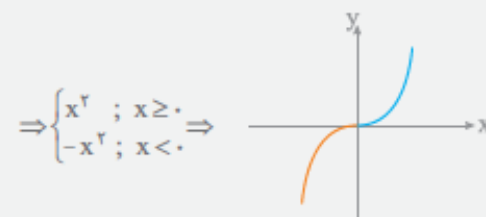
۱ (۱)

صفر (۴)

۳ (۳)

۳ ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x\sqrt{x^2} = x|x|$$



با توجه به نمودار، تابع f در بازه $(-\infty, +\infty)$ و هر زیر مجموعه‌ای از آن صعودی است.

بررسی یکنوایی توابع معروف

در سؤالاتی که ضابطه تابع داده می‌شود، بهترین راه برای تشخیص یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است.

نمودار همه توابع مهم کتاب درسی، که باید برای تشخیص یکنوایی به خاطر داشته باشید در ادامه آورده شده است.

در این نمودارها، قسمت‌های صعودی با رنگ قرمز و قسمت‌های نزولی با رنگ آبی مشخص شده است.

بررسی یکنوایی توابع چندضابطه‌ای

برای بررسی یکنوایی توابعی که به صورت چندضابطه‌ای مطرح می‌شوند، بهترین راهکار رسم نمودار تابع است.

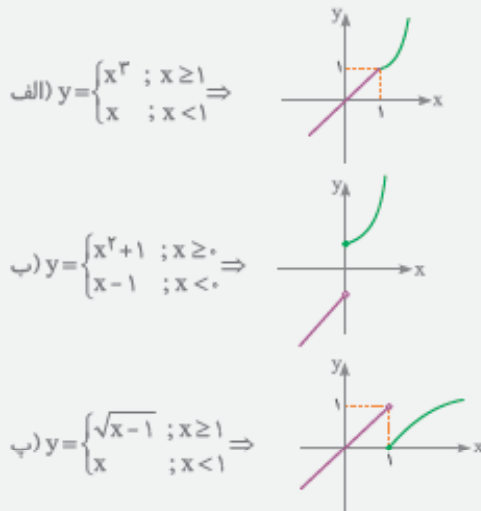
تست چه تعداد از توابع زیر یکنوا است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \geq 0 \\ x - 1; & x < 0 \end{cases} \quad \text{الف)} \quad f(x) = \begin{cases} x^3; & x \geq 1 \\ x; & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}; & x \geq 1 \\ x; & x < 1 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

۱) ۱) ۲) ۲) ۳) ۳) ۴) صفر

۲) نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:



بررسی یکنوایی توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

برای بررسی یکنوایی توابع شامل قدرمطلق، بهترین راه این است که تابع را در ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم و آن را رسم کنیم.

مثال یکنوایی تابع $y = x + |x - 1|$ را بررسی کنید.

ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم و خواهیم داشت:

$$y = x + |x - 1| = \begin{cases} 2x - 1; & x \geq 1 \\ 1; & x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

واضح است که تابع فوق، صعودی است.

تست یکنوایی تابع $f(x) = x(|x| + \frac{1}{x})$ چگونه است؟

۱) همواره صعودی

۲) همواره نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱) نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

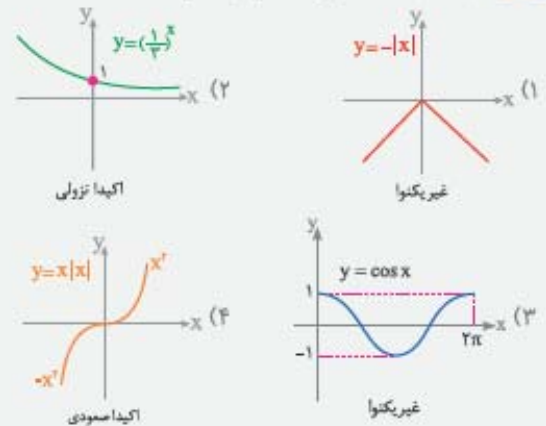
$$f(x) = x(|x| + \frac{1}{x}) = \begin{cases} x^2 + 1; & x > 0 \\ -x^2 + 1; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

باتوجه به شکل واضح است این تابع همواره صعودی است.

تست کدام تابع اکیداً نزولی است؟

$$y = x|x| \quad (۴) \quad y = \cos x \quad (۳) \quad y = (\frac{1}{3})^x \quad (۲) \quad y = -|x| \quad (۱)$$

۲) نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:



تأثیر انتقال تابع بر وضعیت و بازه یکنوایی

• انتقال در راستای افقی یا عمودی و هم‌چنین انبساط و انقباض افقی یا عمودی وضعیت یکنوایی تابع را تغییر نمی‌دهند؛ یعنی اگر تابعی اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد، در اثر انتقال، انقباض یا انبساط همچنان اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باقی می‌ماند.

مثلاً، تابع $y = \sqrt{x}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y = 1 + 2\sqrt{3x-1}$ نیز اکیداً صعودی می‌باشد.

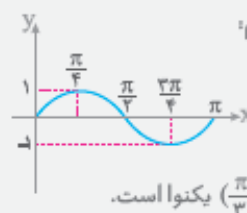
• انتقال، انبساط و انقباض در راستای افقی، بازه یکنوایی تابع را تغییر می‌دهد. مثلاً، تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ اکیداً نزولی است، اما تابع $y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ در بازه $[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$ اکیداً نزولی است.

• قرینه کردن نسبت به محور x یا نسبت به محور y ها، وضعیت یکنوایی تابع را تغییر می‌دهد. مثلاً، تابع $y = \sqrt{x}$ اکیداً صعودی است، اما تابع‌های $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ اکیداً نزولی هستند.

تست تابع با ضابطه $f(x) = 1 + 2\sin(\pi - 2x)$ در کدام بازه زیر یکنوا است؟

$$(1) (0, \frac{\pi}{4}) \quad (2) (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \quad (3) (0, \pi) \quad (4) (\frac{2\pi}{3}, \pi)$$

۲) می‌دانیم $\sin(\pi - 2x) = \sin 2x$ است. بنابراین ضابطه تابع را به صورت $f(x) = 1 + 2\sin 2x$ می‌نویسیم. از طرفی می‌دانیم انتقال در راستای قائم و انبساط قائم تأثیری در بازه یکنوایی ندارند، پس می‌توانیم تابع $y = \sin 2x$ را بررسی کنیم:



با توجه به گزینه‌ها تابع f در بازه $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ یکنوا است.

تذکر اگر مقدار پایه برابر صفر یا یک باشد، تابع داده شده به تابعی ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی و هم نزولی است.

تست اگر تابع نمایی $y = (\frac{a+3}{a^2+1})^x$ ، تابعی اکیداً صعودی باشد، در

این صورت مقادیر a کدام خواهد بود؟

(۱) $(-3, 1)$ (۲) $(-1, 2)$

(۳) $(1, 2)$ (۴) $(-1, 3)$

۲ اگر پایه تابع نمایی $y = (\frac{a+3}{a^2+1})^x$ بزرگ‌تر از یک باشد، در این

صورت تابع صعودی اکید خواهد بود:

$$\frac{a+3}{a^2+1} > 1 \Rightarrow a+3 > a^2+1 \Rightarrow a^2-a-2 < 0 \Rightarrow -1 < a < 2$$

پس به ازای مقادیر بازه $(-1, 2)$ ، تابع y اکیداً صعودی است.

یکنوایی در اعمال توابع

مجموع دو تابع اکیداً صعودی یا مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع صعودی، تابعی اکیداً صعودی است. به طور مشابه مجموع دو تابع اکیداً نزولی یا مجموع یک تابع اکیداً نزولی و یک تابع نزولی، تابعی اکیداً نزولی است. مثلاً چون هر یک از توابع $y = x^2$ و $y = 2^x$ اکیداً صعودی هستند، پس تابع $f(x) = x^2 + 2^x$ نیز اکیداً صعودی است.

تست تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + x^2 - 4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) همواره صعودی

(۲) همواره نزولی

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

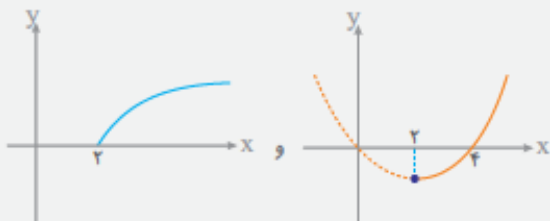
(۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم. چون $x-2$ زیر رادیکال با

فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

از طرفی تابع f از مجموع دو تابع $y_1 = \sqrt{x-2}$ و $y_2 = x^2 - 4x$ تشکیل شده که هر دوی آن‌ها در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند؛



پس تابع f که از جمع دو تابع اکیداً صعودی به وجود آمده نیز تابعی اکیداً صعودی است.

برای بررسی یکنوایی توابع شامل جزء صحیح نیز بهترین راهکار رسم نمودار تابع است.



مثلاً با توجه به نمودار تابع $y = [x]$ ، این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

بررسی یکنوایی توابع درجه دوم

نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل سهمی است و در حالت کلی غیریکنوا می‌باشد، اما اگر دامنه را برحسب رأس سهمی محدود کنیم، در یک بازه اکیداً نزولی و در یک بازه اکیداً صعودی خواهد شد. در این صورت با توجه به علامت a با دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی روبه بالا است. بنابراین بزرگ‌ترین

بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است به

صورت $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای

که تابع در آن اکیداً صعودی است به

صورت $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ می‌باشد.

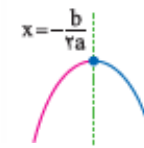
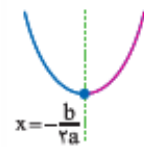
۲ اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین است. بنابراین بزرگ‌ترین

بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است به

صورت $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای

که تابع در آن اکیداً نزولی است به صورت

$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ می‌باشد.



تست تابع $y = (x+1)^2 - (2x-1)^2$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی

است. حداکثر مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = (x+1)^2 - (2x-1)^2 = (x^2 + 2x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) = -3x^2 + 6x$$

چون طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{6}{2(-3)} = 1$ و دهانه سهمی روبه پایین

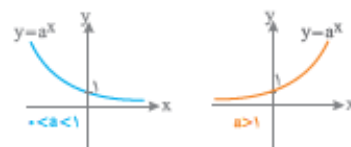
است، پس تابع در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی است؛ یعنی $a = 1$ است.

بررسی یکنوایی توابع نمایی

تابع نمایی $y = a^x$ به ازای $a > 1$ ، یک تابع اکیداً صعودی و به ازای $0 < a < 1$ یک تابع اکیداً نزولی است.

در برخی سؤالات، ضابطه یک تابع نمایی با پایه پارامتری داده می‌شود و از ما پرسیده می‌شود؛ اگر تابع نمایی داده شده اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، مقدار پارامتر چقدر است؟

در این سؤالات اگر تابع نمایی اکیداً صعودی باشد، باید مقدار پایه را بزرگتر از یک و اگر تابع نمایی اکیداً نزولی باشد، مقدار پایه را بین صفر و یک قرار می‌دهیم.



ترکیب دوتابع صعودی یا ترکیب دو تابع نزولی، تابعی صعودی است. اما ترکیب یک تابع صعودی و یک تابع نزولی، تابعی نزولی است. پس برای این که توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ اکیداً یکنوا شوند، باید هر دو تابع f و g اکیداً یکنوا باشند.

تست اگر دو تابع f و g به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند، کدام یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

$$f \cdot g \quad (1) \quad f - g \quad (2) \quad g \circ f \quad (3) \quad g - f \quad (4)$$

۲ چون g اکیداً نزولی است، پس $g - f$ اکیداً صعودی خواهد بود و مجموع دو تابع اکیداً صعودی نیز، تابعی اکیداً صعودی است؛

$$f + (-g) = f + (g - f) = g$$

میانبر با فرض $f(x) = x$ و $g(x) = -2x$ تشکیل هر یک از توابع موجود در گزینه‌ها، می‌توان به راحتی سایر گزینه‌ها را حذف کرد.

یکنوایی تابع $\frac{1}{f(x)}$

اگر $f(x)$ تابعی صعودی و همواره دارای یک علامت و مخالف صفر باشد، آنگاه تابع $\frac{1}{f(x)}$ نزولی است و اگر $f(x)$ نزولی باشد، تابع $\frac{1}{f(x)}$ صعودی است.

تست وضعیت یکنوایی تابع $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x+1}$ چگونه است؟

(۱) همواره صعودی (۲) همواره نزولی

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱ به دلیل وجود $\sqrt{x}$ دامنهٔ تابع برابر $[0, +\infty)$ است. در این بازه، تابع $y = x + 1$ صعودی است. از طرفی می‌دانیم تابع $y = \sqrt{x}$ صعودی است. بنابراین مجموع این دو تابع صعودی خواهد بود.

$$y = (\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{صعودی}}) + (\underbrace{-\frac{1}{x+1}}_{\text{صعودی}})$$

درس ۵ اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

اعمال روی ضابطهٔ توابع

توابع را نیز می‌توان مانند اعداد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد و توابع جدید به دست آورد. **[البته در هنگام تقسیم، تابع واقع در مخرج نباید صفر باشد.]**

۱ برای هر x متعلق به دامنهٔ هر دو تابع f و g ، می‌توان توابع $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

مجموع دو تابع

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

تفاضل دو تابع

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

ضرب دو تابع

۲ برای هر x متعلق به دامنهٔ هر دو تابع f و g که در آن $g(x) \neq 0$ باشد، می‌توان تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

مثال دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2x$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطهٔ

$$\text{تابع } y = f \cdot g + \frac{f}{g} \text{ را به دست آورید.}$$

$$D_y = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Rightarrow f \cdot g + \frac{f}{g} = x^2(2x) + \frac{x^2}{2x} = 2x^3 + \frac{x}{2} \Rightarrow y = 2x^3 + \frac{x}{2}$$

برای رسم نمودار توابع $f \pm g$ یا $f \cdot g$ یا $\frac{f}{g}$ بعد از یافتن دامنهٔ تابع مورد نظر، باید ضابطهٔ آن‌ها را هم به دست آوریم و نمودار را در آن دامنه رسم کنیم.

مثال فرض کنید $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x}$ است. نمودار تابع $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

ابتدا دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌یابیم:

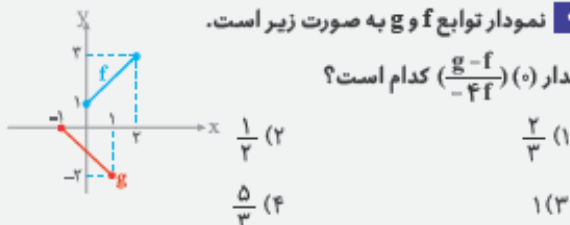
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap (\mathbb{R} - \{0\}) - \{-2\} = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

سپس ضابطهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم و نمودار آن را در دامنهٔ $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$ رسم می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2 - 4}{x}}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x^2 - 4}{x+2} = x - 2$$



تست نمودار توابع f و g به صورت زیر است.



مقدار $\left(\frac{g-f}{-4f}\right)(0)$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{5}{3} \quad (4) \quad 1 \quad (3)$$

۲ باتوجه به شکل صورت سؤال $f(0) = 1$ است. حال برای پیدا کردن

$g(0)$ ضابطهٔ g را به دست می‌آوریم:

$$g(-1) = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{1} = -2 \Rightarrow g(x) = -2x - 1 \Rightarrow g(0) = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g-f}{-4f}\right)(0) = \frac{g(0) - f(0)}{-4f(0)} = \frac{-1 - 1}{-4 \times 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

تست اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(1, 0), (3, 2), (4, 1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ کدام است؟

۱) $\{0, 2\}$ ۲) $\{1, 3\}$ ۳) $\{-1, 1\}$ ۴) $\{-, -1\}$

۲ با توجه به این که $D_f \cap D_g = \{1, 4\}$ است؛ پس:

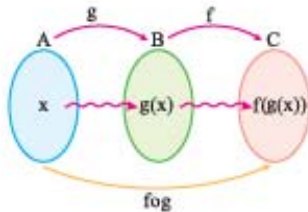
$$f+g = \{(1, 2), (4, -1)\} \Rightarrow \frac{f+g}{f-g} = \{(1, 1), (4, -1)\}$$

$$f-g = \{(1, 2), (4, -2)\}$$

بنابراین برد این تابع برابر $\{1, -1\}$ است.

ترکیب دو تابع

اگر f و g دو تابع باشند، تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ را ترکیب f با g می‌گوییم و آن را با $f \circ g$ نمایش می‌دهیم، به شرط آن که خروجی‌های تابع g در دامنه تابع f قرار داشته باشند:



به طور مشابه $g \circ f$ را به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ نمایش می‌دهیم، به شرط آن که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند.

نحوه تشکیل تابع مرکب به کمک ماشین تابع

fog



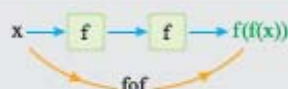
مقادیر $g(x)$ به عنوان ورودی تابع f است.

gof



مقادیر $f(x)$ به عنوان ورودی تابع g است.

fof



مقادیر $f(x)$ به عنوان ورودی تابع f است.

تست اگر $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ باشد، مقدار $f \circ f(-1)$ کدام است؟

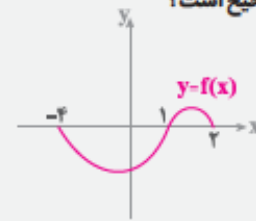
۱) $\sqrt{2}$ ۲) 2 ۳) -1 ۴) 4

۱ ابتدا $f(-1)$ را به دست می‌آوریم:

سپس مقدار $f(f(-1))$ را به دست می‌آوریم:

$$f(f(-1)) = f(0) = \sqrt{2+0-0} = \sqrt{2}$$

تست نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y=f(2x)+f(-x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۷

۲ دامنه تابع $f(x)$ برابر بازه $[-4, 2]$ است، پس دامنه تابع $f(-x)$ و $f(2x)$ را به دست می‌آوریم و اشتراک آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-x): -4 \leq -x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{f(-x)} = [-2, 4]$$

$$f(2x): -4 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{f(2x)} = [-2, 1]$$

اشتراک دامنه‌های فوق به صورت بازه $[-2, 1]$ است که شامل ۴ عدد صحیح است.

اعمال توابع در توابع‌های زوج مرتبی

در بعضی از سؤالات، توابع f و g را به صورت زوج مرتب بیان می‌کنند و از ما توابع $f \pm g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را می‌خواهند. برای به دست آوردن این توابع، ابتدا مؤلفه‌های اول مشترک بین دو تابع را تعیین می‌کنیم [یعنی اشتراک دامنه‌ها را مشخص می‌کنیم]. سپس، اعمال خواسته شده را روی مؤلفه‌های دوم انجام می‌دهیم.

تست اگر توابع f و g به صورت زیر باشند، آنگاه تابع $\frac{fg}{f-1}$ از چند

زوج مرتب تشکیل شده است؟

$$f = \{(3, 2), (1, 0), (2, 1), (5, 1)\}$$

$$g = \{(3, 5), (-1, 2), (1, 4), (5, 3)\}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ برای به دست آوردن fg به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (x, y) ، همه مؤلفه‌های دوم g را برابر کرده و برای به دست آوردن $f-1$ ، از همه مؤلفه‌های دوم f ، یک واحد کم می‌کنیم:

$$fg = \{(3, 10), (-1, 4), (1, 8), (5, 6)\}$$

$$f-1 = \{(3, 1), (1, -1), (2, 0), (5, 0)\}$$

حال برای به دست آوردن $\frac{fg}{f-1}$ ، به ازای مؤلفه‌های اول مشترک، مؤلفه‌های دوم تابع fg را بر مؤلفه‌های دوم تابع $f-1$ تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین:

$$D_{\frac{fg}{f-1}} = D_{fg} \cap D_{f-1} = \{x | (f-1)(x) \neq 0\} = \{1, 3, 5\} - \{2, 5\} = \{1, 3\}$$

$$\frac{fg}{f-1} = \{(3, \frac{10}{1}), (1, \frac{8}{-1})\} = \{(3, 10), (1, -8)\} \Rightarrow \text{زوج مرتب } 2$$

یافتن ضابطه تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع f و g را به ما می‌دهند و از ما ضابطه تابع $f \circ g$ را می‌خواهند. در این سؤالات باید در تابع f به جای همه x ها، $g(x)$ قرار دهیم.

مثال ۱ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

مثال ۲ اگر $f(x) = ax+b$ و $f \circ f(x) = 4x+1$ آنگاه a و b را بیابید.

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b)+b$$

$$= a^2x + ab + b = 4x + 1$$

$$\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ ab + b = 1 \Rightarrow b(a+1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} b(2+1) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ b(-2+1) = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

تست اگر $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، جواب معادله $(f \circ g)(x) = 0$ کدام است؟

$$\pm 3 \quad (4) \quad \pm \sqrt{3} \quad (3) \quad \pm 2 \quad (2) \quad \pm \sqrt{2} \quad (1)$$

۱ ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = 2(g(x) - 1) - 2 = 2x^2 - 4 \Rightarrow (f \circ g)(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

تذکر در بعضی از تست‌های تابع مرکب می‌توانیم برای یافتن ضابطه تابع مورد نظر به جای x یک عدد دلخواه بگذاریم و مسئله را با عددگذاری حل کنیم.

یافتن ضابطه تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب $f \circ g$ و تابع f (تابع بیرونی) داده شده و ضابطه تابع g (تابع درونی) یعنی $g(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ را قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

۲ تابع $f(g(x))$ به دست آمده را مساوی با تابع مرکب $f \circ g$ که در مسئله داده شده، قرار می‌دهیم و معادله حاصل را برحسب $g(x)$ حل می‌کنیم.

مثال اگر $f(x) = x+1$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$ باشند، تابع $g(x)$ را به دست آورید.

$$f(x) = x+1 \Rightarrow f(g(x)) = g(x)+1$$

$$g(x)+1 = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow g(x) = x^2 + 2x + 1$$

توابع مرکب زوج مرتبی

اگر توابع f و g را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بدهند و از ما تابع $f \circ g$ را بخواهند، از تابع درونی یعنی $g(x)$ شروع می‌کنیم. اگر زوج مرتب (a, b) عضوی از تابع g باشد در تابع بیرونی یعنی $f(x)$ به دنبال زوج مرتبی می‌گردیم که مؤلفه اولش b باشد. اگر زوج مرتب (b, c) را در تابع f یافتیم آنگاه نتیجه می‌گیریم که زوج مرتب (a, c) در تابع $f \circ g$ است. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} (a, b) \in g \\ (b, c) \in f \end{cases} \Rightarrow (a, c) \in f \circ g \quad a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \Rightarrow (a, c) \in f \circ g$$

مثال اگر $f = \{(1, 1), (2, -1)\}$ و $g = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 1 \end{cases} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 0), (2, 1)\}$$

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ -1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1 \end{cases} \Rightarrow f \circ g = \{(-1, 1)\}$$

برای بررسی سؤالاتی که در آن، ترکیب ضابطه یک تابع با زوج مرتب تابع دیگر داده می‌شود، بهترین روش این است که ورودی و خروجی هر تابع را به کمک فلش‌گذاری مشخص کنیم. یعنی اگر $f(g(a)) = b$ باشد آنگاه:



مثال دو تابع $f = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $g(x) = 2x - 5$ مفروض‌اند. اگر $f(g(a)) = 6$ باشد مقدار a را به دست آورید.

از فلش‌گذاری استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$f(g(a)) = 6 \Rightarrow a \xrightarrow{g} \text{cloud} \xrightarrow{f} 6 \Rightarrow (a, \text{cloud}) \in g, (\text{cloud}, 6) \in f$$

با توجه به زوج مرتب‌های تابع f نتیجه می‌گیریم $\text{cloud} = 1$. پس $(a, 1) \in g$ و این یعنی $g(a) = 1$ است؛ پس:

$$g(a) = 2a - 5 \xrightarrow{g(a)=1} 2a - 5 = 1 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

تست اگر $f = \{(1, 2), (-1, 0), (-2, 5)\}$ و $g = \{(1, -1), (2, 3), (0, -2)\}$ باشند، تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$\begin{matrix} \{(1, 0), (0, 5)\} & (2) & \{(1, 3), (-1, -2)\} & (1) \\ \{(0, 5)\} & (4) & \{(1, 3)\} & (3) \end{matrix}$$

۳ ابتدا توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} \times \\ 0 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5 \end{cases} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 0), (0, 5)\}$$

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \\ -1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} -2 \\ -2 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} \times \end{cases} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 3), (-1, -2)\}$$

با توجه به این که اشتراک دامنه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ برابر $\{1\}$ است، پس:

$$f \circ g = \{(1, 3+0)\} = \{(1, 3)\}$$

پیدا کردن ضابطه تابع $f(\Delta)$ با معلوم بودن ضابطه $f(\bullet)$

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع $f(\bullet)$ را داریم و از ما ضابطه تابع $f(\Delta)$ را می‌خواهند. Δ عبارت‌هایی پرسب یک متغیر مثل x هستند. برای حل این سؤالات دو راه حل کلی وجود دارد:

روش اول با تغییر متغیر مناسب ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم و سپس در این تابع به جای x عبارت Δ را قرار می‌دهیم.

روش دوم ابتدا بررسی می‌کنیم چه تغییری باید روی عبارت $\bullet$ انجام دهیم تا به عبارت Δ تبدیل شود سپس همین تغییر را روی ضابطه تابع $f(\bullet)$ نیز اعمال می‌کنیم.

مثلاً فرض کنید $f(x-2) = x^2 + 5x + 1$ و می‌خواهیم $f(3-x)$ را پیدا کنیم. برای این کار می‌توانیم به دو روش بالا به صورت زیر عمل کنیم:

روش اول

$$x-2=t \Rightarrow x=t+2 \Rightarrow f(t) = (t+2)^2 + 5(t+2) + 1 = t^2 + 9t + 15$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 9x + 15 \Rightarrow f(3-x) = (3-x)^2 + 9(3-x) + 15 = 9 - 6x + x^2 + 27 - 9x + 15 = x^2 - 15x + 51$$

روش دوم ابتدا بررسی می‌کنیم که چه تغییری روی عبارت $x-2$ اعمال کنیم تا به عبارت $3-x$ برسیم. به عبارت دیگر باید ببینیم که به جای x چه عبارتی قرار دهیم تا تغییر مطلوب مسئله رخ دهد. فرض می‌کنیم که باید به جای x عبارت Δ را در $x-2$ بگذاریم تا عبارت $3-x$ حاصل شود:

$$\Delta - 2 = 3 - x \Rightarrow \Delta = 5 - x$$

پس کافیت که در ضابطه تابع $f(x-2) = x^2 + 5x + 1$ به جای همه x ها عبارت $5-x$ را قرار دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x-2) = x^2 + 5x + 1 \xrightarrow{x=5-x} f(5-x-2) = (5-x)^2 + 5(5-x) + 1 \\ \Rightarrow f(3-x) = 25 - 10x + x^2 + 25 - 5x + 1 = x^2 - 15x + 51$$

تذکر اگر ضابطه $f(\bullet)$ را داشته باشیم، برای مشخص کردن ضابطه $f(\circ)$ از طریق عددگذاری، بهترین عدد از حل معادله $\bullet = \circ$ به دست می‌آید.

تست اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} x^2 + 3 & (1) \\ x^2 - 4x + 5 & (2) \\ x^2 - 4x + 5 & (3) \\ x^2 - 4x + 5 & (4) \end{array}$$

۴ با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x-3=t \Rightarrow x=t+3 \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \\ \Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 = t^2 + 2t + 2 \\ \Rightarrow f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 5$$

میانبر برای میان‌بُر زدن و استفاده از عددگذاری در این سؤال، ابتدا باید عدد مناسب را به دست آوریم:

$$x-3=1-x \Rightarrow x=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در } f(x-3)} f(2-3) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 \\ \Rightarrow f(-1) = 1$$

با قرار دادن $x=2$ در ضابطه $f(1-x)$ ، به $f(-1)$ می‌رسیم و می‌دانیم $f(-1)=1$ است، پس گزینه‌ای نشان‌دهنده ضابطه $f(1-x)$ است که با قرار دادن $x=2$ در آن، حاصل برابر ۱ شود. در میان گزینه‌ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

تست اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)(x) = x+2$ باشد، ضابطه g کدام است؟

$$\frac{x+1}{x} \quad (1) \quad \frac{x+3}{x+1} \quad (2) \quad \frac{-x+1}{x+1} \quad (3) \quad \frac{x-3}{x+1} \quad (4)$$

۳ طبق صورت سؤال $f(g(x)) = x+2$ است؛ پس در تابع f به جای همه x ها $g(x)$ می‌گذاریم و خواهیم داشت:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = x+2 \\ g(x)+1 = x(g(x)-1) \Rightarrow g(x)+1 = xg(x)-x \\ \Rightarrow \frac{xg(x)+g(x)}{(x+1)g(x)} = x+3 \Rightarrow g(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

میانبر با جای‌گذاری عدد دلخواه $x=0$ در تابع $f \circ g$ می‌توانیم گزینه درست را پیدا کنیم.

یافتن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب $f \circ g$ و تابع g [تج درونی] را می‌دهند و ضابطه تابع f [تج بیرونی] یعنی $f(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ضابطه تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به دست می‌آوریم.
- ۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به دست می‌آوریم.
- ۳ در تابع $f(t)$ به جای همه t ها، x می‌گذاریم تا ضابطه $f(x)$ به دست آید.

مثال اگر $f(x+2) = 4x-3$ باشد $f(x)$ را به دست آورید.

اگر فرض کنیم که $x+2=g(x)$ آنگاه این مسئله مشابه مثال قبل قابل حل است:

$$g(x) = x+2 = t \Rightarrow x = t-2 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } f(x+2)} f(t) = 4(t-2) - 3 = 4t - 11 \\ \Rightarrow f(x) = 4x - 11$$

تست اگر $g(x) = 2x+1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج-۹۵)

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 2x + 3 & (1) \\ 2x^2 + 3x + 1 & (2) \\ 2x^2 + x + 3 & (3) \\ 2x^2 - x + 4 & (4) \end{array}$$

۳ با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5 \\ \Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = 8\left(\frac{t^2-2t+1}{4}\right) + 3(t-1) + 5$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده $f(t) = 2t^2 - t + 4$ خواهد شد که با جای‌گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ خواهد بود.

میانبر در تابع مرکب $x=0$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(g(0)) = 8(0)^2 + 6(0) + 5 = f(1) = 5$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=1$ برابر ۵ می‌شود گزینه (۳) است.

تست اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$

(داخل - ۹۹)

کدام است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

۲ ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

حال باید جواب نامعادله $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را مشخص کنیم:

$$1) \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$2) \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow 1 < x^2 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

با توجه به این که اشتراک جواب های به دست آمده از نامعادله برابر

$$D_{g \circ f} = \{x \neq \pm 1 \mid x = 0\} = \{0\}$$

$x=0$ است، پس:

میانبر راه میان بر این است که $x = \frac{1}{2}$ را در تابع $g \circ f$ قرار دهیم:

$$g(f(\frac{1}{2})) = g(\frac{5}{3}) = \sqrt{\frac{5}{3} - (\frac{5}{3})^2} = \sqrt{\frac{5}{3}(1 - \frac{5}{3})} = \sqrt{-\frac{10}{9}}$$

پس $x = \frac{1}{2}$ نباید در دامنه تابع باشد. بنابراین گزینه های (۱)، (۳) و (۴) حذف می شوند.

تست اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_p(x^2+2x)$ باشند، دامنه تابع

$g \circ f$ کدام است؟

(۱) $[-2, 4]$ (۲) $[-2, 0]$

(۳) $(-4, -1) \cup (1, 2]$ (۴) $(-4, -2) \cup (0, 2]$

۴ ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

$$g(x) = \log_p(x^2+2x) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_p(x^2+2x) \leq 3\}$$

بنابراین باید جواب نامعادله $\log_p(x^2+2x) \leq 3$ را مشخص کنیم:

$$\log_p(x^2+2x) \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه $g \circ f$ برابر می شود با:

$$D_{g \circ f} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

میانبر با قرار دادن $x = -2$ در تابع $g \circ f$ عبارت جلوی لگاریتم صفر

می شود، پس $x = -2$ نباید در دامنه تابع باشد. بنابراین گزینه های

(۱)، (۲)، (۳) حذف می شوند.

یافتن بُرد تابع مرکب

برای به دست آوردن بُرد تابع مرکب $f \circ g$ به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱ ابتدا بُرد تابع درونی یعنی g را به دست می آوریم.

۲ بُرد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع بیرونی یعنی f در نظر می گیریم.

۳ سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنه جدید به دست می آوریم.

مثال اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sin x$ باشند، بُرد تابع $f \circ g$ را

به دست آورید.

می دانیم $1 \geq \sin x \geq -1$ است، پس: $R_g = [-1, 1]$

بازه $[-1, 1]$ را به عنوان دامنه تابع f در نظر می گیریم: $D_f = [-1, 1]$

حال بُرد تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در دامنه

$[-1, 1]$ تعیین می کنیم:



تست اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$

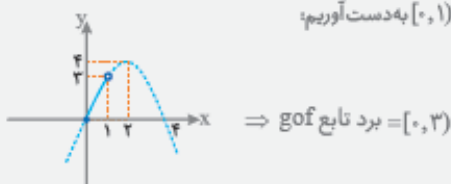
(داخل - ۹۹)

کدام است؟

(۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[1, 4]$

۲ می دانیم $1 < [2x] - 2x \leq 0$ است. بنابراین باید برد

را به ازای ورودی $(0, 1)$ به دست آوریم:



یافتن دامنه تابع مرکب

با توجه به نحوه تشکیل تابع $f \circ g$ مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر

ورودی تابع f قرار می گیرد، پس دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر خواهد بود:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) \Rightarrow D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

به همین ترتیب برای دامنه تابع های $g \circ f$ و $f \circ f$ می توان نوشت:

$$D_{f(f(x))} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \quad D_{g(f(x))} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثلاً اگر $f(x) = x+2$ و $g(x) = \sqrt{x+5}$ باشد، برای به دست آوردن دامنه

تابع $g \circ f$ ، باید ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص کنیم:

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [-5, +\infty)$$

حال با توجه به دامنه هردو تابع، خواهیم داشت:

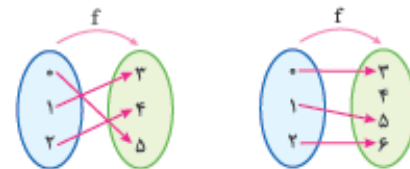
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x+2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x\} = [-7, +\infty)$$

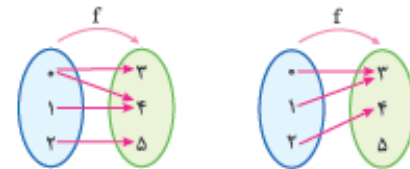
درس تابع یک‌به‌یک و تابع وارون

تابع یک به یک

اگر در یک رابطه تشکیل شده از زوج مرتب‌ها، به صورت (x, y) ، به ازای هر x ، فقط یک y داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است. هم‌چنین اگر در تابع، به ازای هر y ، فقط یک x داشته باشیم، به این تابع، یک‌به‌یک گویند.



تابع یک‌به‌یک است. تابع یک‌به‌یک است.

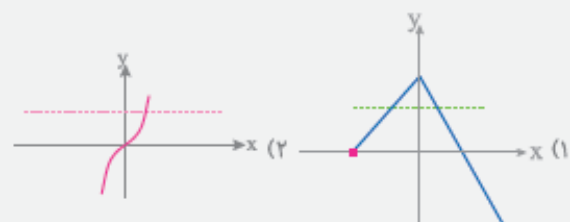


تابع است و یک‌به‌یک نیست. تابع نیست.

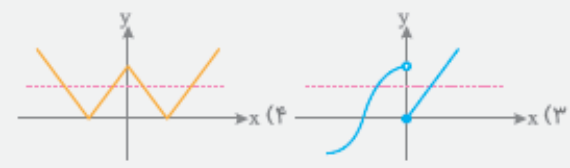
اگر تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل (x, y) باشد، به شرطی یک‌به‌یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند. مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (3, 0), (4, 2)\}$ یک‌به‌یک نیست، زیرا دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(4, 2)$ دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. نمودار تابع f به شرطی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور x ‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تذکر توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک‌به‌یک هستند.

مثال یک‌به‌یک بودن تابع‌های زیر را بررسی کنید.



یک‌به‌یک نیست. یک‌به‌یک است.



یک‌به‌یک نیست. یک‌به‌یک نیست.

تست اگر رابطه $f(x) = \{(a-2, 5), (-7, 3), (-5, 5), (a+b, 3)\}$

تابع یک‌به‌یک باشد، مقدار b کدام است؟

$$-1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -3 \quad 3 \quad -4 \quad 4$$

۴ چون زوج مرتب‌های $(a-2, 5)$ و $(-5, 5)$ و هم‌چنین $(-7, 3)$ و $(a+b, 3)$ دارای مؤلفه‌های دوم یکسان هستند، پس برای این‌که تابع یک‌به‌یک باشد، باید مؤلفه اول آن‌ها نیز برابر باشد:

$$a-2 = -5 \Rightarrow a = -3$$

$$a+b = -7 \Rightarrow -3+b = -7 \Rightarrow b = -4$$

تشخیص یک‌به‌یک بودن در توابع چندضابطه‌ای

برای این‌که یک تابع چندضابطه‌ای یک‌به‌یک باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

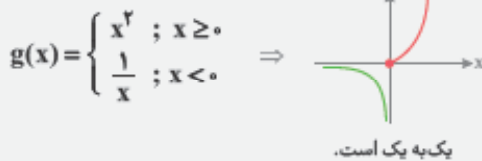
۱ تک‌تک ضابطه‌ها یک‌به‌یک باشند.

۲ برد دو ضابطه اشتراک نداشته باشد.

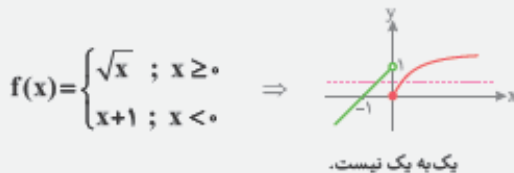
برای بررسی یک‌به‌یک بودن توابع چندضابطه‌ای، بهترین راه رسم نمودار تابع است.

مثال دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داده شده‌اند، یک‌به‌یک بودن این دو

تابع را بررسی کنید.



یک‌به‌یک است.



یک‌به‌یک نیست.

تست برای این‌که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 2 \\ x+a & ; x < 2 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، a در

کدام بازه می‌تواند قرار گیرد؟

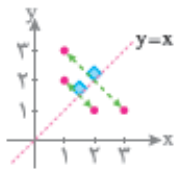
$$(-\infty, 4] \quad (4, \infty) \quad (-\infty, 2] \quad (2, 4] \quad (2, 4) \quad [2, 4]$$

۳ ابتدا نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار a رسم می‌کنیم، عدد a باعث می‌شود نمودار $y=x$ به سمت بالا یا پایین حرکت کند؛ اگر a منفی باشد، نمودار $y=x$ به پایین حرکت می‌کند و تابع یک‌به‌یک خواهد بود.

۲ اگر a مثبت باشد، خط $y=x$ به سمت بالا حرکت می‌کند، که حداکثر ۲ واحد می‌تواند به بالا حرکت کند تا به نقطه توپر برسد، زیرا اگر بیش‌تر از ۲ واحد حرکت کند از نقطه توپر عبور می‌کند و در این صورت تابع یک‌به‌یک نخواهد بود. پس a می‌تواند در بازه $(-\infty, 2]$ قرار گیرد.



مثلاً تابع $f = \{(2, 1), (3, 1)\}$ را در نظر بگیرید، وارون این تابع به صورت



مثلاً تابع $f^{-1} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ است. حال f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، همان‌طور که می‌بینید هر نقطه از تابع f بعد از قرینه شدن نسبت به $y = x$ به نقطه‌ای از f^{-1} تبدیل می‌شود.

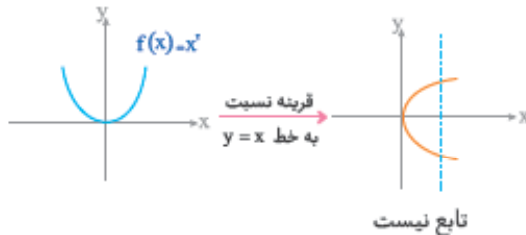
تذکر برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

مثال در هر یک از توابع زیر از روی نمودار f ، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



وارون یک تابع ممکن است تابع نباشد.

مثلاً $f(x) = x^2$ یک تابع است، اما وارون آن تابع نیست:



وارون تابع f در صورتی یک تابع است که f تابعی یک‌به‌یک باشد. در این حالت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است.

تست کدام یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\} \quad (1)$$

$$g = \{(2, 4), (3, 1), (4, 2)\} \quad (2)$$

$$h = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\} \quad (3)$$

$$k = \{(2, 2), (3, 1), (1, 2)\} \quad (4)$$

۲ در بین گزینه‌ها تابع g یک‌به‌یک است. چون تمام زوج مرتب‌ها، مؤلفه‌های اول و دوم متفاوت دارند. بنابراین تنها تابع g وارون‌پذیر است.

ویژگی‌های تابع وارون



۱ اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه $B(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است و بر عکس، به عبارت دیگر:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

محدود کردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن

بعضی از توابع در دامنه خود یک‌به‌یک نیستند، اما اگر دامنه آن‌ها را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شوند.

تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ در حالت کلی یک‌به‌یک نیست. برای یک‌به‌یک شدن، باید رأس سهمی را پیدا کنیم و دامنه را به قبل یا بعد از طول رأس سهمی محدود کنیم. بنابراین تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[\frac{b}{2a}, +\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه، یک‌به‌یک است.

مثلاً در تابع $f(x) = x^2 - 4x - 6$ ، طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{-4}{2(1)} = 2$ است، پس:



تذکر واضح است اگر تابع در یک بازه یک‌به‌یک باشد، در هر زیر بازه از آن بازه نیز یک‌به‌یک است.

تست در تابع $f(x) = x^2 - 6x + 11$ بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که می‌توان برای دامنه تابع در نظر گرفت تا این تابع یک‌به‌یک شود کدام است؟

$$(-\infty, 2] \quad (2) \quad [-3, 3] \quad (1)$$

$$[2, +\infty) \quad (4) \quad [3, +\infty) \quad (3)$$

۳ طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{-6}{2(1)} = 3$ است، بنابراین برای این که تابع یک‌به‌یک شود، باید یکی از قسمت‌های زیر را نگه داریم و بقیه تابع را حذف کنیم:



پس تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 3]$ یا $[3, +\infty)$ یک‌به‌یک است.

مفهوم تابع وارون

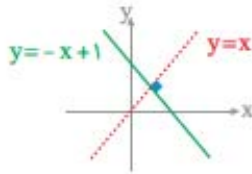
با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a, b) ، زوج مرتب (b, a) به دست می‌آید. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج مرتب‌های تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثلاً وارون تابع $f = \{(6, 3), (2, 5), (3, 4)\}$ به صورت زیر است:

$$f^{-1} = \{(3, 6), (5, 2), (4, 3)\}$$

اگر تابع f و تابع f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، ملاحظه می‌شود که نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند.

تنها دو تابع خطی وجود دارد که بر وارون خود منطبق هستند؛ یکی خط $y=x$ و دیگری خطوط عمود بر آن یعنی $y=-x+b$.
مثلاً وارون تابع $f(x)=-x+1$ برابر $f^{-1}(x)=-x+1$ است؛



تست نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر نقاط $(a+2, 0)$ و $(b, -1)$ روی نمودار f^{-1} باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) صفر
(۴) ۱

۱ ضابطه تابع خطی f در بازه $[-2, 0]$ به صورت $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ است. حال با توجه به این که نقاط $(a+2, 0)$ و $(b, -1)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارند، پس نقاط $(0, a+2)$ و $(-1, b)$ روی نمودار f قرار دارند؛
 $f(0) = a+2 \Rightarrow \frac{1}{2}(0) + 1 = a+2 \Rightarrow a = -1$
 $f(-1) = b \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 = b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow a+b = -\frac{1}{2}$

۲ یافتن ضابطه وارون تابع‌های درجه دوم و رادیکالی

از آن جایی که نمودار توابع درجه دوم به شکل سهمی است، پس در حالت کلی یک به یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیستند؛ بنابراین باید دامنه را به قبل یا بعد از طول رأس سهمی محدود کنیم.

مثال ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ با شرط $x \geq 2$ را به دست آورید.
طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{-f}{2a} = 2$ است. حال در $x \geq 2$ ضابطه وارون تابع $f(x) = (x-2)^2$ را به دست می‌آوریم.

$$y = (x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y} = |x-2| \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y} = x-2 \Rightarrow x = \sqrt{y} + 2 \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

تست ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 6x + 4$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که نزولی است، کدام است؟

$$f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x+5} \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+5} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{x-5} \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-5} \quad (۳)$$

۲ طول رأس سهمی برابر $-\frac{6}{2(1)} = -3$ است. از آن جایی که ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی روبه بالا بوده و در نتیجه بازه $[-3, -\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع در آن نزولی است. ضابطه وارون تابع را در این بازه به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 + 6x + 4 + 5 - 5 = (x+3)^2 - 5 \Rightarrow (x+3)^2 = y+5 \xrightarrow{\text{جذر}} |x+3| = \sqrt{y+5} \xrightarrow{x \leq -3} x+3 = -\sqrt{y+5} \Rightarrow x = -3 - \sqrt{y+5} \Rightarrow y^{-1} = -3 - \sqrt{x+5}$$

تست در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

$$-۵ \quad (۲) \quad -۸ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۳) \quad ۴ \quad \text{تعریف نشده}$$

۳ فرض می‌کنیم $f^{-1}(4) = a$ باشد، بنابراین:

$$f(a) = 4 \Rightarrow -a + \sqrt{-2a} = 4 \xrightarrow{\text{جایگزینی گزینه‌ها}} a = -2$$

۲ همواره دامنه تابع f با بُرد تابع f^{-1} برابر است. همچنین بُرد تابع f با دامنه تابع f^{-1} برابر است.

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

تست شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم را نشان می‌دهد.



دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $[2, 3]$ (۳) $[2, 8]$ (۴) $[3, 8]$

۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



با توجه به نمودار روبه‌رو، بازه‌ای که در آن مقادیر $y = f^{-1}(x)$ کمتر یا مساوی مقادیر $y = x$ باشد، برابر بازه $[3, 8]$ است.

یافتن ضابطه وارون تابع

برای یافتن ضابطه وارون تابع $y=f(x)$ باید x را برحسب y پیدا کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم. ضابطه وارون تابع‌های مشهور عبارت‌اند از:

۱ یافتن ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$

ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{x-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

مثال ضابطه وارون تابع $y = 2x + 1$ را به دست آورید.

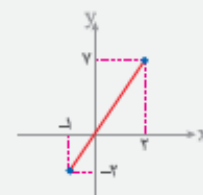
ابتدا x را برحسب y می‌نویسیم. سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

تست ضابطه وارون تابع $f(x) = 3x + 1$ با دامنه $[-1, 2]$ کدام است؟

$$\frac{x-1}{3}; -2 \leq x \leq 7 \quad (۲) \quad \frac{x+1}{3}; -2 \leq x \leq 7 \quad (۱)$$

$$\frac{x-1}{3}; -4 \leq x \leq 2 \quad (۴) \quad \frac{x+1}{3}; -4 \leq x \leq 2 \quad (۳)$$



۲ نمودار تابع f را در بازه $[-1, 2]$ رسم می‌کنیم:

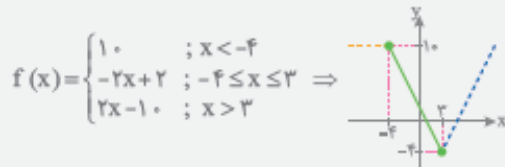
با توجه به نمودار برد تابع f در این بازه برابر $[-2, 7]$ است، پس:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}; -2 \leq x \leq 7$$

تست نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل - ۹۴)

$$\begin{aligned} (1) \quad -x + 6; x \leq -4 \quad (2) \quad -x + 5; x \geq 2 \\ (3) \quad -\frac{1}{4}x + 1; -4 \leq x \leq -2 \quad (4) \quad -\frac{1}{4}x + 1; -4 \leq x \leq 10 \end{aligned}$$

۴. نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



ضابطه وارون تابع در بازه اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 1$ است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-4 \leq y \leq 10$ است، پس دامنه تابع f^{-1} در این بازه به صورت $-4 \leq x \leq 10$ است.

۴. یافتن ضابطه وارون تابع هموگرافیک

اگر تابع کسری $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک باشد، برای به‌دست آوردن وارون آن، کافی است ضرب x در صورت کسر یعنی a و عدد ثابت مخرج یعنی d را قرینه کرده و سپس با یکدیگر جابه‌جا کنیم:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

تذکر اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

مثال اگر وارون تابع $f(x) = \frac{mx+1}{3x-2}$ برابر خودش باشد، مقدار m را به دست آورید.

$$m + (-2) = 0 \Rightarrow m = 2$$

تست ضابطه وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$ کدام است؟

$$(1) \quad y = \frac{2x-1}{x+1} \quad (2) \quad y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(3) \quad y = \frac{x+2}{x-1} \quad (4) \quad y = \frac{x-2}{x+1}$$

۳. ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم و سپس وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x+1}{x-1} - 1 &= \frac{2x+1-x+1}{x-1} = \frac{1 \times x + 2}{x-1} \\ \xrightarrow{a+d} y = y^{-1} &= \frac{x+2}{x-1} \end{aligned}$$

اگر صورت و مخرج پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک‌به‌یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست. [این اتفاق در

صورتی رخ می‌دهد که $ad - bc = 0$ باشد.]

مثلاً تابع $f(x) = \frac{2x-6}{x-3}$ وارون‌پذیر نیست، زیرا:

$$f(x) = \frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2; x \neq 3 \Rightarrow \text{یک‌به‌یک نیست.}$$

توابع رادیکالی به صورت $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$ در دامنه خود یک به یک بوده و برای به‌دست آوردن ضابطه وارون آن‌ها از روش کلی استفاده می‌کنیم.

تست ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x+a}$ به صورت $y = x^2 - bx + 5$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$(1) \quad -3 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -5 \quad (4) \quad 5$$

۲. در تابع $y = 2 - \sqrt{x+a}$ ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده و سپس ضابطه وارون را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+a} = 2-y &\Rightarrow x+a = (2-y)^2 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 4 - a \\ \Rightarrow y^{-1} = x^2 - 4x + 4 - a \end{aligned}$$

با مقایسه ضابطه به دست آمده و $y = x^2 - bx + 5$ نتیجه می‌گیریم:

$$b = 4, 4 - a = 5 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a + b = 3$$

تست ضابطه وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ کدام است؟

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{x+1} \quad (2) \quad y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

$$(3) \quad y = 1 + \sqrt[3]{x-2} \quad (4) \quad y = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

۳. ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده و سپس ضابطه وارون تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 + 1 &= (x-1)^3 + 2 \Rightarrow (x-1)^3 = y-2 \\ \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x-1 &= \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow y^{-1} = 1 + \sqrt[3]{x-2} \end{aligned}$$

تذکر در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع f داده می‌شود و از ما ضابطه تابع f^{-1} را می‌خواهند. در بسیاری از این سؤالات می‌توانیم با جای‌گذاری اعداد دلخواه و ویژگی تابع وارون، ضابطه f^{-1} را به دست آوریم. [اگر پس از جای‌گذاری عددی، دو گزینه باقی بماند، عدد دلخواه دیگری را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم.]

۳. یافتن ضابطه وارون تابع‌های قدر مطلق

برای به‌دست آوردن وارون توابع قدر مطلق، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطه وارون تابع را به دست می‌آوریم.

مثال تابع با ضابطه $f(x) = x + |x-1|$ در یک بازه وارون‌پذیر است. ضابطه وارون آن را در این بازه به دست آورید.

ریشه داخل قدر مطلق $x=1$ است، پس:

$$f(x) = \begin{cases} x + (x-1); & x \geq 1 \\ x - (x-1); & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-1; & x \geq 1 \\ 1; & x < 1 \end{cases}$$

در بازه $x < 1$ ، ضابطه تابع به صورت $f(x) = 1$ است، پس یک‌به‌یک نیست. بنابراین ضابطه وارون تابع را برای $x \geq 1$ به دست می‌آوریم:

$$x \geq 1: y = 2x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

برخورد f و f^{-1}

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} ، راهکار کلی این است که ضابطه f^{-1} را به دست آوریم و سپس معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم.

در توابع اکیداً صعودی، نقاط برخورد f و f^{-1} همان نقاط برخورد f و خط $y=x$ است. پس در توابع صعودی، برای تعیین نقاط برخورد توابع f و f^{-1} ، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم.

در صورتی که نمودار تابع f قابل رسم باشد، برای مشخص کردن نقاط برخورد تابع با وارون خودش، می‌توانیم از روش رسم نمودار کمک بگیریم.



تست اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (داخل - ۹۳)

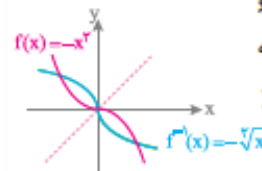
۱ (۱)	۲ (۲)
۳ (۳)	۴ (۴)

۴ با توجه به شکل، نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ با دامنه $(-1, +\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد و هیچ نقطه تلاقی با آن ندارد، پس f^{-1} و f همدیگر را قطع نمی‌کنند.



اگر تابع f صعودی نباشد، ممکن است تعدادی از نقاط برخورد f و f^{-1} روی نیمساز ربع اول و سوم نباشند. [نقاط پرفورد f و f^{-1} همواره نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند.]

مثلاً نمودار توابع $f(x) = -x^3$ و $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$ به صورت زیر است که دو نقطه برخورد آن‌ها روی خط $y=x$ نمی‌باشد.



در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $a+d \neq 0$) برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} همواره می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

تست نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج - ۹۶)

۱ (۱)	۲ (۲)
۳ (۳)	۴ (۴)

۲ چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x+4 = x^2-2x \Rightarrow x^2-3x-4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

مسائل ترکیبی تابع وارون و تابع مرکب

سؤالاتی که برای حل آن‌ها باید به‌طور همزمان از ویژگی‌های تابع مرکب و تابع وارون استفاده کنیم به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ در بعضی از سؤالات، ترکیب یک تابع با وارون تابعی دیگر مورد سؤال قرار می‌گیرد. برای حل این سؤالات تابع مرکب را به صورت فلش نمایش دهیم.

ترکیب یک تابع با وارون تابع دیگر

(۱) اگر $f(g^{-1}(a)) = b$ باشد:



(۲) اگر $f^{-1}(g(a)) = b$ باشد:



مثال توابع $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$ و $g(x) = 2|x| + 1$

مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(a)) = 2$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

نحوه تشکیل $f^{-1}(g(a)) = 2$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

$$a \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f^{-1}} 2 \Rightarrow f^{-1}(\bigcirc) = 2 \Rightarrow f(2) = \bigcirc$$

چون $(2, 3) \in f$ پس $\bigcirc = 3$ است. بنابراین $(a, 3) \in g$ است، پس:

$$2|a| + 1 = 3 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تست اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱ (۱)	۲ (۲)
۳ (۳)	۴ (۴)

۴ فرض می‌کنیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = \alpha$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(8)) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = f^{-1}(8) \quad (۱)$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(8)$ ضابطه f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$$8 = \frac{2}{5}x - 4 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(8) = 30$$

بنابراین از (۱) داریم:

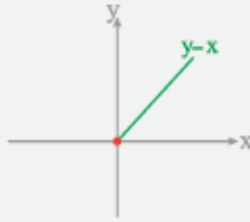
$$g(\alpha) = f^{-1}(8) = 30 \Rightarrow \alpha^3 + \alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(8)) = 3$$

۲ برای به‌دست آوردن تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ با داشتن توابع f و g ، می‌توانیم تابع

$g \circ f$ را به‌دست آوریم و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

تست نمودار تابع $(f \circ f^{-1})(x)$ به صورت زیر است. ضابطه تابع f کدام می‌تواند باشد؟



$$f(x) = x^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (3)$$

$$f(x) = 2|x| \quad (4)$$

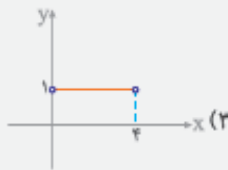
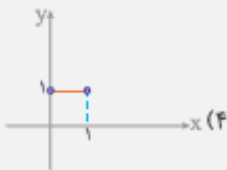
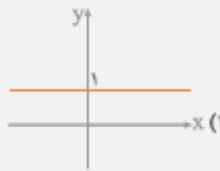
۳ می‌دانیم $(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in \mathbb{R}_f$ پس برد تابع f باید به صورت

$[0, +\infty)$ باشد و همچنین f تابعی وارون پذیر باشد. پس ضابطه f

می‌تواند $f(x) = \sqrt{x}$ باشد.

تست اگر $f(x) = -x^2 + 4; x > 0$ ، آنگاه نمودار $y = \frac{(f \circ f^{-1})(x)}{(f^{-1} \circ f)(x)}$

کدام است؟



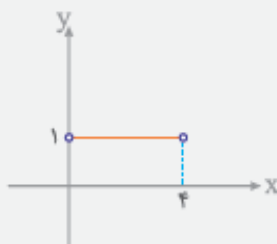
۳ با توجه به نمودار زیر، دامنه تابع f برابر $(0, +\infty)$ و برد آن $(-\infty, 4)$ است، پس:



$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x > 0 \Rightarrow y = \frac{(f \circ f^{-1})(x)}{(f^{-1} \circ f)(x)} = \frac{x}{x} = 1; 0 < x < 4$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x; x < 4$$

پس نمودار این تابع به صورت مقابل است:



تست اگر $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{2x+1}$ باشد، تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ است؟

$$\frac{2x}{x-3} \quad (4) \quad \frac{-x}{2x-3} \quad (3) \quad \frac{2x-3}{x} \quad (2) \quad \frac{2x}{3x+1} \quad (1)$$

۳ می‌دانیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ است، پس کافیت

وارون تابع $f \circ g$ را به دست آوریم. از آن جایی که تابع $f \circ g$ تابعی هموگرافیک است، پس:

$$(f \circ g)(x) = \frac{3x}{2x+1} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-x}{2x-3}$$

جابه‌جا و قرینه

$$\text{پس } (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{-x}{2x-3} \text{ است.}$$

ترکیب یک تابع با وارونش $(f^{-1} \circ f, f \circ f^{-1})$

اگر تابع $f(x)$ وارون پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است. از طرفی با توجه به دامنه توابع f و f^{-1} ، با حالت‌های زیر مواجه می‌شویم:

۱ در تابع $f^{-1} \circ f$ ، چون x ابتدا وارد تابع f می‌شود، پس x باید عضو دامنه f باشد:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f$$

۲ در تابع $f \circ f^{-1}$ ، چون x ابتدا وارد تابع f^{-1} می‌شود، پس x باید عضو دامنه f^{-1} باشد:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in D_{f^{-1}}$$

مثلاً اگر $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ باشد چون $D_f = [2, +\infty)$ است، پس:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \geq 2$$

و اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، چون $R_f = [0, +\infty)$ است، با توجه به این‌که $D_{f^{-1}} = R_f$ است، پس:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x; x \geq 0$$

تست اگر $f = \{(1, 2), (-1, 0), (2, 3), (0, 4)\}$ باشد، دامنه تابع

$f \circ f^{-1}$ کدام است؟

$$\{0, 2, 3, 4\} \quad (2) \quad \{-1, 1, 0, 2\} \quad (1)$$

$$\{2, 3, 4\} \quad (4) \quad \{-1, 1, 2\} \quad (3)$$

۲ می‌دانیم $(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in R_f$ است، پس دامنه تابع $f \circ f^{-1}$

با برد تابع f برابر است، بنابراین:

$$f = \{(1, 2), (-1, 0), (2, 3), (0, 4)\} \Rightarrow D_{f \circ f^{-1}} = R_f = \{2, 0, 3, 4\}$$

اگر $x = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ باشد، آنگاه f و g وارون یکدیگر هستند.

مثال اگر $f(x) = 2x - 1$ و ترکیب دو تابع f و g همانی باشد مقدار

$g(7)$ را به دست آورید.

می‌دانیم $g(7) = f^{-1}(7)$ است، پس برای به دست آوردن $f^{-1}(7)$

ضابطه f را برابر عدد ۷ می‌گذاریم:

$$f(x) = 7 \Rightarrow 2x - 1 = 7 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(7) = 4 \Rightarrow g(7) = 4$$

معادله و تابع درجه دوم

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیاز اصلی برای درک و تحلیل سؤالات این فصل، توان و عبارت‌های جبری و همچنین فصل معادله و نامعادله است. از معادله درجه دوم و سهمی، بیش‌تر در فصل‌های تابع، حد، مشتق و کاربرد مشتق استفاده می‌شود.

توصیه: توی کنکورهای ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ از این فصل سؤالاتی مطرح شد که هم محاسبات زیادی داشتند و هم بعضاً نیاز به خلاقیت داشتن!

اما سر جلسه کنکور نه فرصت زیادی برای آون همه محاسبات هست و نه فرصت زیادی برای فکر کردن و ایده‌پردازی. پس سعی کن با تمرین و تکرار زیاد، خودت رو برای سخت‌ترین‌ها آماده کنی.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۲	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲

درس { معادله درجه دوم

معادله درجه دوم

به معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم می‌گوییم.

معادله $x^2 + 2x + 3 = 0$ یا $x^2 - 5 = 0$ معادله درجه دوم محسوب می‌شوند و $2x - 3 = 0$ یک معادله درجه اول است، چون جمله x^2 در آن وجود ندارد.

روش‌های حل معادله درجه دوم

برای حل معادله درجه دوم معمولاً از سه روش مختلف می‌توان استفاده کرد؛ این روش‌ها عبارتند از:

۱ اولین و ابتدایی‌ترین راه برای حل معادله درجه دوم استفاده از تجزیه است؛ بدین معنی که طرف اول معادله درجه دوم را به حاصل ضرب دو عبارت درجه اول تجزیه می‌کنیم و سپس به کمک اصل زیر، ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

مثال ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ را به دست آورید.

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow (x)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

۲ اگر تجزیه عبارت درجه دوم به راحتی امکان‌پذیر نباشد، می‌توانیم برای حل معادله از روش مربع کامل استفاده کنیم. از این روش معمولاً در مواردی استفاده می‌کنیم که ضریب x^2 برابر ۱ باشد.

مراحل حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

- عدد ثابت را به طرف راست تساوی می‌بریم و اگر ضریب x^2 عددی غیر ۱ باشد، طرفین تساوی را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.
- ضریب x را نصف کرده و مربع آن را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.
- طرف اول را به شکل یک عبارت مربع کامل می‌نویسیم و عدد طرف راست را ساده می‌کنیم.
- از طرفین جذر می‌گیریم.

مثال ریشه‌های معادله $x^2 + 10x + 20 = 0$ را با استفاده از روش مربع کامل به دست آورید.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= -20 \\ x^2 + 10x + 25 &= -20 + 25 \\ (x + 5)^2 &= 5 \\ x + 5 &= \pm \sqrt{5} \Rightarrow x = -5 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

۳ برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ از روش کلی، ابتدا می‌بین (دلتا) معادله یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست می‌آوریم. در صورتی که Δ منفی نباشد، ریشه‌های معادله از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال معادله $2x^2 + x - 6 = 0$ را با استفاده از روش Δ حل کنید.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(-6) = 1 + 48 = 49 \\ \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - 7}{4} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

به عنوان مثال به معادلات زیر دقت کنید:

الف) معادله $3x^2 + 2x + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد؛ زیرا:

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8$$

ب) معادله $4x^2 + 4x + 1 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف است؛ زیرا:

$$\Delta = 4^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{2(4)} = -\frac{1}{2}$$

پ) معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است؛ زیرا:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

تست به ازای چند مقدار m معادله $4x^2 - (\Delta m - 3)x + 9 = 0$ دارای

ریشه مضاعف است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۲ برای آن که این معادله ریشه مضاعف داشته باشد، باید $\Delta = 0$ باشد؛ بنابراین:

$$\Delta = (\Delta m - 3)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0 \Rightarrow (\Delta m - 3)^2 = 144 = 12^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta m - 3 = 12 \Rightarrow m_1 = 3 \\ \Delta m - 3 = -12 \Rightarrow m_2 = -\frac{9}{\Delta} \end{cases}$$

بنابراین به ازای دو مقدار m ، معادله دارای ریشه مضاعف است.

مجموع، حاصل ضرب و اختلاف ریشه‌ها

چون جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله باشند، آنگاه روابط مجموع، حاصل ضرب و تفاضل ریشه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$1 \quad S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$2 \quad P = \alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$3 \quad |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

تست اگر حاصل جمع ریشه‌های معادله

$$(m+1)x^2 - (2m+1)x - 3m = 0 \quad \text{برابر با } \frac{5}{3} \quad \text{باشد، آنگاه}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

$$1 \quad -2 \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad 3 \quad -6 \quad 4 \quad \frac{9}{4}$$

۱ اگر ریشه‌های این معادله x_1 و x_2 باشند، آنگاه:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{2m+1}{m+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow 6m+3 = 5m+5 \Rightarrow m=2$$

حال $m=2$ را در معادله قرار می‌دهیم و حاصل ضرب ریشه‌ها را

$$\text{به دست می‌آوریم: } 3x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{3} = -2$$

تست ریشه بزرگ‌تر معادله $x(2x-3) = 8$ کدام است؟

$$1 \quad \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \quad 2 \quad \frac{3 + \sqrt{73}}{4}$$

$$3 \quad \frac{6 + \sqrt{73}}{2} \quad 4 \quad \frac{6 + \sqrt{73}}{4}$$

۲ ابتدا معادله را به صورت $2x^2 - 3x - 8 = 0$ بازنویسی و سپس با استفاده از روش Δ معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-8) = 73 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه بزرگ‌تر}} x = \frac{3 + \sqrt{73}}{4}$$

دو حالت خاص برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

۱ اگر $a + b + c = 0$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است و برعکس. مثلاً:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$$

۲ اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱- و دیگری برابر $-\frac{c}{a}$ است و برعکس. مثلاً:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x_2 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} = 0$ باشند،

حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

$$1 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 7$$

۱ چون مجموع ضرایب برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌ها برابر $\alpha = 1$ و دیگری برابر است با:

$$\beta = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 = 1 + 5 = 6$$

نکته برای تجزیه عبارت‌های درجه ۲ که ضریب x^2 عددی غیر یک

است، می‌توان ضریب x^2 را در عدد ثابت ضرب کرد و پس از تجزیه آن، ضریب x^2 را یک‌بار در یکی از پرانتزها، در x ضرب کرده و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر آن تقسیم می‌کنیم تا تجزیه عبارت اولیه به دست آید.

$$\text{ضرب} \quad 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (2x - 5)(x + \frac{4}{2}) = 0$$

تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم

در محاسبه ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به روش دلتا، عبارت Δ زیر رادیکال قرار دارد، پس با توجه به علامت Δ با سه حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ $\Delta < 0$: معادله ریشه حقیقی ندارد.

۲ $\Delta = 0$: معادله یک ریشه مضاعف دارد. [در این حالت طرف اول معادله

$$\text{مربع کامل است و مقدار دو ریشه مساوی } x = -\frac{b}{2a} \text{ است.}]$$

۳ $\Delta > 0$: معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، حاصل

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{20}{3} \quad (1) \quad \frac{20}{9} \quad (2) \quad \frac{80}{3} \quad (3) \quad \frac{80}{9} \quad (4)$$

۴ چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 5, \quad P = \alpha\beta = 3$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^3 - 3PS}{P^2} = \frac{5^3 - 3 \times 3 \times 5}{3^2} \\ &= \frac{125 - 45}{9} = \frac{80}{9} \end{aligned}$$

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - (a+2)x + 3 = 0$ باشند و

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \text{ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار } a \text{ کدام است؟}$$

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۴ در معادله $x^2 - (a+2)x + 3 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

برابر با: $P = 3$ و $S = a+2$ است، پس:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2 \Rightarrow \frac{a+2}{3} = 2 \Rightarrow a+2 = 6 \Rightarrow a = 4$$

تست به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه

$$\text{دوم } x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0 \text{ برابر ۲ می‌باشد؟ (داخل - ۹۶)}$$

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

۴ در معادله $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

برابر است با:

$$S = -\frac{-(m+1)}{2} = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{16}$$

مجموع جذر هر دو ریشه معادله برابر ۲ است، پس:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \Rightarrow \sqrt{S+2\sqrt{P}} = 2 \Rightarrow S+2\sqrt{P} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 \Rightarrow m+2 = 8 \Rightarrow m = 6$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x(x-3) = 5$ باشند، حاصل

$$\alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1) \text{ کدام است؟}$$

$$5 \quad (1) \quad -7 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$

۲ چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x(x-3) = 5 \Rightarrow x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 3, \quad P = \alpha\beta = -5$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1) = 2\alpha\beta + \alpha + \beta = 2(-5) + 3 = -7$$

روابط متقارن بین ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، به عبارت‌هایی مثل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ یا $\alpha^2\beta + \beta\alpha^2$ یا ... که با جابجایی α و β دوباره به همان عبارت می‌رسیم، عبارت متقارن می‌گوییم. اگر مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل ضرب آن‌ها را P نمایش دهیم، آن‌گاه:

مجموع مربع ریشه‌ها	$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$
مجموع مکعب ریشه‌ها	$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
مجموع جذر ریشه‌ها	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S+2\sqrt{P}}$

تذکره ۱ برای به دست آوردن $\alpha^2 + \beta^2$ و $\alpha^3 + \beta^3$ از اتحادهای مربع دو جمله‌ای و مکعب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

تذکره ۲ اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، برای به دست

آوردن حاصل عبارت‌های متقارن برحسب α و β (مثل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ یا $\alpha^2\beta + \beta\alpha^2$ یا ...) می‌توانیم به کمک اتحاد، فاکتورگیری، تجزیه و یا مخرج مشترک‌گیری عبارت داده شده را به عبارتی برحسب S و P بنویسیم.

تذکره ۳ اگر α و β زیر رادیکال باشند، باید رادیکال را به توان ۲ برسانید.

مثلاً برای به دست آوردن $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ آن را برابر A قرار می‌دهیم، ببینید:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} A = \sqrt{S+2\sqrt{P}}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند،

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$$

$$۲) P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

$$۳) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4^2 - 2(2) = 12$$

$$۴) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 4^3 - 3(2)(4) = 64 - 24 = 40$$

$$۵) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{4}{2} = 2$$

$$۶) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{12}{2} = 6$$

$$۷) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{1} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}$$

$$۸) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S+2\sqrt{P}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، مقدار

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha - 2} \text{ کدام است؟}$$

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳ چون α یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 2) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\alpha - 2}$$

بنابراین حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\beta}$ برابر است با:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

۲ اگر رابطه‌ای بین ریشه‌ها بیان شود که قابل تبدیل به S و P نباشد، یعنی غیر متقارن باشد، در این صورت به دلخواه S یا P را به دست آورده، سپس آن را به همراه رابطه داده شده در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی حل می‌کنیم تا ریشه‌ها به دست آیند.

مثال در معادله $2x^2 - mx + 16 = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها مربع دیگری

باشد، مقدار m کدام است؟

اگر ریشه‌های معادله را α و β فرض کنیم، طبق فرض مسئله رابطه $\alpha = \beta^2$ بین ریشه‌ها برقرار است [که رابطه‌ای غیر متقارن است]. از طرفی $\alpha\beta = \frac{16}{2} = 8$ است؛ بنابراین:

$$\alpha\beta = 8 \Rightarrow \beta^2 \times \beta = 8 \Rightarrow \beta^3 = 8 \Rightarrow \beta = 2$$

چون $\beta = 2$ یک جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$2(2)^2 - m(2) + 16 = 0 \Rightarrow 2m = 24 \Rightarrow m = 12$$

نوشتن معادله درجه دوم

اگر بخواهیم معادله درجه دومی با ریشه‌های x_1 و x_2 تشکیل دهیم، کافیست ابتدا $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ را به دست آوریم، سپس معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن 2 و 5 باشند.

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2 + 5 = 3 \\ P = x_1 x_2 = (-2)(5) = -10 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

نکته در معادله درجه دوم با ضرایب صحیح یا گویا، اگر یکی از ریشه‌ها برابر عدد گنگ $a + \sqrt{b}$ باشد، ریشه دیگر برابر $a - \sqrt{b}$ خواهد بود. (و برعکس)

مثال معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که یک ریشه آن

$$2 - \sqrt{3} \text{ باشد.}$$

ریشه دیگر برابر مزدوج این ریشه، یعنی $2 + \sqrt{3}$ است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = (2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) = 4 \\ P = x_1 x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

۲ روش جالب

برای به دست آوردن حاصل برخی از عبارت‌ها که بر حسب ریشه‌های معادله هستند، می‌توانیم از دو روش خلاقانه زیر استفاده کنیم:

۱ یک روش این است که حاصل عبارت خواسته شده را با کمک مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها، ساده کنیم و سپس از اتحادها استفاده کنیم.

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 5 = 0$ باشند،

حاصل عبارت $(x_1 - 2)^3 + (x_2 - 2)^3$ کدام است؟

(۱) -38 (۲) -42 (۳) 38 (۴) 42

۱ مجموع ریشه‌های معادله برابر $x_1 + x_2 = 2$ و حاصل ضرب آن‌ها

برابر $-5 = x_1 x_2$ است؛ پس:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 2 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = -x_2 \\ x_2 - 2 = -x_1 \end{cases} \\ \Rightarrow (x_1 - 2)^3 + (x_2 - 2)^3 &= (-x_2)^3 + (-x_1)^3 = -(x_1^3 + x_2^3) \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم $S^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3PS$ است؛ پس حاصل عبارت برابر است با:

$$-(x_1^3 + x_2^3) = -(S^3 - 3PS) = -(2^3 - 3(-5)(2)) = -38$$

۲ روش دیگر این است که این معادله‌ها را بر حسب عبارت صورت سؤال مرتب کنیم و سپس x_1 ، x_2 را در معادله جای‌گذاری کنیم.

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 5x = 0$ باشند،

حاصل عبارت $\frac{1}{(x_1 + 1)^3} + \frac{1}{(x_2 + 1)^3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{16}{25}$ (۲) $-\frac{16}{25}$ (۳) $\frac{16}{125}$ (۴) $-\frac{16}{125}$

۴ معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 5 &= 0 \Rightarrow x(x + 1) = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{x + 1} \\ \Rightarrow \frac{1}{(x_1 + 1)^3} + \frac{1}{(x_2 + 1)^3} &= \frac{x_1^3}{125} + \frac{x_2^3}{125} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{125} = \frac{S^3 - 3PS}{125} \\ &= \frac{(-1)^3 - 3(-5)(-1)}{125} = \frac{-1 - 15}{125} = -\frac{16}{125} \end{aligned}$$

روابط نامتقارن بین ریشه‌ها

منظور از روابط نامتقارن، عبارت‌هایی بر حسب α و β ، مثل $2\alpha + 5\beta^2$ است که با جابه‌جایی α و β به خود عبارت اولیه نمی‌رسیم. این سؤالات، دو حالت کلی دارند:

۱ در بعضی از سؤالات، α و β به عنوان ریشه‌های معادله درجه دوم داده می‌شود و حاصل یک عبارت نامتقارن بر حسب α و β خواسته می‌شود؛ برای حل این سؤالات باید به این نکته توجه کرد که ریشه‌های هر معادله در آن معادله صدق می‌کنند؛ بنابراین با جای‌گذاری α و β در معادله درجه دوم داده شده، به دو معادله بر حسب α و β می‌رسیم و با مرتب کردن این معادله‌ها بر حسب عبارت داده شده در سؤال، می‌توانیم حاصل آن عبارت را به دست آوریم.

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 12 = 0$ باشند، ریشه‌های

کدام معادله به صورت $\{\frac{\gamma}{\alpha} + 1, \frac{\gamma}{\beta} + 1\}$ است؟

$$x^2 + 7x - 3 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 7x + 3 = 0 \quad (1)$$

$$3x^2 + 7x - 3 = 0 \quad (4) \quad 3x^2 - 7x + 3 = 0 \quad (3)$$

۳ طبق ترتیب گفته شده عمل می‌کنیم:

$$1) S = \alpha + \beta = -2, P = \alpha\beta = -12$$

$$2) \begin{cases} S_{new} = (\frac{\gamma}{\alpha} + 1) + (\frac{\gamma}{\beta} + 1) = \gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) + 2 \\ = \gamma(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}) + 2 = \gamma(\frac{-2}{-12}) + 2 = \frac{\gamma}{3} \\ P_{new} = (\frac{\gamma}{\alpha} + 1)(\frac{\gamma}{\beta} + 1) = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} + \gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) + 1 \\ = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} + \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{\gamma^2}{-12} + \gamma(\frac{-2}{-12}) + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = 1 \end{cases}$$

$$3) \text{ معادله جدید: } x^2 - \frac{\gamma}{3}x + 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - \gamma x + 3 = 0$$

علامت ریشه‌ها

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در حالتی که دلتا مثبت است، دو ریشه حقیقی متمایز داریم. حالا می‌خواهیم علامت این دو ریشه را بررسی کنیم:

علامت ریشه‌ها	Δ	S	P
دو ریشه مثبت	+	+	+
دو ریشه منفی	+	-	+
دو ریشه غیرهم علامت	+		-

تست اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در

دو نقطه متمایز به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر

m به کدام صورت است؟

$$3 < m < 4 \quad (2) \quad m > 3 \quad (1)$$

$$4 < m < 5 \quad (4) \quad 3 < m < 5 \quad (3)$$

۳ باید $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ باشد:

$$1) \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(2)(m-3) > 0 \Rightarrow 4 - 8m + 24 > 0 \Rightarrow 28 - 8m > 0 \Rightarrow 7 - 2m > 0 \Rightarrow m < 3.5$$

$$2) S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{2} > 0 \quad \checkmark$$

$$3) P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m > 3$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده از (۱) و (۳) داریم: $3 < m < 3.5$

مراحل نوشتن معادله درجه دوم جدید بر اساس ریشه‌های یک معادله دیگر

اگر بخواهیم معادله درجه دوم بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های یک معادله دیگر ارتباط داشته باشد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا S و P معادله اولیه را تشکیل می‌دهیم.

۲ به کمک S و P معادله اولیه، S و P معادله خواسته شده را به دست می‌آوریم.

۳ مطابق رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ معادله جدید را می‌نویسیم.

مثال معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ باشد.}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = \frac{1}{1}, P = \alpha\beta = \frac{-1}{1}$$

$$S_{new} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\frac{1}{1})^2 - 2(\frac{-1}{1}) = \frac{5}{1}$$

$$P_{new} = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (\frac{-1}{1})^2 = \frac{1}{1}$$

$$\text{معادله جدید: } x^2 - \frac{5}{1}x + \frac{1}{1} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را α و β بنامیم، آنگاه با استفاده از روش بالا به حالت‌های خاص زیر می‌رسیم:

۱ معادله‌ای که ریشه‌هایش قرینه α و β یعنی $\alpha - \beta$ و $\beta - \alpha$ است، به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ است. [ب قرینه می‌شود]

به عنوان مثال، ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 6 = 0$ قرینه ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 6 = 0$ است.

۲ معادله‌ای که ریشه‌هایش عکس (وارون) α و β یعنی $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است. [بای و a و c عوض می‌شود]

به عنوان مثال، ریشه‌های معادله $-8x^2 + 5x + 1 = 0$ ، عکس ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 8 = 0$ است.

۳ معادله‌ای که ریشه‌هایش عکس و قرینه α و β یعنی $\frac{-1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\beta}$ است، به صورت $cx^2 - bx + a = 0$ است. [ب قرینه و بای و a و c عوض می‌شود]

به عنوان مثال، ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 2 = 0$ ، عکس و قرینه ریشه‌های معادله $2x^2 + 7x + 4 = 0$ است.

۴ معادله‌ای که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است، به صورت $ax^2 + b kx + c k^2 = 0$ می‌باشد.

به عنوان مثال، معادله‌ای که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ است، به صورت $x^2 - 10x + 24 = 0$ می‌باشد.

۵ معادله‌ای که ریشه‌هایش k واحد بیشتر یا k واحد کمتر از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است، به ترتیب به صورت $a(x+k)^2 + b(x+k) + c = 0$ و $a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$ است.

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای چهار جواب است که دوه دو قرینه هم هستند.

۲ اگر معادله بر حسب t دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد یا دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد؛

معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ فقط یک جواب مثبت دارد.

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو جواب دارد که قرینه یکدیگرند.

۳ در غیر این صورت، معادله‌های $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ و $ax^2 + bx + c = 0$ جواب ندارند.

مثال ۱ معادله $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$ را حل کنید.

با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادله را به صورت $t^2 + 2t - 3 = 0$ می‌نویسیم؛

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \\ t=-3 \end{cases}$$

مثال ۲ معادله $x^2 - 3x^2 - 4 = 0$ را حل کنید.

از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده می‌کنیم؛

$$x^2 - 3x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-1 \end{cases}$$

از آن جایی که $t = x^2$ است، پس نامنفی بوده و $t = 4$ قابل قبول است؛ بنابراین؛

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

تست معادله $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$ چند جواب صحیح دارد؟

$$2 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

۲ برای حل معادله از تغییر متغیر $t = \frac{x^2}{3} - 2$ استفاده می‌کنیم و آن را به یک معادله درجه دوم بر حسب t تبدیل می‌کنیم؛

$$(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0 \xrightarrow{(\frac{x^2}{3} - 2)=t} t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \\ \Rightarrow x = \pm 3 \\ t=6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow x^2 = 24 \\ \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای دو جواب صحیح $x = \pm 3$ است.

نکته ۱ برای این که معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ۲ ریشه

هم علامت باشد، کافی است $\Delta > 0$ و $P > 0$ باشد.

نکته ۲ اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای یک ریشه مثبت و

یک ریشه منفی باشد، کافیت فقط شرط $P < 0$ را بررسی کنیم.

تست

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم

$$x^2 + x + m^2 - 4 = 0$$

حقیقی منفی است؟

$$0 < m < 2 \quad (1)$$

$$m < -2 \text{ یا } m > 2 \quad (2)$$

$$-2 < m < 2 \quad (3)$$

$$m > -2 \quad (4)$$

۳ چون منحنی دارای یک ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی

است، پس حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است؛

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4}{1} < 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 - 4}_{(m-2)(m+2)} < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$$

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

برای حل بعضی از معادله‌های غیر درجه دو، می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن را به معادله درجه دوم تبدیل کرد.

مثال معادله $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) = 8$ را حل کنید.

با استفاده از تغییر متغیر $x^2 + 3x = t$ معادله را بر حسب t می‌نویسیم و داریم؛

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = -2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = -2 \\ x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x = 1, x = -4 \end{cases}$$

برای حل معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ باید از تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ و برای

حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باید از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده کنیم و آن

را به شکل معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ بنویسیم. حال از آن جایی که

$\sqrt{x}$ و x^2 نامنفی هستند، پس به ازای t های منفی، معادله جواب حقیقی

ندارد. [در این معادلات اگر $c = 0$ باشد، نیازی به تغییر متغیر نیست و معادله با

فاکتورگیری قابل حل است.]

۱ اگر معادله بر حسب t دارای دو جواب مثبت باشد؛

معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ دارای دو جواب مثبت است.

درس سهمی و ویژگی‌های آن

معرفی سهمی

نمودار هر تابع به شکل $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ به صورت یک سهمی است. معمولاً رأس سهمی را با S نشان می‌دهند. اگر ضریب x^2 مثبت باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر ضریب x^2 منفی باشد، دهانه سهمی رو به پایین است:



رأس سهمی

طول رأس سهمی برابر $x_S = -\frac{b}{2a}$ است. با جای‌گذاری آن در معادله سهمی، عرض رأس سهمی به دست می‌آید. البته می‌توانیم عرض رأس سهمی را از رابطه $-\frac{\Delta}{4a}$ پیدا کنیم. به عبارت دیگر، مختصات رأس سهمی به صورت $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.

تست اگر مختصات رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx - 7$ برابر

$(-2, 5)$ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۳ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقطه $(-2, 5)$ روی منحنی است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$y = ax^2 + bx - 7 \xrightarrow{(-2, 5)} 5 = a(-2)^2 + b(-2) - 7$$

$$\Rightarrow 4a - 2b = 12 \Rightarrow 2a - b = 6$$

۲) طول رأس سهمی برابر -2 است، پس:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \xrightarrow{(1)} 2a - 4a = 6$$

$$\Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -12$$

بنابراین $a - b = -3 - (-12) = 9$ است.

تذکر منظور از بیشترین یا کمترین مقدار یک سهمی، عرض نقطه رأس آن است.

تست بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 + mx + 6}$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

مقدار m کدام است؟

- ۱) $\pm\sqrt{5}$ ۲) ± 4 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) ± 1

۲ چون بیشترین مقدار تابع f برابر $\frac{1}{4}$ است، پس کمترین مقدار

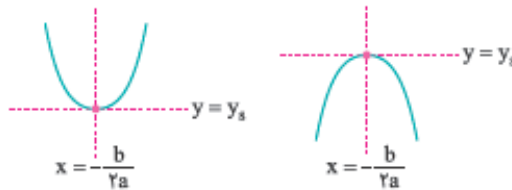
تابع $g(x) = x^2 + mx + 6$ برابر 2 است، بنابراین:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow -\frac{m^2 - 4(1)(6)}{4} = 2 \Rightarrow m^2 - 24 = -8$$

$$\Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

محور تقارن سهمی

سهمی نسبت به خط عمودی که از رأس آن می‌گذرد، متقارن است. به این خط محور تقارن سهمی می‌گویند و معادله آن به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ است:



تذکر ۱ خط افقی $y = y_S$ در رأس سهمی بر آن مماس است.

تذکر ۲ واضح است که سهمی، محور تقارن خود را در نقطه رأس خود قطع می‌کند.

از آن جایی که سهمی نسبت به محور تقارن آن متقارن است، پس اگر دو نقطه هم‌عرض (x_1, y) و (x_2, y) روی سهمی باشند، طول رأس سهمی برابر میانگین طول‌های این دو نقطه است، یعنی:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

مثلاً اگر دو نقطه $(-2, 6)$ و $(4, 6)$ روی یک سهمی باشند، معادله محور تقارن آن برابر $x = \frac{-2+4}{2} = 1$ است.

تست اگر $(-1, 4)$ و $(2, 4)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله

محور تقارن این سهمی کدام است؟

$$x = \frac{3}{4} \quad (4) \quad x = -1 \quad (3) \quad x = \frac{1}{4} \quad (2) \quad x = 2 \quad (1)$$

۲ چون نقاط $(-1, 4)$ و $(2, 4)$ دارای عرض‌های یکسان هستند،

پس معادله محور تقارن این سهمی برابر است با:

$$x = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

تست اگر خط $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله

$y = 2x^2 + (m-1)x - m$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

- ۱) -5 ۲) -4 ۳) -2 ۴) -7

۴ چون خط $x = -1$ محور تقارن سهمی است، پس طول رأس سهمی برابر $x_S = -1$ است:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow -\frac{m-1}{2(2)} = -1 \Rightarrow m-1 = 4 \Rightarrow m = 5$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = 2x^2 + 4x - 5$ بوده و عرض رأس آن، برابر است با:

$$y_S = 2(-1)^2 + 4(-1) - 5 = 2 - 4 - 5 = -7$$

نکته اگر حاصل جمع دو عدد مقداری ثابت باشد، آنگاه هنگامی حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن است که آن دو عدد برابر باشند.

تست با طنابی به طول ۸۸ متر می‌خواهیم دورتادور زمینی مستطیل‌شکل که یک طرف آن رودخانه است را حصارکشی کنیم. بیش‌ترین مساحت این زمین کدام است؟ (خارج-۹۱)

۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸
 ۲ یک ضلع زمین که به رودخانه مجاور است، نیاز به حصارکشی ندارد؛ پس با توجه به شکل $2y + x = 88$ و در نتیجه $y = \frac{88-x}{2}$ است؛ بنابراین مساحت زمین برابر است با:



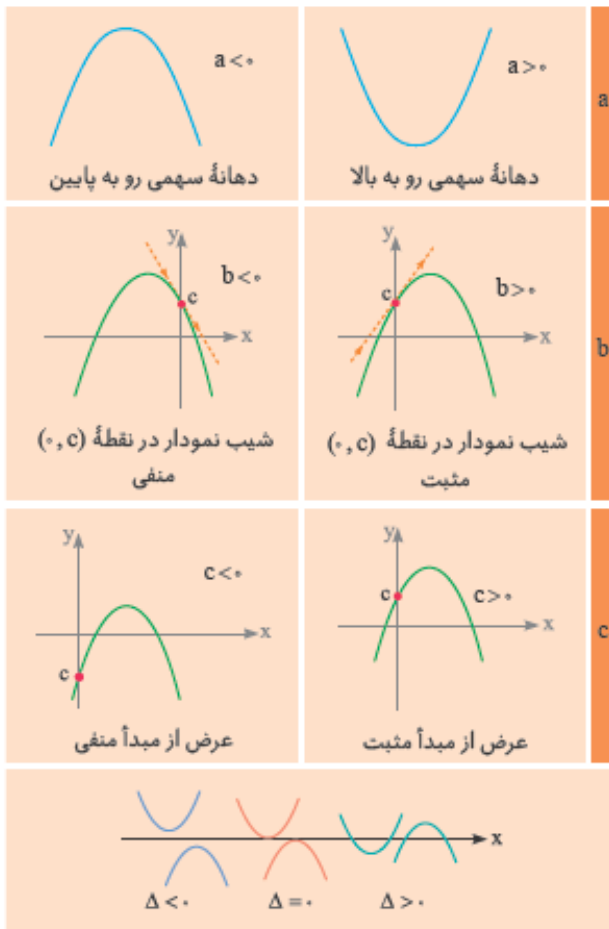
$$y \Rightarrow S = xy = x\left(\frac{88-x}{2}\right) = 44x - \frac{x^2}{2}$$

بیش‌ترین مساحت زمین، برابر عرض رأس سهمی $S = 44x - \frac{x^2}{2}$ است:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(44)^2 - 4(-\frac{1}{2})(0)}{4(-\frac{1}{2})} = 968$$

تعیین علامت ضرایب به کمک نمودار

علامت ضرایب در معادله $y = ax^2 + bx + c$



تست رأس سهمی $y = -x^2 + bx + 3$ روی خط $y = 4$ واقع است. اگر محور تقارن سهمی از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور کند، مقدار b کدام است؟

۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲
 ۲ چون ضریب x^2 منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است. در ضمن چون رأس سهمی روی خط $y = 4$ قرار دارد، پس عرض رأس سهمی برابر ۴ است:

$$y = -x^2 + bx + 3; y_S = 4 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow -\frac{b^2 - 4(-1)(3)}{4(-1)} = 4$$

$$\Rightarrow b^2 + 12 = 16 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

چون محور تقارن سهمی از ناحیه چهارم دستگاه مختصات عبور می‌کند، پس طول رأس سهمی باید مثبت باشد:

$$x_S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2(-1)} > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b = 2$$

صفرهای سهمی

نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

تست اگر صفرهای تابع $f(x) = 2x^2 + bx + 30$ دو واحد اختلاف داشته باشند، طول رأس سهمی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۷
 ۳ اگر α و β صفرهای تابع $f(x) = 2x^2 + bx + 30$ باشند، داریم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 240}}{2} = 2 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 240} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} b^2 - 240 = 16 \Rightarrow b^2 = 256 \Rightarrow b = \pm 16$$

$$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = \pm 4$$

مسائل کاربردی سهمی

در بعضی از مسائل که به صورت کاربردی بیان می‌شوند، می‌توانیم از معادله سهمی استفاده کنیم. در این مسائل برخی نقاط از جمله رأس سهمی و محل برخورد با محورهای مختصات از اهمیت بیش‌تری برخوردار هستند.

مثال شخصی توپی را از روی زمین به هوا پرتاب می‌کند. اگر معادله ارتفاع توپ در لحظه t پس از پرتاب به صورت $y = -3t^2 + 12t$ باشد، بیش‌ترین ارتفاع توپ چقدر است؟

چون ضریب t^2 منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است. از طرفی بیش‌ترین ارتفاع توپ، همان عرض رأس سهمی، یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{144 - 4(-3)(0)}{4(-3)} = -\frac{144}{4(-3)} = 12$$

با داشتن برخی نقاط خاص از سهمی، می‌توانیم به جای استفاده از روش گفته‌شده، معادله سهمی را سریع‌تر به دست آوریم:

۱ اگر سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه x_1, x_2 قطع کند، می‌توانیم معادله سهمی را به صورت $y = k(x - x_1)(x - x_2)$ در نظر بگیریم و با جای‌گذاری مختصات هر نقطه دلخواهی از سهمی، مقدار k را به دست آوریم.

مثال یک سهمی محور x را در دو نقطه با طول‌های ۱- و ۳ قطع

کرده و از نقطه $(4, 10)$ می‌گذرد. معادله سهمی را بنویسید.

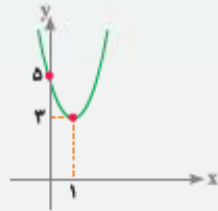
معادله سهمی را به صورت $y = k(x + 1)(x - 3)$ در نظر می‌گیریم. حال چون سهمی از نقطه $(4, 10)$ می‌گذرد، پس:

$$10 = k(\underbrace{(4+1)}_{\Delta})(4-3) \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = 2(x+1)(x-3) = 2x^2 - 4x - 6$$

۲ اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(\alpha, \beta)$ باشد، می‌توانیم معادله سهمی را به صورت $y = k(x - \alpha)^2 + \beta$ در نظر بگیریم و با کمک هر نقطه دیگری از سهمی مقدار k را به دست آوریم.

مثال معادله سهمی مقابل را بنویسید.



معادله سهمی را به صورت $y = k(x - 0)^2 + 3$ در نظر می‌گیریم. چون سهمی محور y را در نقطه‌ای با عرض ۵ قطع می‌کند، پس:

$$5 = k(0 - 1)^2 + 3 \Rightarrow 5 = k + 3 \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = 2(x - 0)^2 + 3$$

تست سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا از نقطه $(6, 1)$ محور تقارن خود را

در $(2, -7)$ قطع می‌کند. این سهمی از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

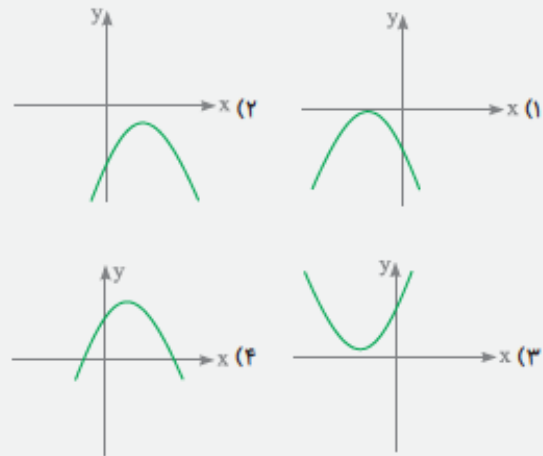
$$(1, -2), (2, -1), (3, -3), (4, -2), (5, -1)$$

۴ چون این سهمی محور تقارن خود را در نقطه $(2, -7)$ قطع می‌کند، پس نقطه $(2, -7)$ رأس سهمی است؛ بنابراین معادله آن را به صورت $y = k(x - 2)^2 - 7$ در نظر می‌گیریم. حال چون این سهمی از نقطه $(6, 1)$ می‌گذرد، پس:

$$y = k(x - 2)^2 - 7 \xrightarrow{(6, 1)} 1 = k(6 - 2)^2 - 7 \Rightarrow 16k = 8 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 7$ است که از میان گزینه‌ها، فقط نقطه $(-2, 1)$ در آن صدق می‌کند.

تست کدام نمودار مربوط به تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a < 0, b > 0, \Delta < 0$ است؟



۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) شیب خط مماس بر نمودار در $(0, c)$ منفی است؛ پس $b < 0$.

(۲) دهانه سهمی رو به پایین است؛ پس $a < 0$. شیب خط مماس در محل برخورد با محور y ها مثبت است؛ پس $b > 0$. با محور x ها برخوردی ندارد؛ پس $\Delta < 0$.

(۳) دهانه سهمی رو به بالا است؛ پس $a > 0$.

(۴) محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند؛ پس $\Delta > 0$.

نوشتن معادله سهمی

برای نوشتن معادله یک سهمی با داشتن ۳ نقطه متمایز از آن، راهکار کلی این است که معادله سهمی را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در نظر بگیریم و مختصات نقاط داده‌شده را در آن جای‌گذاری کنیم تا مقادیر a و b و c معلوم شود.

مثال یک سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند و

از دو نقطه با مختصات $(1, 6)$ و $(-2, -3)$ می‌گذرد. معادله سهمی را بنویسید.

معادله سهمی را به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم. چون سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کند، پس:

$$f(0) = 1 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

حال چون سهمی از دو نقطه $(1, 6)$ و $(-2, -3)$ می‌گذرد، خواهیم داشت:

$$f(1) = 6 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + 1 = 6 \Rightarrow a + b = 5$$

$$f(-2) = -3 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + 1 = -3 \Rightarrow 2a - b = -2$$

پس $b = 4$ و $a = 1$ است و معادله سهمی به صورت $y = x^2 + 4x + 1$ است.

مثال به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = x^2 + (m+1)x + 4$ و

خط $y = 2x + m$ در دو نقطه متقاطع اند؟

ابتدا معادله $x^2 + (m+1)x + 4 = 2x + m$ را تشکیل می دهیم و داریم:

$$x^2 + mx + x + 4 - 2x - m = 0 \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 4 - m = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(1)(4-m) > 0 \Rightarrow \frac{m^2 + 2m - 15}{(m-3)(m+5)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -5 \end{cases}$$

تست به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$

بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات مماس است؟ (خارج - ۹۳)

$$\begin{array}{cc} -4 & (1) \\ -12, 4 & (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 12, -4 & (3) \end{array}$$

۱ چون نمودار تابع درجه دوم بر خط $y = x$ مماس است، پس

باید Δ معادله تقاطع صفر باشد:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 4(2)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m - 24 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 12 \end{cases}$$

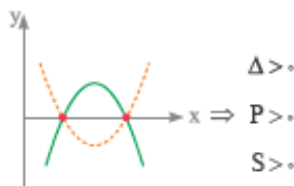
حال چون منحنی بر نیمساز ناحیه اول مماس است، پس m ای قابل قبول است که ریشه مضاعف معادله $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ را مثبت کند. ریشه مضاعف معادله برابر با $-\frac{m}{2(2)} = -\frac{m}{4}$ است؛ پس:

$$-\frac{m}{4} > 0 \Rightarrow m < 0$$

بنابراین $m = -4$ قابل قبول است.

مشخص کردن علامت صفرهای سهمی با کمک وضعیت نمودار سهمی

۱ اگر سهمی محور x ها را در ۲ نقطه با طول مثبت قطع کند.



۲ سهمی محور x ها را در ۲ نقطه با طول منفی قطع کند.

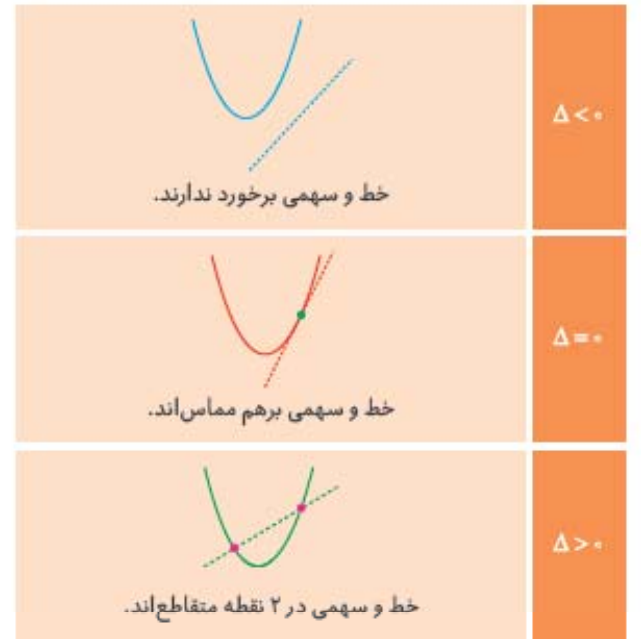


نکته اگر نمودار منحنی $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در طرفین

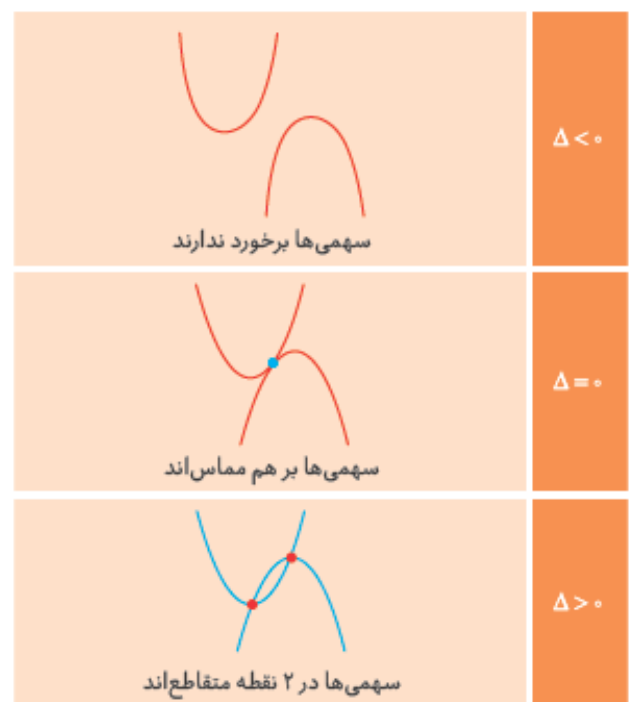
مبدأ مختصات قطع کند، کافیت حاصل ضرب ریشه ها منفی باشد.

بررسی وضعیت سهمی و خط

برای بررسی وضعیت سهمی به معادله $y_1 = ax^2 + bx + c$ و خط $y_2 = mx + h$ نسبت به هم ابتدا معادله تقاطع یعنی $y_1 = y_2$ را تشکیل می دهیم. سپس همه عبارت ها را به یک طرف تساوی منتقل می کنیم تا به یک معادله درجه دوم برسیم. حال با توجه به علامت Δ در این معادله درجه دوم با سه حالت مواجه می شویم:

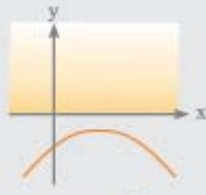


برای بررسی وضعیت دو سهمی به معادله های $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ و $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ نسبت به هم نیز ابتدا معادله تقاطع یعنی $y_1 = y_2$ را تشکیل می دهیم. سپس همه عبارت ها را به یک طرف تساوی منتقل می کنیم. حال با توجه به علامت Δ در این معادله درجه دوم با سه حالت مواجه می شویم:



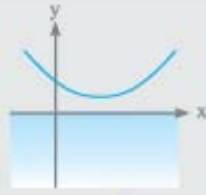
سهمی فقط از دو ناحیه بگذرد.

فقط از ناحیه ۳ و ۴ بگذرد.



$$a < 0, \Delta \leq 0$$

فقط از ناحیه ۱ و ۲ بگذرد.



$$a > 0, \Delta \leq 0$$

مثال اگر نمودار سهمی $y = -x^2 + (m-2)x - 4$ فقط از ناحیه اول و

 دوم عبور نکند، حدود m کدام است؟

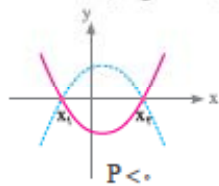
چون می‌خواهیم سهمی فقط از ناحیه اول و دوم عبور نکند، باید

شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} 1) a < 0 &\Rightarrow -1 < 0 \quad \checkmark \\ 2) \Delta \leq 0 &\Rightarrow (m-2)^2 - 4(-1)(-4) \leq 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4m - 12}{(m-6)(m+2)} \leq 0 \\ &\Rightarrow -2 \leq m \leq 6 \end{aligned}$$

 اگر سهمی از هر چهار ناحیه محورهای مختصات عبور کند، کافی است فقط شرط $P < 0$ را بررسی کنیم. با توجه به نمودار زیر، در این حالت:

۱ سهمی محور x ها را در طرفین مبدأ قطع می‌کند.

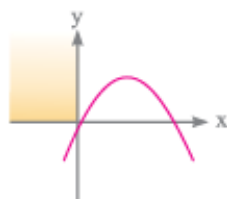
۲ معادله $ax^2 + bx + c = 0$ یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

 در این حالت Δ قطعاً مثبت بوده و نیازی به

 بررسی علائم Δ نیست.

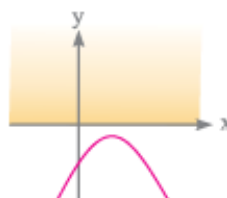
$$P < 0$$

نکته به شکل‌های زیر دقت کنید. حالتی که مسئله می‌گوید سهمی

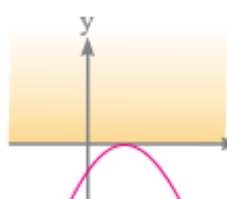
فقط از ناحیه ۲ بگذرد، نمودار (۱) مدنظر مسئله است؛ اما وقتی می‌گویند از ناحیه ۲ بگذرد، همه نمودار (۱)، (۲) و (۳) مدنظر است.



$$a < 0, \Delta > 0, S > 0, P \geq 0$$

۱


$$a < 0, \Delta < 0$$

۲


$$a < 0, \Delta = 0$$

۳
تست به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله

$$y = (m-1)x^2 - 4x + m - 6$$

مختصات، قطع می‌کند؟

$$1) 1 < m < 6$$

$$2) m < 1 \text{ یا } m > 6$$

$$3) m > 6$$

$$4) m > 1$$

۱ چون منحنی محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع

می‌کند، پس دارای یک ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی

است؛ پس حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m-6}{m-1} < 0 \Rightarrow \frac{m}{m-1} \mid \begin{array}{ccccccc} -\infty & 1 & 6 & +\infty \\ \hline \frac{m-6}{m-1} & + & - & + \end{array} \Rightarrow 1 < m < 6$$

تذکر در صورتی که حاصل ضرب ریشه‌ها منفی باشد، Δ معادله

همواره مثبت است.

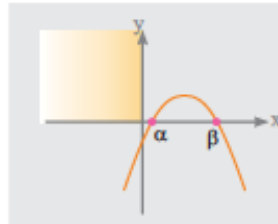
گذر از ناحیه‌های دستگاه مختصات

 در بعضی از سؤالات می‌خواهیم نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از

ناحیه مشخصی در دستگاه مختصات عبور نکند. همه حالت‌های ممکن به صورت زیر است:

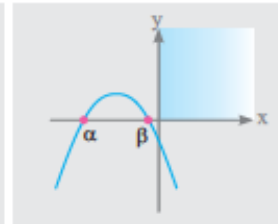
سهمی فقط از یک ناحیه بگذرد.

فقط از ناحیه ۲ بگذرد.



$$S > 0$$

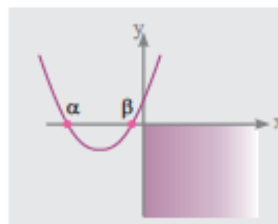
فقط از ناحیه ۱ بگذرد.



$$S < 0$$

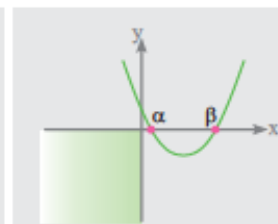
$$a < 0, \Delta > 0, P \geq 0$$

فقط از ناحیه ۴ بگذرد.



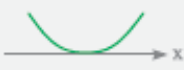
$$S < 0$$

فقط از ناحیه ۳ بگذرد.



$$S > 0$$

$$a > 0, \Delta > 0, P \geq 0$$

$\Delta = 0$	
$a > 0$	$a < 0$
	
$\Delta < 0$	
$a > 0$	$a < 0$
	

تست به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $f(x) = mx^2 - 3x + m$ همواره بالای محور x ها است؟

همواره بالای محور x ها است؟

$$m > 0 \quad (2) \quad -\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$m > \frac{3}{4} \quad (4) \quad m < -\frac{3}{4} \quad (3)$$

۴ باید ضریب x^2 مثبت و دلتا منفی باشد، $1) m > 0$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m)(m) < 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} < m^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} m > \frac{3}{2} \text{ یا } m < -\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} m > \frac{3}{2}$$

تست اگر نمودار سهمی $y = -x^2 + (m-2)x - 4$ فقط از ناحیه دوم

عبور نکند، حدود m کدام است؟

$$(1) (-2, +\infty) \quad (2) (6, +\infty) \quad (3) (-\infty, -2) \quad (4) (-2, 6)$$

۲ چون می‌خواهیم سهمی فقط از ناحیه دوم عبور نکند، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1) a < 0 \Rightarrow -1 < 0 \quad \checkmark$$

$$2) \Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(-1)(-4) > 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 - 4m - 12}_{(m-6)(m+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$$

$$3) P \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0 \quad \checkmark$$

$$4) S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{m-2}{-1} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

بنابراین اشتراک بازه‌های به دست آمده از (۲) و (۴) برابر $(6, +\infty)$ است.

سهمی‌های بالا یا پایین محور x ها

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$

۱ در صورتی که $\Delta < 0$ باشد، نمودار محور x ها را قطع نخواهد کرد؛ یعنی همواره بالای محور x ها یا همواره پایین محور x ها قرار خواهد گرفت.

۲ در صورتی که $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف بوده و نمودار سهمی در این ریشه بر محور x ها مماس است.

یادداشت:

معادله و نامعادله

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: برای شروع این فصل یادگیری اتحادها، خواص قدرمطلق و اعمال اولیه جبری مانند مخرج‌مشتک‌گیری کافیست. اما خودش پیش‌نیاز اصلی برای خواندن بسیاری از فصل‌هاست.

توصیه: در کنکورهای سال‌های اخیر، توجه ویژه‌ای به بخش معادله و نامعادله و تست‌های این بخش شده است که با تمرین و تکرار به راحتی قابل حل هستند. در ضمن به مسائل مربوط به کاربردهای معادلات گویا و گنگ (انجام کار، سرعت، غلظت، مسئله مسیر و ...) توجه ویژه‌ای کنید و سعی کنید مفهومشون رو درک کنید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۱	صفر	۲	۲	۱	۱	۱	۱

درس معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

به معادلاتی که صورت و مخرج کسر آن‌ها چندجمله‌ای است، معادلات گویا گویند. برای حل این معادلات به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا صورت و مخرج همه کسرها را تجزیه می‌کنیم.
- مخرج مشترک کسرها را به دست می‌آوریم و طرفین تساوی را به شکل یک کسر نوشته و طرفین وسطین می‌کنیم.
- (همچنین می‌توانیم طرفین تساوی را در کم‌م مخرج‌ها ضرب کنیم).
- معادله جدید ایجاد شده را حل می‌کنیم.

تذکر بعد از حل معادله، باید جواب‌های به دست آمده را بررسی کنیم تا در دامنه عبارت‌ها باشند. (یعنی هیچ مخرجی را در معادله اولیه صفر نکنند).

مثال معادله $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x^2-x}$ را حل کنید.

مخرج مشترک می‌گیریم و داریم:

$$\frac{(x-1) + 2x}{x^2-x} = \frac{x^2-x-1}{x^2-x} \Rightarrow 3x-1 = x^2-x-1$$

$$\Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \times \\ x=4 & \checkmark \end{cases}$$

از آن جایی که $x=0$ ریشه مخرج است، پس در دامنه معادله نیست و قابل قبول نمی‌باشد.

تست چه تعداد از معادله‌های زیر دارای جواب طبیعی هستند؟

الف) $\frac{x+5}{2x+3} = \frac{x-3}{x}$ (ب) $\frac{6}{x^2} - 2 = 0$ (پ) $3 - \frac{2}{x} = x$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۲ همه معادلات را حل می‌کنیم:

الف) $\frac{x+5}{2x+3} = \frac{x-3}{x} \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

ب) $\frac{6}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$

پ) $3 - \frac{2}{x} = x \Rightarrow x + \frac{2}{x} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2 - 3x}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

پس معادله‌های (الف) و (ب) دارای جواب طبیعی هستند.

ساده کردن در معادلات گویا

در معادلات گویا اگر هر یک از کسرها قابل ساده شدن باشند، ابتدا آن‌ها را ساده می‌کنیم. زیرا ریشه‌های مخرج در دامنه تعریف قرار ندارند.

مثلاً:

$$\frac{x^2+1}{x^2-x^2+x} + \frac{x^2-1}{x^2+x^2+x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)} + \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2(x^2+x+1)} = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x-x-1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2+2x-1 = x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 2} = x^2 - 4x + 3 \quad \text{معادله های جواب های}$$

تست کدام است؟

$$2(1) \quad 4(2) \quad 6(3) \quad 7(4)$$

۳ برای ساده تر شدن محاسبات فرض می کنیم $x^2 - 4x + 2 = A$ باشد ($A \neq 0$)، پس:

$$\frac{A+4}{A} = A+1 \Rightarrow A^2 + A = A+4 \Rightarrow A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2$$

$$\begin{cases} A = x^2 - 4x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \\ A = x^2 - 4x + 2 = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$(x-2)^2$$

بنابراین مجموع جواب ها برابر $0+2+4=6$ است.

مسائل کاربردی معادلات گویا

برای حل برخی مسائل که به صورت کاربردی مطرح می شوند، باید از معادلات گویا استفاده کنیم. این مسائل به سه دسته کلی زیر تقسیم می شوند:

۱ در بعضی از مسائل، اطلاعاتی راجع به مدت زمان انجام کار توسط دو نفر یا دو وسیله داده می شود. در این گونه مسائل اگر مدت زمان انجام یک کار برابر t ساعت باشد، مقداری از کار که در یک ساعت انجام می شود، برابر با $\frac{1}{t}$ از کل کار است.

فرض کنید شخص A کاری را به تنهایی در t_A ساعت و شخص B همان کار را به تنهایی در t_B ساعت انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در t_{AB} ساعت انجام خواهد شد. در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{t_{AB}}$$

مثال آرمان برای تایپ یک مقاله ۲ ساعت وقت صرف می کند. اگر بهرام به او کمک کند، کار تایپ مقاله در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه انجام می شود. اگر بهرام به تنهایی این مقاله را تایپ کند، چند دقیقه طول می کشد تا تایپ او تمام شود؟

آرمان به تنهایی مقاله را در ۱۲۰ دقیقه (۲ ساعت) تایپ می کند. اگر بهرام به او کمک کند، کار تایپ در ۸۰ دقیقه (۱ ساعت و ۲۰ دقیقه) انجام می شود. حال اگر بهرام به تنهایی مقاله را در t_B دقیقه تایپ کند، داریم:

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{t_B} = \frac{1}{80} - \frac{1}{120} = \frac{3-2}{240} = \frac{1}{240}$$

$$\Rightarrow t_B = 240$$

بنابراین بهرام این مقاله را به تنهایی در ۲۴۰ دقیقه تایپ می کند.

۲ در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به سرعت یک متحرک داده می شود. از درس فیزیک می دانیم:

$$\text{جابه جایی} = \frac{\text{زمان سپری شده}}{\text{سرعت}}$$

اگر بعد از ساده کردن معادله، به عبارتی مانند $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ رسیدیم، به دو نکته زیر توجه کنید:

۱ صورت کسرها را نباید از طرفین معادله ساده کرد. A را نمی توان با C ساده کرد. مگر آن که ریشه عبارت ساده شده را به عنوان یکی از جواب های معادله در نظر بگیریم. مثلاً:

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x+1}$$

۲ مخارج کسرها را می توانیم از طرفین ساده کنیم. B را می توان با D ساده کرد. اما باید دقت کنیم که ریشه های عبارت های ساده شده را از مجموعه جواب معادله حذف کنیم. مثلاً:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-x} \rightarrow \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x(x-1)} \xrightarrow{x \neq 1} \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{تست معادله } \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) دو جواب مثبت (۲) دو جواب منفی

(۳) یک جواب منفی (۴) جواب ندارد

۳ در سمت چپ معادله مخارج مشترک می گیریم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

با شرط $x \neq 1$ عبارت $x(x-1)$ را از مخارج کسرها حذف می کنیم:

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{2-x}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2-2x = -x^2+x+2$$

$$\Rightarrow 5x^2-3x-2=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} x=1 \quad \times \\ x=-\frac{2}{5} \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین $x = -\frac{2}{5}$ تنها جواب معادله است.

برای حل بعضی از معادلات گویا، می توانیم با یک تغییر متغیر مناسب، ظاهر معادله را ساده تر کنیم تا حل معادله آسان شود.

وقتی یک عبارت یکسان در چند جای معادله وجود دارد، آن عبارت را t در نظر می گیریم و معادله را برحسب t حل می کنیم. در نهایت x را به دست می آوریم. همچنین گاهی دو عبارت که معکوس یکدیگر هستند، در معادلات گویا به چشم می خورند؛ برای حل آن ها نیز از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم.

$$\text{مثال معادله } \frac{2}{x-2} + \frac{x-2}{2} = \frac{5}{2} \text{ را حل کنید.}$$

فرض می کنیم $\frac{2}{x-2} = t$ باشد؛ بنابراین:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{t^2+1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2-5t+2=0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(2) = 9 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5+3}{4} = 2 \\ t = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال با محاسبه t ، مقادیر x به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$t = 2 \Rightarrow \frac{2}{x-2} = 2 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

تست اگر محیط یک زمین مستطیل شکل، برابر ۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول زمین چقدر است؟

$$\frac{5\sqrt{5}-5}{2} \quad (۱) \quad 5\sqrt{5}-5$$

$$\frac{5\sqrt{5}+5}{2} \quad (۴) \quad 5\sqrt{5}+5 \quad (۳)$$

۱ اگر طول زمین x و عرض آن y باشد، با توجه به این که محیط زمین برابر ۲۰ است؛ پس: $2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$
از طرفی مستطیل، یک مستطیل طلایی است، پس:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{x+10-x}{x} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{10}{x} \Rightarrow x^2 = 10(10-x) \Rightarrow x^2 + 10x - 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+400}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{5}$$

با توجه به $x > 0$ ، طول زمین برابر با $5 + 5\sqrt{5}$ خواهد بود.

معادلات گنگ

به معادلاتی که در آن‌ها، عبارت رادیکالی شامل متغیر، وجود داشته باشد، معادلات گنگ می‌گویند.

$$\sqrt{x} = 5, \sqrt{2x^2 + 5x + 1} = x, \sqrt{x+2} + 4 = x - 2$$

مراحل حل معادله

برای حل معادلات گنگی که در آن‌ها فقط یک رادیکال قرار دارد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ رادیکال را در یک طرف معادله، تنها نگه می‌داریم و عبارت‌های دیگر را به طرف دیگر معادله می‌بریم.

۲ با به توان رساندن طرفین، رادیکال را از بین می‌بریم و معادله را حل می‌کنیم.

۳ جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی بررسی می‌کنیم تا عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج و طرف راست معادله را منفی نکنند و معادله به ازای جواب‌های به دست آمده برقرار باشد.

مثال معادله $\sqrt{x+1} + 5 = x$ را حل کنید.

$$\sqrt{x+1} = x - 5 \Rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \checkmark \\ x=3 \times \end{cases}$$

جواب $x=3$ در معادله داده شده صدق نمی‌کند، چون طرف راست معادله یعنی $x-5$ را منفی می‌کند.

تذکر برای حل بعضی از معادلات گنگ باید عمل توان رسانی را دو بار انجام دهیم؛ زیرا ممکن است با یک بار به توان رساندن، رادیکال از بین نرود.

مثلاً برای حل معادله $\sqrt{1+\sqrt{x}} = 2$ داریم:

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 + \sqrt{x} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x = 9$$

تست یک کشتی فاصله ۱۴۴ کیلومتری بین دو شهر را رفته و برگشته

است. مدت زمان رفت و برگشت ۱۵ ساعت است. اگر سرعت این کشتی در جهت جریان آب ۸ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی در جهت آب کدام است؟

$$۱۰ (۱) \quad ۱۶ (۲) \quad ۲۰ (۳) \quad ۲۴ (۴)$$

۱۴ اگر سرعت حرکت کشتی را هنگامی که در جهت آب حرکت می‌کند برابر v در نظر بگیریم، سرعت آن هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، برابر $v-8$ می‌شود. حال چون مجموع زمان رفت و برگشت ۱۵ ساعت است، پس:

$$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 15 \xrightarrow{+2} \frac{48}{v} + \frac{48}{v-8} = 5$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزینی گزینه‌ها}} v = 24$$

۳ در بعضی از مسائل، اطلاعاتی راجع به غلظت یک محلول داده می‌شود. از درس شیمی می‌دانیم غلظت، کمیتی است که بیان می‌کند چه مقدار از یک حل شونده در حلال، حل شده است.

$$\text{غلظت} = \frac{\text{وزن ماده حل شونده}}{\text{وزن کل محلول}}$$

معمولاً کلید حل گونه این مسائل، پیدا کردن وزن ماده حل شونده است. طبق رابطه فوق برای پیدا کردن وزن ماده حل شونده کافی است غلظت را در وزن کل محلول ضرب کنیم.

مثال ۱۲۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۸ درصد موجود است. با

تبخیر چند کیلوگرم آب می‌توانیم غلظت محلول را به ۱۰ درصد برسانیم؟

ابتدا وزن نمک را به دست می‌آوریم:

$$\text{وزن نمک} = 120 \times \frac{8}{100} = 9.6$$

حال فرض می‌کنیم با تبخیر x کیلوگرم آب، غلظت محلول به ۱۰ درصد می‌رسد، پس:

$$\frac{9.6}{100} = \frac{9.6}{120-x} \Rightarrow 96 = 120 - x \Rightarrow x = 24$$

عدد طلایی و مستطیل طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطه زیر برقرار باشد، مستطیل را مستطیل طلایی می‌نامند.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

در نسبت فوق، فرض می‌کنیم $\frac{x}{y} = t$ است و داریم:

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow t = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{t = \frac{x}{y}} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

پس در مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر $1/618$ است و این نسبت را عدد طلایی می‌نامند.

تست اگر $2 = \sqrt{22-a} - \sqrt{10-a}$ باشد، مقدار $\frac{2a-3}{9}$ کدام است؟

$$1) 1 \quad 2) 2 \quad 3) \frac{4}{3} \quad 4) \frac{7}{3}$$

۱ ابتدا $\sqrt{10-a}$ را به طرف راست تساوی منتقل کرده و سپس طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{22-a} - \sqrt{10-a} = 2 &\Rightarrow \sqrt{22-a} = 2 + \sqrt{10-a} \Rightarrow 22-a = 4 + 10-a + 4\sqrt{10-a} \\ \Rightarrow 4\sqrt{10-a} = 8 &\Rightarrow \sqrt{10-a} = 2 \Rightarrow 10-a = 4 \Rightarrow a = 6 \\ \Rightarrow \frac{2a-3}{9} = \frac{(2 \times 6)-3}{9} = 1 \end{aligned}$$

نکته برای حل بعضی از معادلات گنگ، می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب، ظاهر معادله را ساده‌تر کنیم تا حل معادله آسان شود.

مثال ۱ معادله $\sqrt{x-3} = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $\sqrt{x}-1 = t$ باشد؛ در این صورت:

$$\begin{aligned} t-2 = \sqrt{t} &\Rightarrow (t-2)^2 = t \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t \\ \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 &\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} t=1 \quad \times \\ t=4 \quad \checkmark \end{cases} \\ \Rightarrow t=4 &\Rightarrow \sqrt{x}-1=4 \Rightarrow \sqrt{x}=5 \Rightarrow x=25 \end{aligned}$$

مثال ۲ معادله $\sqrt{x+1} = \frac{2}{\sqrt{x+1}} + 1$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $\sqrt{x+1} = t$ باشد؛ بنابراین:

$$t = \frac{2}{t} + 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = -1 \quad \times \\ t=2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \quad \checkmark \end{cases}$$

واضح است $\sqrt{x+1}$ نمی‌تواند برابر ۱- باشد، پس:

$$\sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

تست حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

(ریاضی داخل-۹۴)

$$1) -1 \quad 2) 1 \quad 3) 2 \quad 4) 4$$

۲ با فرض $x^2 + 4x + 3 = t$ داریم:

$$t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \quad \checkmark \\ t=-1 \quad \times \end{cases}$$

با توجه به معادله $t = \sqrt{t+2}$ باید t عددی مثبت باشد، پس به‌ازای $t=2$ خواهیم داشت:

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

تذکر گاهی در برخی از معادلات گنگ که چندین رادیکال شامل متغیر وجود دارد، اشتراک دامنه رادیکال‌ها تهی خواهد بود و معادله فاقد ریشه می‌باشد و نیازی به حل معادله نخواهد بود.

نکته در بعضی از معادلات گنگ، وقتی پس از ساده کردن، به $\sqrt{\text{دایره}} = \text{دایره}$ می‌رسیم، دامنه عبارت زیر رادیکال باعث منفی شدن عبارت طرف دیگر تساوی می‌شود. در این حالت، معادله فاقد جواب حقیقی است.

مثال معادله $\sqrt{x-3} = 1-x$ چند جواب دارد؟

دامنه عبارت زیر رادیکال به صورت $[3, +\infty)$ است. در بازه $[3, +\infty)$ عبارت سمت راست تساوی یعنی $1-x$ در بازه $(-\infty, -2]$ قرار دارد. بنابراین سمت راست تساوی به‌ازای دامنه عبارت زیر رادیکال همواره عبارتی منفی است؛ در نتیجه معادله فاقد جواب است.

تست اگر $1 = 2a + \sqrt{3a+16}$ باشد، عدد $4a+9$ کدام است؟

(خارج-۹۸)

$$1) 4 \quad 2) 6 \quad 3) 15 \quad 4) 21$$

۱ رادیکال را تنها کرده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} \sqrt{3a+16} = 1-2a &\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a+16 = 1-4a+4a^2 \\ \Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 &= 0 \end{aligned}$$

حال برای تجزیه عبارت $4a^2 - 7a - 15$ عدد ۴ را در ۱۵ ضرب می‌کنیم، سپس تجزیه کرده و در یکی از پرانتزها a را در ۴ ضرب و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4a^2 - 7a - 15 = 0 &\Rightarrow a^2 - 7a - 60 = 0 \\ \Rightarrow (a - \frac{17}{4})(4a + 5) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \quad \times \\ a = -\frac{5}{4} \quad \checkmark \end{cases} \end{aligned}$$

چون $a=3$ طرف سمت راست معادله اولیه را منفی می‌کند،

$$\text{قابل قبول نیست، پس: } 4a+9 = 4(-\frac{5}{4})+9 = -5+9 = 4$$

مجموع و تفاضل دو رادیکال

برای حل معادلات گنگی که شامل مجموع یا تفاضل دو رادیکال هستند، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر مجموع دو رادیکال برابر صفر باشد، عبارت زیر هر رادیکال را برابر صفر قرار می‌دهیم و از جواب‌های به‌دست آمده، اشتراک می‌گیریم. مثلاً:

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=1, x=-1 \\ x^2-x=0 \Rightarrow x=1, x=0 \end{cases}$$

تنها جواب معادله $x=1$ است.

۲ اگر مجموع یا تفاضل دو رادیکال برابر عبارتی غیر صفر باشد، یکی از رادیکال‌ها را به طرف دوم می‌بریم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. مثلاً:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 &\Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{x-2} \\ \Rightarrow x+1 = 9 + (x-2) - 6\sqrt{x-2} &\Rightarrow x+1 = 9 + (x-2) - 6\sqrt{x-2} \\ \Rightarrow -6 = -6\sqrt{x-2} &\Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

مثال معادله $\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} = 3$ چند ریشه دارد؟
ابتدا دامنهٔ رادیکال‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$1) 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$2) x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$3) x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$$

چون اشتراک بازه‌های به دست آمده برابر $\emptyset$ می‌باشد، پس معادله فاقد ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

مسئله کاربردی در معادلات گنگ

در بعضی از مسائل مربوط به معادلات گنگ، یک مسیر داریم که از دو یا چند بخش تشکیل شده است. [در این سؤالات معمولاً بخش‌های مختلف مسیر در یک راستا نیستند]. برای حل این مسائل، باید طول بخشی از مسیر را به کمک قضیهٔ فیثاغورس تعیین کنیم و با حل یک معادلهٔ گنگ، طول همهٔ قسمت‌های این مسیر را به دست آوریم.

تست در شکل زیر، متحرکی از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و پس از عبور از نقطه B به نقطه C می‌رسد. اگر $CH = 3$ ، $AH = 11$ و مسافت طی‌شده توسط متحرک ۱۲ متر باشد، طول مسیر BC چند متر است؟



- ۱) $3/5$
۲) 4
۳) $4/5$
۴) 5

۴ با فرض $BH = x$ نتیجه می‌گیریم $AB = 11 - x$ و $BC = \sqrt{x^2 + 9}$ است، پس:

$$11 - x + \sqrt{x^2 + 9} = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} = x + 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین $BC = \sqrt{4^2 + 9} = 5$ است.

حل معادلات به روش هندسی

گاهی حل معادلات به روش جبری کاری سخت یا غیرممکن است. برای حل این معادلات می‌توانیم به سراغ روش هندسی برویم. روش هندسی معمولاً جواب دقیق را به ما نمی‌دهد، اما می‌توانیم تعداد جواب و حدود جواب را از این روش به دست بیاوریم.

مثال معادله $x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x+4}$ چند ریشه دارد؟

ابتدا دو طرف معادله را به شکلی می‌نویسیم که نمودار دو طرف تساوی را به راحتی بتوانیم رسم کنیم:

$$x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{f(x)} = \underbrace{\sqrt{x+4}}_{g(x)}$$

حالا هر دو نمودار $f(x) = (x-1)^2$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



پس این معادله دارای ۲ ریشه می‌باشد.

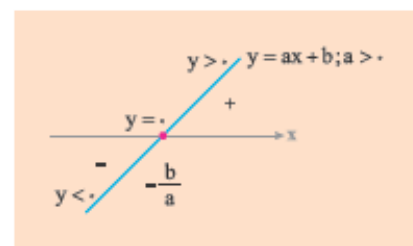
درس نامعادلات و تعیین علامت

تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ ۱ و درجهٔ ۲

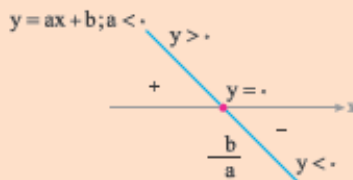
برای تعیین علامت عبارت درجهٔ یک $ax + b$ ، ابتدا آن را به معادلهٔ $ax + b = 0$ تبدیل می‌کنیم و ریشهٔ معادله را به دست می‌آوریم. سپس مطابق جدول تعیین علامت زیر، علامت آن را مشخص می‌کنیم:

جدول تعیین علامت

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مخالف علامت	مخالف علامت	موافق علامت



x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	-



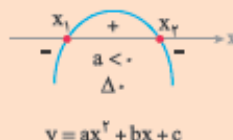
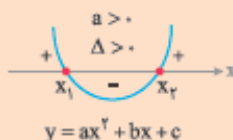
x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	+

مثلاً:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 3 & +\infty \\ \hline (x-3)^2 & + & 0 & + \end{array}$$

 $\Delta > 0$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_1 & x_2 & +\infty \\ \hline y & \text{موافق علامت } a & \text{مخالف علامت } a & \text{موافق علامت } a & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_1 & x_2 & +\infty \\ \hline y & + & - & + & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_1 & x_2 & +\infty \\ \hline y & - & + & - & \end{array}$$

مثلاً:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -2 & 2 & +\infty \\ \hline (x^2 - x^2) & - & 0 & + & - \end{array}$$

تست عبارت $P(x) = x^2 - 3x - 10$ در کدام بازه مثبت نیست؟

$$(-\infty, -2) \quad (2, \infty)$$

$$[-2, 2] \quad (-5, 2)$$

۴ ریشه‌های عبارت $P(x) = x^2 - 3x - 10$ را به دست می‌آوریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -2 & 5 & +\infty \\ \hline P(x) & + & - & + & \end{array} \Rightarrow [-2, 5]$$

تست جدول تعیین علامت چه تعداد از عبارت‌های زیر به صورت

مقابل است؟

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline P(x) & + & 0 & + \end{array}$$

الف) $P(x) = x^2 - 2x + 1$

ب) $P(x) = x - 1$

پ) $P(x) = x^2 - x$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

۱ چون در جدول داده شده، $x = 1$ تنها ریشه $P(x)$ است، پس (پ) نادرست است. از طرفی علامت $P(x)$ به ازای همه نقاط به جز $x = 1$ مثبت است، پس (ب) نیز نادرست است. اما در (الف) می‌توانیم $P(x)$ را به صورت $(x - 1)^2$ بنویسیم که جدول تعیین علامت آن در صورت سؤال نمایش داده شده است.

مثال عبارت $-5x + 8$ را تعیین علامت کنید.ریشه معادله $-5x + 8 = 0$ برابر $\frac{8}{5}$ است. پس:

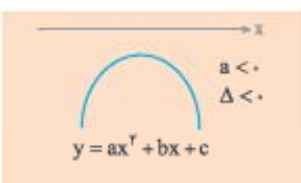
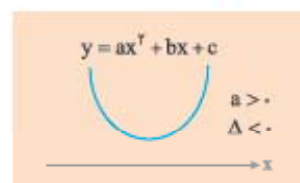
باتوجه به نمودار نیز واضح است که تابع بعد از $x = \frac{8}{5}$ ، پایین محور x ها است و دارای علامت منفی است و قبل $x = \frac{8}{5}$ ، بالای محور x ها است و دارای علامت مثبت است.

برای تعیین علامت عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ ابتدا آن را به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل می‌کنیم و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم. سپس با توجه به علامت Δ ، عبارت درجه دوم را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

 $\Delta < 0$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y & \text{موافق علامت } a & & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y & + & & \end{array}$$

همواره مثبت

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y & - & & \end{array}$$

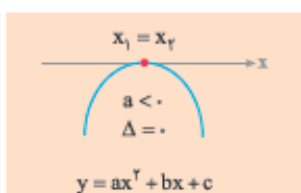
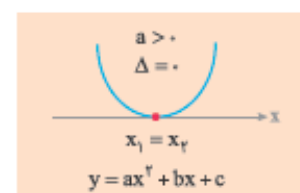
همواره منفی

مثلاً:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline x^2 - x + 1 & + & & \end{array}$$

 $\Delta = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_1 = x_2 & +\infty \\ \hline y & \text{موافق علامت } a & 0 & \text{موافق علامت } a \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_1 = x_2 & +\infty \\ \hline y & + & 0 & + \end{array}$$

همواره نامنفی

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & x_1 = x_2 & +\infty \\ \hline y & - & 0 & - \end{array}$$

همواره ناممثبت

۴ برای ریشه‌های صورت کسر، صفر و برای ریشه‌های مخرج کسر «تعریف نشده» می‌نویسیم.

۵ علامت ضرب بزرگ‌ترین توان در همه عبارت‌ها را در هم ضرب کرده، علامت حاصل را در اولین خانه از سمت راست قرار می‌دهیم.

۶ در ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه فرد، علامت‌ها را یکی‌درمیان در اطراف ریشه عوض می‌کنیم ولی در ریشه مضاعف (یعنی توان زوج داشته باشد) یا در ریشه عبارت داخل قدر مطلق، علامت را عوض نمی‌کنیم.

مثال عبارت $P(x) = \frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+2)(x^2-4)}$ را تعیین علامت کنید.

چون عبارت x^2+3 همواره مثبت است، آن را در تعیین علامت دخالت نمی‌دهیم.

$$P(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-1}{(x+2)^2(x-2)}$$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
P(x)			...		
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
P(x)		+	-	+	
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
P(x)		+	-	+	
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
P(x)		+	-	+	

تست عبارت $P(x) = \frac{(-x^2-1)(x+1)^3}{x^2-5x+6}$ در کدام بازه مثبت است؟

- (۱) $(3, +\infty)$ (۲) $(-1, 2)$
(۳) $(2, 3)$ (۴) $(-\infty, 2)$

۳ در عبارت $P(x) = \frac{(-x^2-1)(x+1)^3}{x^2-5x+6}$ ، چون $(-x^2-1)$ همواره

منفی است، پس به جای آن علامت منفی می‌گذاریم. از طرفی می‌دانیم توان فرد روی علامت عبارت تأثیری ندارد. پس تعیین علامت

$(x+1)^3$ مانند $x+1$ است. بنابراین:

$$P_1(x) = \frac{-(x+1)}{(x-2)(x-3)}$$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
P(x)	+	-	+	-	+

با توجه به گزینه‌ها، عبارت $P(x)$ در بازه $(2, 3)$ مثبت است.

خواص نامساوی‌ها

خاصیت‌های اصلی نامساوی $a < b$ به صورت زیر است:

۱ می‌توانیم به طرفین نامساوی عددی اضافه یا کم کنیم.

$$a+c < b+c$$

۲ می‌توانیم طرفین را در عدد مثبت c ضرب یا بر عدد مثبت c تقسیم کنیم.

$$ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

تعیین علامت عبارت تشکیل شده از ضرب یا تقسیم چند عبارت

برای تعیین علامت عبارت‌هایی که از ضرب یا تقسیم چند عبارت درجه اول تشکیل شده‌اند، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ در سطر اول جدول تعیین علامت، ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

۲ هر عبارت درجه اول را به تنهایی در یک سطر تعیین علامت می‌کنیم.

۳ در هر ناحیه، علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. به‌ازای ریشه‌های صورت کسر، حاصل عبارت برابر صفر و به‌ازای ریشه‌های مخرج کسر، عبارت تعریف نشده است.

مثال عبارت $P(x) = \frac{x+1}{x-2}$ را تعیین علامت کنید.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
...			...	
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
x+1	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
...			...	
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
x+1	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
P(x)	+	-	+	+

نکته توان فرد یا ریشه مرتبه فرد روی علامت عبارت تأثیری ندارند. بنابراین تعیین علامت عبارت‌های $\sqrt[n]{ax+b}$ و $\sqrt[n]{ax+b}$ همانند تعیین علامت $ax+b$ است.

تست عبارت $P(x) = \frac{2x-5}{x-4}$ در کدام بازه منفی است؟

- (۱) $(2, 4)$ (۲) $(\frac{5}{2}, 4)$
(۳) $(4, 5)$ (۴) $\mathbb{R} - [\frac{5}{2}, 4]$

۲ جدول تعیین علامت را مطابق ترتیب گفته شده رسم می‌کنیم و داریم:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
2x-5	-	+	+	+
x-4	-	-	+	+
P(x)	+	-	+	+

عبارت $P(x)$ در بازه $(\frac{5}{2}, 4)$ منفی است.

تعیین علامت به روش سریع

برای این که بتوانیم هر عبارتی (چند جمله‌ای، کسری و ...) را سریع تعیین علامت کنیم، می‌توانیم جدول تعیین علامت را به ترتیب زیر پر کنیم:

۱ عبارات همواره مثبت را در تعیین علامت دخالت نمی‌دهیم و به جای عبارات همواره منفی، فقط علامت منفی می‌گذاریم.

۲ همه عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کرده و ریشه هر عامل را به دست می‌آوریم.

۳ ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) در سطر اول جدول تعیین علامت می‌نویسیم.

مثال نامعادله $\frac{x^2+2x+3}{x-1} \leq x$ را حل کنید.

$$\frac{x^2+2x+3}{x-1} - x \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x+3 - x(x-1)}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+3}{x-1} \leq 0$$

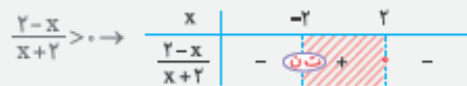


$\Rightarrow$ مجموعه جواب $[-1, 1)$

تذکر برای این که ببینیم عبارت $P(x)$ به ازای چه مقادیری از x همواره مثبت می شود، باید نامعادله $P(x) > 0$ و برای این که ببینیم عبارت $P(x)$ به ازای چه مقادیری از x همواره منفی می شود، باید نامعادله $P(x) < 0$ را حل کنیم.

مثال عبارت $\frac{y-x}{x+y}$ در کدام بازه مثبت است؟

باید نامعادله $\frac{y-x}{x+y} > 0$ را حل کنیم. بنابراین جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم و داریم:



$\Rightarrow (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

نکته اگر هنگام تعیین علامت به عبارت های درجه دوم برخورد کردیم که ریشه نداشتند، آن ها را کنار گذاشته و فقط علامت ضرب x^2 را نگه می داریم و سپس عبارت را مانند آنچه قبلاً گفته شد، تعیین علامت می کنیم.

مثال نامعادله $(x^2-2x-3)(x^2-2x-3) \geq 0$ را حل کنید.

عبارت x^2-2x-3 ریشه ندارد (چون $\Delta < 0$)؛ پس این عبارت را حذف کرده و فقط علامت منفی پشت x^2 را نگه می داریم؛

$$-(x^2-2x-3) \geq 0 \Rightarrow -(x-3)(x+1) \geq 0$$



تست جواب نامعادله $\frac{2x+3}{y} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

$$x < \frac{5}{4} \quad (1) \quad x > \frac{7}{6} \quad (3) \quad x > \frac{3}{4} \quad (2) \quad x < \frac{2}{3} \quad (4)$$

۴ طرفین نامعادله را در عدد ۱۲ ضرب می کنیم تا مخج ها از بین بروند:

$$12 \times \left(\frac{2x+3}{y} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{6(2x+3)}{y} - 9 > \frac{4(4x+1)}{3} \Rightarrow \frac{12x+18}{y} - 9 > \frac{16x+4}{3} \Rightarrow \frac{12x+18}{y} > \frac{16x+4}{3} + 9$$

۳ اگر طرفین را در عدد منفی c ضرب یا بر عدد منفی c تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.

$$a < b \xrightarrow{c < 0} \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$$

مثلاً؛

$$2 < 3 \Rightarrow \begin{cases} 2 \times -5 > 3 \times -5 \\ -\frac{2}{5} > -\frac{3}{5} \end{cases}$$

۴ اگر دو طرف یک نامساوی هم علامت باشند، با معکوس کردن آن ها جهت عوض می شود. مثلاً؛

$$2 < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$$

۵ اگر دو طرف یک نامساوی مختلف علامت باشد، با معکوس کردن آن ها جهت عوض نمی شود. مثلاً؛

$$-2 < 5 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{5}$$

نکته قدرمطلق و توان زوج برای اعداد مثبت جهت را عوض نمی کند، اما در اعداد منفی باعث عوض شدن جهت می شود.

$$0 < a < b \xrightarrow{\text{زوج}} \begin{cases} a^n < b^n \\ |a| < |b| \end{cases}$$

$$a < b < 0 \xrightarrow{\text{زوج}} \begin{cases} a^n > b^n \\ |a| > |b| \end{cases}$$

تست اگر $a < b$ و $c < 0$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$$(پ) \quad ac^2 > bc^2$$

$$(الف) \quad ac > bc$$

$$(ت) \quad a^2c > b^2c$$

$$(پ) \quad a+c > b+c$$

(۱) (الف)، (پ)، (۲) (ب)، (پ) (۳) فقط (الف) (۴) فقط (پ)

۳ به بررسی عبارات می پردازیم:

$$(الف) \quad a < b \xrightarrow{\frac{c}{c} < 0} ac > bc$$

$$(ب) \quad a < b \xrightarrow{\frac{c^2}{c^2} > 0} ac^2 < bc^2$$

$$(پ) \quad a < b \xrightarrow{+c} a+c < b+c$$

(ت) چون علامت a و b مشخص نیست، ممکن است $a^2 < b^2$ یا $a^2 > b^2$ باشد.

حل نامعادله های گویا

برای حل نامعادله های درجه اول، بهترین راه این است که x را در یک طرف نامعادله تنها کنیم.

مثال مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{5} > \frac{1}{3}$ را به دست آورید.

$$\frac{x-1}{5} > \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 15} x-1 > \frac{5}{3} \Rightarrow x > 1 + \frac{5}{3} \Rightarrow x > \frac{8}{3}$$

راهکار کلی برای حل نامعادله های گویا این است که همه جملات را به یک طرف ببریم و سپس با استفاده از تعیین علامت، جواب را به دست آوریم.

۲ طرفین نامعادله (۱) را در ۳ و طرفین نامعادله (۲) را در ۶ ضرب می‌کنیم؛

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{4x-1}{3} > 3x-2 &\Rightarrow 4x-1 > 9x-6 \\ \Rightarrow 5 > 5x &\Rightarrow x < 1 \\ 2) \frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2} &\Rightarrow 9x+15-4x+8 > 3 \\ \Rightarrow 5x > -20 &\Rightarrow x > -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -4 < x < 1$$

میانبر چون $x=1$ در نامعادله (۱) صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۴) حذف می‌شوند. از طرفی $x=-3$ در هر دو نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه (۲) پاسخ تست است.

حل نامعادله توأم

برای حل نامعادله‌های توأم، نامعادله را یک بار از سمت چپ و یک بار از سمت راست حل می‌کنیم، سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

مثال نامعادله $x-3 < 2x < x-1$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} x-3 < 2x &\Rightarrow -3 < x \\ 2x < x-1 &\Rightarrow x < -1 \end{aligned} \Rightarrow -3 < x < -1$$

تذکر اگر در یک نامعادله توأم، عبارت درجه اول $ax+b$ بین دو عدد قرار گیرد، می‌توانیم طرفین نامعادله را ابتدا b - کرده و سپس بر a تقسیم کنیم. مثلاً برای حل نامعادله $-5 < 2x-3 < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} -5 < 2x-3 < 1 &\xrightarrow{+3} -2 < 2x < 4 \\ \xrightarrow{+2} -1 < x < 2 \end{aligned}$$

تست مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ به کدام صورت است؟ (داخل - ۹۸)

$$\begin{aligned} 1) \mathbb{R} - [-4, 6] \quad 2) \mathbb{R} - [-6, 4] \\ 3) x > 4 \quad 4) x < -6 \end{aligned}$$

۱ از نامعادله $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ داریم:

$$\begin{aligned} 1) 1 < \frac{2x-3}{x+1} &\Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-3-(x+1)}{x+1} > 0 \\ \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 &\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4 \\ 2) \frac{2x-3}{x+1} < 3 &\Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-3-3(x+1)}{x+1} < 0 \\ \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 &\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \end{aligned}$$

از اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) مجموعه جواب معادله $x > 4$ یا $x < -6$ می‌شود که می‌توانیم آن را به صورت $\mathbb{R} - [-6, 4]$ نمایش دهیم.

میانبر چون $x=5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) که فاقد عدد ۵ هستند، حذف می‌شود. از طرفی $x=-7$ نیز در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه (۱) پاسخ تست است.

نکته در حل نامعادلات گویا، اگر علامت مخرج کسر مشخص باشد، می‌توانیم طرفین نامعادله را در عبارت مخرج ضرب کنیم.

مثال مجموعه جواب نامعادله $\frac{4x}{x^2+3} < 1$ را به دست آورید.

عبارت مخرج کسر یعنی x^2+3 همواره مثبت است، بنابراین برای حل نامعادله، طرفین نامعادله را در x^2+3 ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^2+3} < 1 &\Rightarrow 4x < x^2+3 \Rightarrow x^2-4x+3 > 0 \\ \Rightarrow (x-1)(x-3) > 0 &\Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 3 \end{aligned}$$

تذکر در صورتی که در یک تست جواب نامعادله به صورت بازه بیان شده باشد، یا استفاده از روش عددگذاری و امتحان گزینه‌ها می‌توانیم بدون حل کردن نامعادله، جواب را مشخص کنیم.

تست مجموعه جواب نامعادله $\frac{5x^2-12x}{x^2-9} < 1$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 1) (-3, \frac{3}{2}) \quad 2) (-3, 3) - \{\frac{3}{2}\} \\ 3) (\frac{3}{2}, 2) \quad 4) (-3, 3) \end{aligned}$$

۲ عدد ۱ را به آن طرف نامعادله می‌بریم و سپس مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \frac{5x^2-12x}{x^2-9} - 1 < 0 &\Rightarrow \frac{5x^2-12x-(x^2-9)}{x^2-9} < 0 \Rightarrow \frac{(2x-3)^2}{x^2-9} < 0 \\ \rightarrow \frac{x}{x^2-9} &\rightarrow \frac{x}{(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

میانبر چون $x=\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق نمی‌کند و $x=2$ در آن صدق می‌کند، پس گزینه (۲) درست است.

دستگاه نامعادلات

برای حل دستگاه نامعادلات، جواب‌های هر یک از نامعادله‌ها را جداگانه به دست آورده و سپس بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مثال مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 2x > x+3 \\ x^2-5x+4 < 0 \end{cases}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x > x+3 \\ x^2-5x+4 < 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-1)(x-4) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 1 < x < 4 \end{cases} \\ \Rightarrow 3 < x < 4 \end{aligned}$$

تست مجموعه جواب مشترک دو نامعادله $\frac{4x-1}{3} > 3x-2$ و $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟

$$\begin{aligned} 1) -2 < x < 2 \quad 2) -4 < x < 1 \\ 3) -2 < x < 1 \quad 4) -4 < x < 2 \end{aligned}$$

وضعیت منحنی

اگر نمودار منحنی f را داشته باشیم، آن گاه:

۱ جواب معادله $f = 0$ ، مجموعه x هایی است که به ازای آن‌ها نمودار f محور x ها را قطع می‌کند.

۲ جواب نامعادله $f > 0$ ، مجموعه x هایی است که به ازای آن‌ها نمودار f بالای محور x قرار می‌گیرد.

۳ جواب نامعادله $f < 0$ ، مجموعه x هایی است که به ازای آن‌ها نمودار f پایین محور x قرار می‌گیرد.

مثال نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. مجموعه جواب

نامعادله $f(x) < 0$ را به دست آورید.



نمودار تابع f در بازه‌های $(-2, -1)$ و $(1, 2)$ پایین محور x ها قرار دارد، پس مجموعه جواب نامعادله $f(x) < 0$ به صورت $(-2, -1) \cup (1, 2)$ است.

برای این که مشخص کنیم منحنی y_1 در چه بازه‌هایی بالا یا پایین منحنی y_2 قرار می‌گیرد، باید مجموعه جواب نامعادله‌های $y_1 > y_2$ یا $y_1 < y_2$ را به دست آوریم.

مثال به ازای کدام مقادیر x نمودار سهمی $y_1 = x^2$ زیر خط نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y_2 = x$ قرار می‌گیرد؟

باید نامعادله $y_1 < y_2$ را حل کنیم:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow x^2 < x \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline P(x) & + & - & + & \end{array} \Rightarrow 0 < x < 1$$

تست شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. مجموعه جواب نامعادله $xf(x) > 0$ کدام است؟



$$(1, 2)$$

$$[-2, 3] - (-1, 0)$$

$$(-2, -1) \cup (0, 3)$$

$$[-2, 3]$$

۳ برای این که $xf(x)$ مثبت باشد، باید x و $f(x)$ هم علامت باشند، یعنی هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x > 0, f(x) > 0: \text{راست و بالای محور } x \text{ ها} \\ x < 0, f(x) < 0: \text{چپ و پایین محور } x \text{ ها} \end{cases}$$



پس جواب نامعادله $xf(x) > 0$ به صورت بازه $(-2, -1) \cup (0, 3)$ است.

یادداشت:

فصل

قدرمطلق و براکت

ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیازهای این فصل، فصل‌های توان و عبارت جبری، معادله و نامعادله و کمی معادله و تابع درجه دوم است. اما در مباحثی مثل تابع، معادله و نامعادله، مثلثات، حد، مشتق و کاربرد مشتق به قدرمطلق و براکت نیاز خواهید داشت.

توصیه: درسته تعداد تست‌هایی که به طور مستقیم از قدرمطلق و براکت در کنکور مطرح شده، کمه! اما از این مبحث، به صورت ترکیبی با مباحث دیگر تست مطرح میشه. به طوری که اکثر سؤالات چالشی در مبحث تابع، حد، مشتق و کاربرد مشتق همراه با قدرمطلق و براکت مطرح میشه. پس یه مبحث پایه‌ای محسوب میشه و لازمه خیلی جدی بگیریدش.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	صفر	۱	۱	صفر	۱	صفر	صفر	صفر

درس قدرمطلق

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قدرمطلق هر عدد حقیقی مانند x را با $|x|$ نمایش می‌دهند و به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

از نظر هندسی $|x|$ نشان دهنده فاصله x از نقطه صفر بر روی محور اعداد حقیقی است. مثلاً، فاصله نقطه ۳ تا مبدأ مختصات برابر ۳ و فاصله نقطه -۵ تا مبدأ مختصات برابر ۵ است:



با استفاده از همین تعریف قدرمطلق می‌توان قدرمطلق عبارات را حذف کرد. در برخورد با $|u|$ ، خواهیم داشت:

$$|u| = \begin{cases} u & \text{if } u \geq 0 \\ -u & \text{if } u < 0 \end{cases}$$

یعنی عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنید، اگر مثبت بود خودش و اگر منفی بود قرینه‌اش را جای آن بنویسید.

مثال عبارت $A = |x-2| + |3-x|$ را در محدوده $x < 2$ بدون قدرمطلق بنویسید.

ابتدا با توجه به بازه داده شده درون قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x < 2 &\rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow A = (2-x) + (3-x) = -2x+5 \\ x < 2 &\rightarrow 3-x > 0 \end{aligned}$$

پس اگر $x < 2$ باشد، عبارت A برابر $-2x+5$ است.

تست اگر $2 < x < 3$ باشد، حاصل $|x-3| + |2x-3| + |x-4|$ کدام است؟

$$(1) \ 2x+1 \quad (2) \ -2x+3 \quad (3) \ 4 \quad (4) \ 10$$

۳ از $x < 3$ نتیجه می‌گیریم $x-3 < 0$ و $x-4 < 0$ و از $2 < x$ نتیجه می‌گیریم:

$$2 < x \Rightarrow 4 < 2x \Rightarrow 1 < 2x-3$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$|x-3| + |2x-3| + |x-4| = -x+3 + 2x-3 + (-x+4) = 4$$

تست اگر $\sqrt{x^2+2xy+y^2} - |x-y| + \frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 8$

$x < y < 0$ باشد، مقدار y کدام است؟

$$(1) \ -1 \quad (2) \ -2 \quad (3) \ -3 \quad (4) \ -4$$

۴ می‌دانیم $\sqrt{x^2+2xy+y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = |x+y|$ است، پس:

$$\sqrt{x^2+2xy+y^2} - |x-y| + \frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 8$$

$$\Rightarrow |x+y| - |x-y| + \frac{y}{|y|} - \frac{|x|}{x} = 8$$

حال از آن جایی که x و y منفی هستند، پس مجموع آن‌ها نیز منفی است. از طرفی چون $x < y$ ، پس $x-y$ نیز منفی است:

$$-(x+y) + (x-y) + (-1) - (-1) = 8 \Rightarrow -2y = 8 \Rightarrow y = -4$$

خواص قدرمطلق

۱ اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند:

$$|ab| = |a| |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; (b \neq 0)$$

۲ قدرمطلق هر عدد با قدرمطلق قرینه‌اش برابر است:

$$|a| = |-a|$$

۳ قدرمطلق هر عددی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است:

$$0 \leq |a|$$

۴ قدرمطلق هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی خود آن عدد است:

$$a \leq |a|$$

۵ توان عبارت داخل قدرمطلق را می‌توان از قدر مطلق خارج کرد:

$$|a^n| = |a|^n$$

۶ اگر عبارت داخل قدرمطلق به توان زوج برسد، می‌توان قدرمطلق را حذف کرد:

$$|a^{2n}| = a^{2n}$$

با توجه به تعریف جذر (ریشه دوم مثبت) می‌توان گفت:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

تست اگر $1 < x < 2$ باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt[4]{(2-x)^4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

برابر کدام گزینه است؟

$$-2x + 3 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 2x - 5 \quad (2) \quad x + 3 \quad (1)$$

۴ از خواص قدرمطلق داشتیم $|a| = \sqrt[n]{a^n}$ (n زوج)، بنابراین حاصل عبارت A به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A = \sqrt[4]{(2-x)^4} - \sqrt{(x-1)^2} = |2-x| - |x-1|$$

چون $1 < x < 2$ است، داریم:

$$1 < x < 2 \rightarrow 2-x > 0 \rightarrow A = (2-x) - (x-1) = -2x + 3$$

$$1 < x < 2 \rightarrow x-1 > 0$$

معادلات قدر مطلق

۱ برای حل معادلات به شکل $|u| = |v|$ می‌توانیم از خواص قدرمطلق

استفاده کنیم و بنویسیم:

$$|u| = |v| \rightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -v \end{cases}$$

مثال معادله $|x-5| = |2x-1|$ را حل کنید.

$$1) 2x-1 = x-5 \Rightarrow x = -4$$

$$2) 2x-1 = -x+5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

تذکر

برای حل معادلات به شکل $|u| = v$ هم می‌توانیم از روش قبلی استفاده کنیم، فقط باید دقت کنید که در جواب‌های به دست آمده $v \geq 0$ باشد.

مثال معادله $|x^2 - 3x| = x - 4$ را حل کنید.

چون $x - 4$ باید نامنفی باشد، این معادله را با شرط $x - 4 \geq 0$ حل می‌کنیم.

$$1) x^2 - 3x = x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون به ازای $x = 2$ ، عبارت $x - 4$ عددی منفی است این جواب غیرقابل قبول است.

$$2) x^2 - 3x = -x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Delta = 20, x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

هر دو جواب به دست آمده، $x - 4$ را منفی می‌کنند، پس هر دو غیرقابل قبول هستند، پس این معادله فاقد جواب است.

۲ برای حل معادلاتی که به شکل جمع و تفریق چند قدرمطلق هستند، معمولاً بهترین کار بازه‌بندی و حذف قدرمطلق است، دقت کنید در این حالت نیز باید جواب‌ها با بازه اولیه اشتراک داشته باشند.

مثال معادله $|x| + |x-2| - 2x = -2$ چند جواب دارد؟

با استفاده از ریشه‌ها قدرمطلق را حذف می‌کنیم و معادله هر خط را حل می‌کنیم.

$$1) x < 0: -4x + 2 = -2 \Rightarrow x = 1$$

این جواب غیرقابل قبول است، چون با بازه (۱) اشتراک ندارد.

$$2) 0 \leq x \leq 2: -2x + 2 = -2 \Rightarrow x = 2$$

$$3) 2 < x: -2 = -2$$

اینجا به یک عبارت همواره درست رسیدیم.

یعنی تمام اعداد در محدوده $2 < x$ در این معادله صدق می‌کنند، پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

نامعادله قدر مطلق

راه اصلی این است که با بازه‌بندی، قدرمطلق را حذف کرد و پس از حل نامعادله به دست آمده، جواب‌ها را با بازه ابتدایی اشتراک گرفت.

استفاده از عددگذاری در این قسمت‌ها یک روش میانبر است.

این نامعادلات در چند حالت دسته‌بندی می‌شوند:

۱ نامعادلاتی که به صورت $|P(x)| > Q(x)$ یا $|P(x)| < Q(x)$ مطرح می‌شوند.

مثال نامعادله $|x^2 - 2| < x$ را حل کنید.

چون $x = 0$ ریشه داخل قدرمطلق است، داریم:

$$x \geq 0: x^2 - 2 < x \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 2$$

$$x < 0: x^2 - 2 < -x \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < x < 1 \xrightarrow{x < 0} -2 < x < 0$$

از اجتماع جواب‌های به دست آمده، مجموعه جواب نامعادله برابر $-2 < x < 2$ است.

چون $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های داخل قدرمطلق هستند، پس نامعادله را در ۳ ناحیه حل می‌کنیم:

$$1) x < 0 \Rightarrow 3 + (x-1) + 2x > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} \xrightarrow{x < 0} -\frac{2}{3} < x < 0$$

$$2) 0 \leq x < 1 \Rightarrow 3 + (x-1) - 2x > 0 \Rightarrow x < 2 \xrightarrow{0 \leq x < 1} 0 \leq x < 1$$

$$3) x \geq 1 \Rightarrow 3 - (x-1) - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3} \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < \frac{5}{3}$$

اجتماع بازه‌های به دست آمده، بازه $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ است که شامل ۲ عدد صحیح است.

نکته برای حل سریع‌تر و نامعادله قدرمطلق $|P(x)| > a$ و $|P(x)| < a$ با شرط مثبت بودن a می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

۱ مجموعه جواب نامعادله $|P(x)| < a$ برابر است با:

$$-a < P(x) < a$$

$$\text{مثلاً: } |x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$$

۲ مجموعه جواب نامعادله $|P(x)| > a$ برابر است با:

$$P(x) > a \text{ یا } P(x) < -a$$

مثلاً:

$$|x-2| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \Rightarrow x > 3 \\ x-2 < -1 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

۳ برای حل نامعادله‌هایی به صورت $|P(x)| > |Q(x)|$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و در هر دو طرف، اتحادها را باز می‌کنیم.

مثال نامعادله $|x+1| < |2x-1|$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} |x+1| < |2x-1| &\Rightarrow (x+1)^2 < (2x-1)^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2x + 1 &< 4x^2 - 4x + 1 \\ \Rightarrow 0 < 3x^2 - 6x &\Rightarrow 0 < x^2 - 2x \Rightarrow 0 < x(x-2) \\ \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2 \end{aligned}$$

تست مجموعه جواب نامعادله $|2x-3| > |2-x|$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$1) 1 \quad 2) \text{ صفر} \quad 3) 3 \quad 4) 2$$

۲ ابتدا دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} (2-x)^2 &> (2x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 - 12x + 9 \\ 3x^2 - 8x + 5 &< 0 \end{aligned}$$

این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=\frac{5}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} + & - & + \\ 1 & \frac{5}{3} & \end{matrix}$$

پس جواب بازه $(1, \frac{5}{3})$ است که شامل اعداد صحیح نیست.

تست مجموعه جواب نامعادله $|2x-1| < 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

(کنکور مجدد - ۱۴۰۱)

$$1) 2 \quad 2) 3 \quad 3) 4 \quad 4) 5$$

۲

$$1) x \leq \frac{1}{2}: x - (2x-1) < 3 \Rightarrow -2 < x \xrightarrow{x \leq \frac{1}{2}} -2 < x \leq \frac{1}{2}$$

$$2) x > \frac{1}{2}: x + (2x-1) < 3 \Rightarrow 3x < 4$$

$$\Rightarrow x < \frac{4}{3} \xrightarrow{x > \frac{1}{2}} \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$$

از اجتماع جواب‌های به دست آمده $-2 < x < \frac{4}{3}$ به دست می‌آید که شامل سه عدد صحیح ۱ و ۰ و -۱ است.

۲ نامعادلاتی که در آن‌ها مجموع یا تفاضل دو یا چند عبارت قدرمطلق وجود دارد.

مثال نامعادله $|x| + |x-1| > 3$ را حل کنید.

ریشه‌های داخل قدرمطلق $x=0$ و $x=1$ هستند، بنابراین نامعادله را به سه ضابطه تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow -x - (x-1) > 3 \Rightarrow -2x > 2 \Rightarrow x < -1 \\ x < 0 \Rightarrow x < -1 \\ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x - (x-1) > 3 \Rightarrow 1 > 3 \xrightarrow{\text{همواره نادرست}} \emptyset \\ x > 1 \Rightarrow x + (x-1) > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \\ x > 1 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

از اجتماع بازه‌های به دست آمده، جواب نامعادله برابر $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ است.

تست مجموعه جواب نامعادله $|x-2| + |x+1| \leq 5$ کدام است؟

$$1) [-2, 3] \quad 2) [-3, 2] \quad 3) [-1, 4] \quad 4) [-4, 1]$$

۱ ریشه‌های داخل قدرمطلق -۱ و ۲ هستند؛ بنابراین نامعادله را به سه ضابطه تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x < -1 \Rightarrow -(x-2) - (x+1) \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \xrightarrow{x < -1} -2 \leq x < -1 \\ -1 \leq x < 2 \Rightarrow -(x-2) + (x+1) \leq 5 \Rightarrow 3 \leq 5 \xrightarrow{\text{همواره برقرار}} -1 \leq x < 2 \\ x \geq 2 \Rightarrow (x-2) + (x+1) \leq 5 \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3 \xrightarrow{x \geq 2} 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

بنابراین اجتماع بازه‌های به دست آمده برابر است با:

$$[-2, -1) \cup [-1, 2) \cup [2, 3] = [-2, 3]$$

تست مجموعه جواب نامعادله $|2x| > |x-1| + |x-3|$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$1) 1 \quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) 4$$

۳ همه عبارت‌ها را به طرف چپ منتقل می‌کنیم:

$$3 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 3 - |x-1| - |2x| > 0$$

تست مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| > 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی شمار

۱ چون $x = -2$ ریشه مخرج کسر است، آن را کنار گذاشته و داریم:

$$\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| > 5 \Rightarrow \frac{x \neq -2}{|2x-1| > 5|x+2|}$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 > 25(x+2)^2$$

$$(2x-1)^2 - 25(x+2)^2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

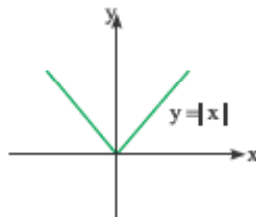
$$(2x-1-5x-10)(2x-1+5x+10) > 0$$

$$\Rightarrow (-3x-11)(7x+9) > 0 \Rightarrow -\frac{11}{3} < x < -\frac{9}{7}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت بازه $(-\frac{11}{3}, -\frac{9}{7}) \cup (-2, -\frac{9}{7})$ است که شامل یک عدد صحیح یعنی -3 است.

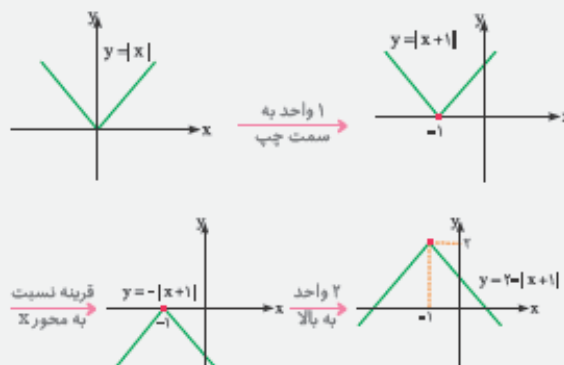
تابع قدرمطلق

نمودار تابع $y = |x|$ به صورت زیر است:



نمودار تابع در $x \geq 0$ برابر $y = x$ و در $x \leq 0$ برابر $y = -x$ است؛ بنابراین شیب نیم خط راست برابر ۱ و شیب نیم خط چپ برابر -1 بوده و این دو نیم خط بر هم عمود هستند. با کمک قوانین انتقال، می‌توانیم نمودار توابع قدر مطلق به فرم $y = |ax+b|+c$ را از روی نمودار تابع $y = |x|$ رسم کنیم.

مثال نمودار تابع $y = 2 - |x+1|$ را رسم کنید.



برای رسم نمودار توابعی که قسمتی از آن‌ها دارای قدرمطلق است، می‌توانیم ضابطه تابع را در ریشه داخل قدرمطلق‌ها به صورت چند ضابطه‌ای بنویسیم.

نکته اگر بخواهیم طرفین نامعادله $|P(x)| \geq |Q(x)|$ را بر عبارتی تقسیم کنیم، باید ریشه آن عبارت را به عنوان یکی از جواب‌ها در نظر بگیریم.

مثال نامعادله $|x^2 - x| \leq |x|$ را حل کنید.

می‌توانیم نامعادله را به صورت $|x||x-1| \leq |x|$ بنویسیم، سپس $|x|$ را از طرفین ساده کنیم و ریشه آن یعنی $x = 0$ را به عنوان یکی از جواب‌ها در نظر بگیریم. اکنون نامعادله $|x-1| \leq 1$ را حل می‌کنیم:

$$|x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

تست مجموعه جواب نامعادله $|x-2| < x^2 - 2x$ به صورت کدام بازه

(خارج - ۹۲)

۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-1, 2)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(1, 2)$

۲ ریشه داخل قدر مطلق $x = 2$ است، پس:

$$1) \ x \geq 2: x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow \frac{x(x-2) - (x-2)}{(x-2)(x-1)} < 0$$

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \quad \times$$

بازه به دست آمده در شرط $x > 2$ صدق نمی‌کند.

$$2) \ x < 2: x^2 - 2x < -(x-2) \Rightarrow \frac{x(x-2) + (x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2$$

بنابراین جواب نامعادله بازه $(-1, 2)$ است.

میانبر چون $x = 0$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه (۳) و (۴) حذف می‌شوند. از طرفی $x = 1$ نیز در معادله صدق می‌کند. پس گزینه (۲) که شامل عدد ۱ هست، پاسخ تست می‌باشد.

نکته اگر $|P(x)|$ یک عبارت گویا باشد، می‌توانیم ریشه مخرج را کنار بگذاریم، سپس طرفین وسطین کرده و دو طرف را به توان ۲ برسانیم. ممکن است در انتها، ریشه مخرج در بازه جواب باشد. در این صورت آن را از جواب کم کنید.

مثال مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| < 1$ را محاسبه کنید.

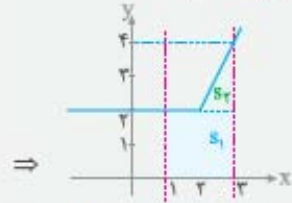
$$\left| \frac{x-1}{x+2} \right| < 1 \xrightarrow{x \neq -2} |x-1| < |x+2| \Rightarrow (x-1)^2 < (x+2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -3 < 6x \Rightarrow -\frac{1}{2} < x$$

$x = -2$ ریشه مخرج است که در مجموعه جواب انتهایی وجود ندارد. پس جواب نامعادله $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ است.

۲ ضابطه f را در $x=2$ به صورت دو ضابطه ای می نویسیم و نمودار آن را به همراه خطهای عمودی $x=1$ و $x=3$ در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:

$$f(x) = x + |x-2| = \begin{cases} 2x-2 & ; x \geq 2 \\ 2 & ; x < 2 \end{cases}$$



مساحت ناحیه محدود به نمودار و محور x و دو خط $x=1$ و $x=3$ برابر است با:

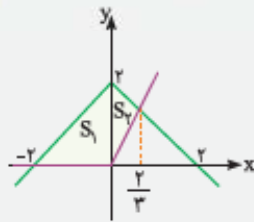
$$S = S_1 + S_2 = (2 \times 2) + \left(\frac{1 \times 2}{2}\right) = 4 + 1 = 5$$

تست مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟ (داخل - ۹۵)

$$2(1) \quad \frac{4}{3}(2) \quad \frac{4}{3}(3) \quad 3(4)$$

۳ نمودار تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2-x & ; x \geq 0 \\ 2+x & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



محل برخورد دو نمودار در سمت راست محور x ها از معادله زیر به دست می آید:

$$2x = 2 - x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین مساحت ناحیه محدود برابر است با:

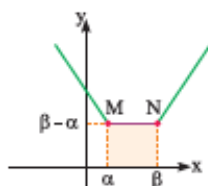
$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

نمودارهای معروف

برخی نمودارهای قدرمطلق، بسیار معروف هستند. می توان با روش بازبندی و حذف قدرمطلق آنها را رسم کرد اما بلد بودن روش سریع رسم آنها مهم است.

۱ نمودار گلدانی

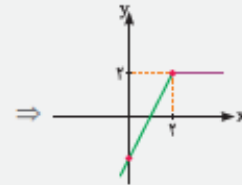
نمودار تابع $y = |x - \alpha| + |x - \beta|$ ، شبیه یک گلدان است.



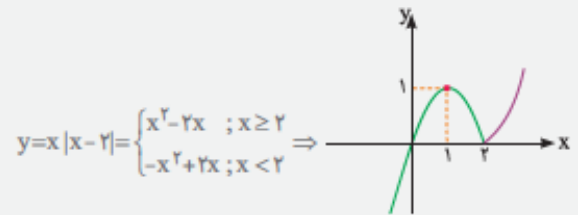
مثال ۱ نمودار تابع $y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را رسم کنید.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم و سپس آن را در $x=2$ به صورت دو ضابطه ای می نویسیم.

$$y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - |x-2| = \begin{cases} 2 & ; x \geq 2 \\ 2x-2 & ; x < 2 \end{cases}$$



مثال ۲ نمودار تابع $y = x|x-2|$ را رسم کنید.



تست شکل روبه رو نمودار کدام تابع است؟

$$y = x - |x| \quad (1)$$

$$y = x + |x| \quad (2)$$

$$y = |x-1| - 1 \quad (3)$$

$$y = 1 - |x-1| \quad (4)$$

۲ به بررسی گزینه ها می پردازیم:



$$1) y = x - |x| = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$2) y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



(۳) نمودار تابع $y = |x-1| - 1$ از انتقال افقی و عمودی تابع $y = |x|$ به دست آمده، پس نمودار آن شبیه نمودار $y = |x|$ است. [هفتی شکل]

(۴) نمودار تابع $y = 1 - |x-1|$ از انتقال افقی و عمودی تابع $y = -|x|$ به دست آمده، پس نمودار آن شبیه نمودار $y = -|x|$ است. [هشتی شکل]

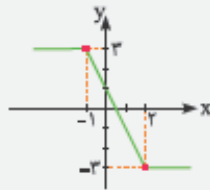
یکی از تیپ تست های پرتکرار در این قسمت محاسبه مساحت محصور بین نمودارها و محورهای مختصات است.

تست مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = x + |x-2|$ و

محور x ها و دو خط $x=1$ و $x=3$ کدام است؟

$$3(1) \quad 5(2) \quad 6(3) \quad 8(4)$$

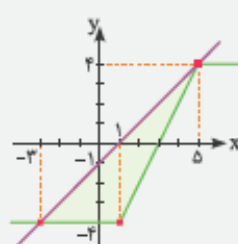
مثال نمودار تابع $y = |x-2| - |x+1|$ را رسم کنید.



تست مساحت محصور بین دو نمودار $y = |x-1| - |x-5|$ و $y = x-1$

$y = x-1$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰



۲ ابتدا دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. شکل محصور یک مثلث به قاعده ۴ و ارتفاع ۸. پس مساحت آن برابر است با:

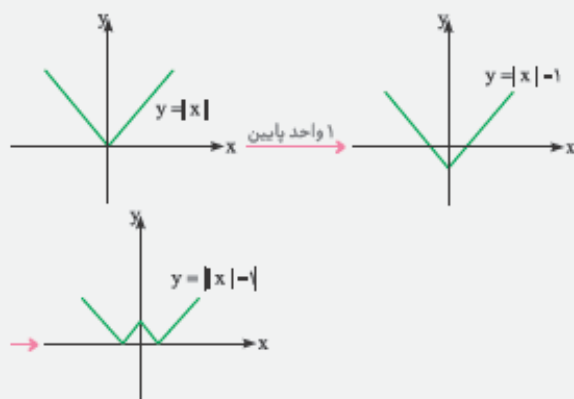
$$S = \frac{1}{2} \cdot (4) \cdot (8) = 16$$

نمودار $y = |f(x)|$ و $y = f(|x|)$

برای رسم نمودار تابع‌هایی به صورت $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم. سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x قرار دارد، نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

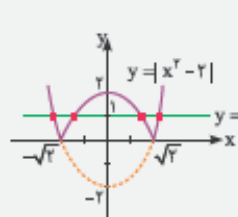
مثال نمودار تابع $f(x) = |x-1|$ را رسم کنید.

ابتدا تابع $y = |x-1|$ را رسم می‌کنیم، سپس مراحل رسم را ادامه می‌دهیم:



تست نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|$ و خط $y = 1$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



۴ نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ و خط $y = 1$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل واضح است این دو نمودار در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

به مختصات نقاط M و N توجه کنید.

$M(\alpha, \beta - \alpha)$, $N(\beta, \beta - \alpha)$

ناحیه رنگی همیشه مربع است.

شیب نیم خط سمت راست ۲ و شیب نیم خط سمت چپ -۲ است.

تست نمودار دو تابع $y = |x-2| + |x+1|$ و خط $y = x+7$ در چند

نقطه باهم برخورد دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

۲ راه اول: برای پیدا کردن نقاط برخورد دو نمودار باید معادله

$$|x+1| + |x-2| = x+7$$

را حل کنیم:

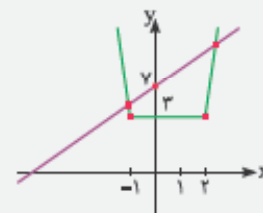
$$1) x < -1: -2x+1 = x+7 \Rightarrow x = -2$$

$$2) -1 \leq x \leq 2: (x+1) - (x-2) = x+7 \Rightarrow x = -4 \xrightarrow{-1 \leq x \leq 2} \times$$

$$3) x > 2: 2x-1 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

پس در $x = 8$ و $x = -2$ دو نمودار باهم برخورد دارند.

راه دوم: می‌توانیم نمودارهای $y = |x-2| + |x+1|$ و $y = x+7$ را در یک دستگاه مختصات رسم و نقاط تقاطع آن‌ها را مشخص کنیم.



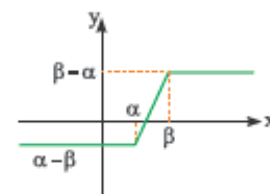
با توجه به نمودار هم مشخص است که دو نقطه برخورد دارند.

نمودار سرسره‌ای

نمودار تابع $y = |x-\alpha| - |x-\beta|$ ، شبیه یک سرسره است.

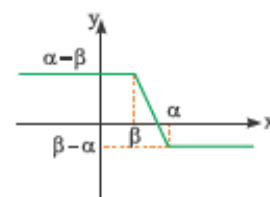
این نمودار با توجه به مقدار ریشه قدر مطلق‌ها، یکی از دو حالت زیر را دارد.

۱) $\alpha < \beta$



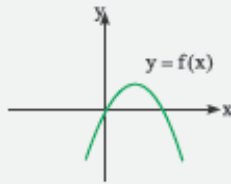
شیب پاره خط میانی برابر ۲ است.

۲) $\alpha > \beta$



شیب پاره خط میانی برابر -۲ است.

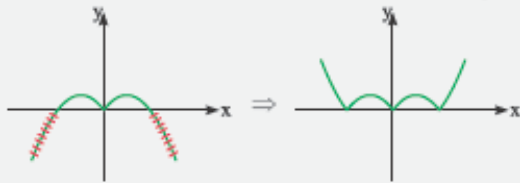
مثال اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $|f(x)|$ را رسم کنید.



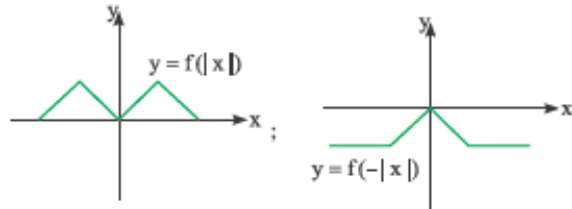
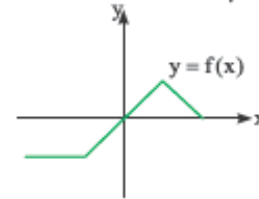
ابتدا $|f(x)|$ را رسم می‌کنیم، برای این کار قسمت‌های سمت چپ نمودار را حذف و قرینه قسمت سمت راست را جای آن رسم می‌کنیم.



و در مرحله آخر، قسمت‌های زیر محور x را نسبت، آن محور قرینه می‌کنیم.



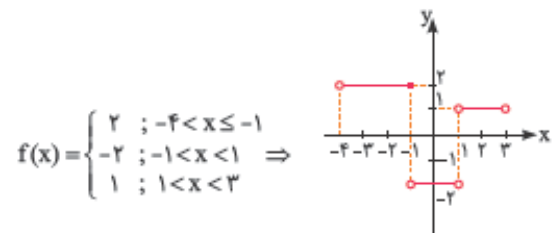
اگر در ضابطه تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $|x|$ قرار دهیم، تابع $f(|x|)$ ساخته می‌شود. برای رسم نمودار تابع $f(|x|)$ ، ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار تابع $f(x)$ را که در سمت چپ محور y ها قرار دارند، حذف می‌کنیم و قرینه قسمت‌های باقی‌مانده در سمت راست را به آن اضافه می‌کنیم. [هون اگر $x > 0$ باشد، $f(|x|) = f(x)$ برابر $f(x)$ است و اگر $x < 0$ باشد، $f(|x|) = f(-x)$ فواید بود.] برای رسم نمودار تابع $f(-|x|)$ می‌توانیم قسمت‌های سمت راست محور y ها را حذف کنیم و سپس قرینه قسمت باقی‌مانده را نسبت به محور y ، به آن اضافه کنیم.



درس جزء صحیح

تابع پله‌ای و جزء صحیح

به هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌گویند. به عنوان مثال تابع زیر تابعی پله‌ای است:

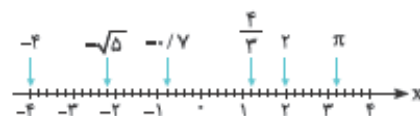


برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح (براکت) آن که بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد و آن را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر n عددی صحیح باشد آنگاه:

$$n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$$

برای به دست آوردن جزء صحیح هر عدد باید بررسی کنیم، عدد مورد نظر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. در این شرایط جزء صحیح آن عدد، برابر عدد صحیح کوچکتر است.

به محور زیر و اعداد مشخص شده روی محور و جزء صحیح آن‌ها دقت کنید:



$$[-4] = -4 \quad [-\sqrt{5}] = -3 \quad [-1/7] = -1$$

$$[4/3] = 1 \quad [2] = 2 \quad [\pi] = 3$$

واضح است جزء صحیح اعداد صحیح، با خود آن‌ها برابر است.

تست اگر $2 < x < \frac{5}{4}$ باشد. حاصل $2x+1 - [\frac{1}{4}x+3]$ کدام است؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

1 با توجه به این که $2 < x < \frac{5}{4}$ است، داریم:

$$1) 4 < 2x < 5 \Rightarrow 5 < 2x+1 < 6 \Rightarrow [2x+1] = 5$$

$$2) 1 < \frac{1}{4}x < \frac{5}{4} \Rightarrow 4 < \frac{1}{4}x+3 < \frac{5}{4}+3 \Rightarrow [\frac{1}{4}x+3] = 4$$

$$\text{بنابراین } 1 = 5 - 4 = [2x+1] - [\frac{1}{4}x+3] \text{ است.}$$

تست اگر $|2x-1| < 3$ باشد، $[\frac{x}{4}]$ چند مقدار مختلف دارد؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

2 ابتدا مجموعه جواب نامعادله $|2x-1| < 3$ را تعیین می‌کنیم:

$$-3 < 2x-1 < 3 \Rightarrow -2 < 2x < 4 \Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow -\frac{1}{4} < \frac{x}{4} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow [\frac{x}{4}] = -1, 0 \text{ بنابراین } [\frac{x}{4}] \text{ می‌تواند 2 مقدار داشته باشد.}$$

توابع مشهور براکتی

$$f(x) = [x] + [-x] \quad 1$$

مقدار این تابع به ازای تمام اعداد صحیح برابر صفر و به ازای تمام اعداد غیر صحیح برابر ۱- است:

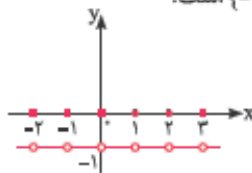
$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثلاً:

$$\frac{x=2.75}{\rightarrow} [2.75] + [-2.75] = 2 + (-3) = -1$$

$$\frac{x=3}{\rightarrow} [3] + [-3] = 3 + (-3) = 0$$

بُرد این تابع برابر $\{-1, 0\}$ است.



$$f(x) = x - [x] \quad 2$$

در خواص جز صحیح داریم:

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$$

اگر طرفین رابطه را منتهای a کنیم:

$$0 \leq x - a < 1$$

با توجه به اینکه $[x] = a$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

مقدار این تابع عددی نامنفی و کوچکتر از یک است، در ضمن مقدار این عبارت در نقاط صحیح برابر صفر و در نقاط غیر صحیح عددی بین ۰ و ۱ است.

بُرد این تابع برابر $[0, 1)$ است.



تذکر به $x - [x]$ جزء اعشاری عدد x گویند.

مثال ۱ حدود عبارت $A = 3x - 3[x] + 1$ را محاسبه کنید.

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ است، پس:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3x - 3[x] < 3$$

$$\xrightarrow{+1} 1 \leq 3x - 3[x] + 1 < 4 \Rightarrow 1 \leq A < 4$$

مثال ۲ برد تابع $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ را به دست آورید.

از آنجایی که $x - [x]$ در مخرج کسر قرار دارد، پس نباید برابر صفر شود، بنابراین:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \text{بُرد} = (1, +\infty)$$

تست حاصل عبارت $[\sqrt{10}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{12}] + \dots + [\sqrt{24}]$ کدام است؟

$$54 \quad (4) \quad 50 \quad (3) \quad 48 \quad (2) \quad 45 \quad (1)$$

۴ اعداد ۱۰ تا ۱۵ از ۹ بزرگتر و از ۱۶ کوچک‌ترند، پس جذر آن‌ها عددی میان ۳ و ۴ می‌باشد، بنابراین جزء صحیح آن‌ها برابر ۳ است. جذر عدد ۱۶ برابر ۴ و اعداد ۱۷ تا ۲۴ بزرگتر از ۱۶ و کوچکتر از ۲۵ هستند، پس جذر آن‌ها عددی بین ۴ و ۵ می‌باشد؛ بنابراین جزء صحیح آن‌ها برابر ۴ است، بنابراین:

$$[\sqrt{10}] + [\sqrt{11}] + \dots + [\sqrt{15}] + [\sqrt{16}] + [\sqrt{17}] + \dots + [\sqrt{24}]$$

$$= \underbrace{3+3+\dots+3}_{6 \text{ بار}} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{8 \text{ بار}} = 6 \times 3 + 8 \times 4 = 54$$

ویژگی‌های جزء صحیح

۱ جزء صحیح هر عدد، کوچکتر یا مساوی با خود آن عدد است:

$$[x] \leq x$$

$$[1/2] = 0 \quad [5/9] = 0 \quad [0/6] = 0 \quad [-2/3] = -3$$

۲ اگر داخل جزء صحیح، یک عدد صحیح با بقیه عبارت‌ها جمع شود یا از آن‌ها کم شود، می‌تواند از داخل جزء صحیح خارج شود، یعنی:

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x \pm n] = [x] \pm n$$

$$[x^2 + 1] = [x^2] + 1$$

$$[x + 7] = [x] + 7$$

$$[2(a-4)] = [2a-8] = [2a] - 8$$

۳ اگر a عددی صحیح باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$$

$$[x+2] = 5 \Rightarrow [x] + 2 = 5 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

مثال معادله $[x+3] + 2[x-1] = 4$ را حل کنید.

با توجه به ویژگی‌های جزء صحیح داریم:

$$[x] + 3 + 2([x] - 1) = 4 \Rightarrow [x] + 3 + 2[x] - 2 = 4 \Rightarrow 3[x] = 3$$

$$\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

تست مجموعه جواب معادله $[x+7] = 3[x] + 2$ کدام است؟

$$\{1, 2\} \quad (1) \quad \{1, 2\} \quad (2) \quad \{0, 1, 2\} \quad (3) \quad \text{جواب ندارد.} \quad (4)$$

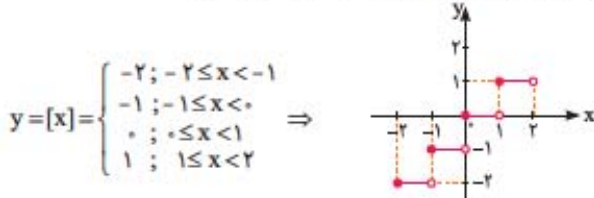
۴ می‌دانیم $[x+7] = [x] + 7$ است؛ پس:

$$[x] + 7 = 3[x] + 2 \Rightarrow 2[x] = 5 \Rightarrow [x] = \frac{5}{2}$$

می‌دانیم حاصل $[x]$ عددی صحیح است، پس این معادله جواب ندارد.

رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح

برای رسم نمودار تابع $y = [x]$ ، باید x را بین اعداد صحیح متوالی در نظر بگیریم و مقدار تابع را در هر بازه به دست آوریم.
نمودار تابع $y = [x]$ در بازه $[-2, 2]$ به صورت زیر است:



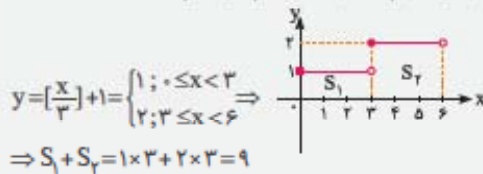
برای رسم نمودار توابعی که شامل $[ax \pm b]$ هستند، بازه داده شده را به بازه‌های کوچکی به طول $\frac{1}{a}$ تقسیم می‌کنیم، سپس در هر بازه، مقدار جزء صحیح را به دست آورده و نمودار را رسم می‌کنیم.

 تست مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = [\frac{x}{3}] + 1$ و محور x ها

 در بازه $[0, 6]$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴)

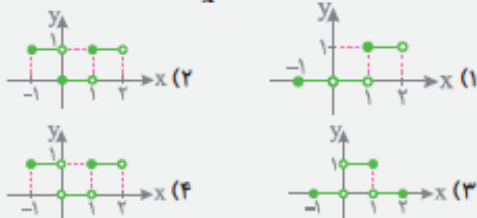
۳ چون ضریب x داخل پرانت برابر $\frac{1}{3}$ است، بازه‌ها را به طول ۳ واحد در نظر می‌گیریم و نمودار را رسم می‌کنیم:


 تست نمودار تابع $f(x) = [x] + [2x]$ در بازه $[0, 4]$ از چند پاره‌خط

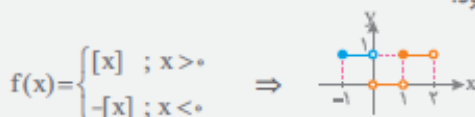
تشکیل شده است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۴ به دلیل وجود $[2x]$ باید x را به صورت بازه‌هایی با طول $\frac{1}{2}$ محدود کنیم. بنابراین بازه $[0, 4]$ را می‌توانیم به ۸ بازه به طول $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم، یعنی نمودار تابع f از ۸ پاره‌خط تشکیل می‌شود.

 تست نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{[x]}{x}$ کدام است؟


۴ ابتدا ضابطه f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس x را بین اعداد صحیح متوالی قرار می‌دهیم تا مقدار تابع در هر بازه مشخص شود:


 تست معادله $2x - x^2 = [x] + [-x]$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴ عبارت $[x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح x برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح x برابر -1 است، پس معادله را در دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1) x \in \mathbb{Z}: 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$2) x \notin \mathbb{Z}: 2x - x^2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

هر ۴ جواب به دست آمده در معادله صدق می‌کنند.

 تست نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{[x] + [-x]}$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴)

۱ می‌دانیم اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، عبارت $[x] + [-x]$ برابر صفر است، پس تابع f به ازای $x \in \mathbb{Z}$ تعریف نشده است. اما اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، عبارت $[x] + [-x]$ برابر -1 است و $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ می‌شود. حال برای پیدا کردن محل برخورد f با محور x ها داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a+b+c=0}{\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}}$$

چون $x \notin \mathbb{Z}$ پس فقط $x = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

 تست دامنه تابع $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ کدام است؟

- $\emptyset$ (۴) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{Z}$ (۱)

۱ عبارت $[x] + [-x]$ به ازای تمام اعداد صحیح برابر صفر و به ازای تمام اعداد غیر صحیح برابر -1 است. از آنجایی که این عبارت زیر رادیکال قرار دارد، پس دامنه تابع f برابر اعداد صحیح است، یعنی $D_f = \mathbb{Z}$.

 تست نمودار دو تابع $f(x) = -3x[[x]-x]+1$ و $g(x) = x^2$ در

چند نقطه متقاطع‌اند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴ مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

(۱) اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه $x - [x] = 0$ است، پس $f(x) = 1$ است و محل برخورد دو نمودار f و g به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

(۲) اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $0 < x - [x] < 1$ است، پس $-1 < [x] - x < 0$ و در نتیجه ضابطه f برابر است با:

$$f(x) = -3x[[x]-x]+1 = -3x(-1)+1 = 3x+1$$

حال نقاط برخورد نمودارهای f و g را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^2 = 3x+1 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

۲ ریشه غیر صحیح

پس نمودارهای f و g در چهار نقطه متقاطع‌اند.

توابع نمایی و لگاریتمی

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: برای خواندن این فصل نیاز دارید تا فصل‌های توان و عبارت جبری، معادله و نامعادله، تابع و همچنین بخش دنباله هندسی از فصل مجموعه، الگو و دنباله را بلد باشید اما خود این فصل ارتباط زیادی به بخش‌های بعدی ندارد و به‌طور خاص پیش‌نیاز فصلی نیست. البته در فصل اول شیمی دوازدهم در مبحث اسید و باز با آن سروکار خواهید داشت.

توصیه: خواص اصلی لگاریتم یعنی جمع و تفریق، قاعده انتقال توان و تغییر مبنا را به همراه تیپ‌های معروف آن به خوبی یاد بگیرید. در ضمن در بررسی معادلات و نمودار توابع لگاریتمی، به دامنه لگاریتم‌ها توجه کنید.

۱۴۰۴ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	کنکور
۱	۱	۱	۲	۱	۲	۲	۲	تعداد تست



درس توابع نمایی و ویژگی‌های آن

تابع نمایی

تابع $y = a^x$ که در آن، a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد را تابع نمایی می‌گویند. توابع زیر، نمایی هستند:

$$y = 5^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = (\sqrt{3} + 1)^x$$

در حالت کلی هر تابع با ضابطه $y = ka^x$ با شرط $a > 0$ و $k \neq 0$ رفتار نمایی دارد.

تست اگر $f(x) = \left(\frac{3}{a+2}\right)^x$ ضابطه یک تابع نمایی باشد، مجموعه

مقادیر a کدام است؟

$$(1) (-2, 1) \cup (1, +\infty) \quad (2) (-2, +\infty)$$

$$(3) [-2, 2] \quad (4) \mathbb{R} - (-2, 1)$$

۱ چون تابع f نمایی است، پایه باید عددی مثبت و مخالف یک باشد:

$$1) \frac{3}{a+2} > 0 \Rightarrow a+2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$2) \frac{3}{a+2} \neq 1 \Rightarrow a+2 \neq 3 \Rightarrow a \neq 1 \xrightarrow{(1), (2)} a \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

رفتار تابع نمایی $y = a^x$

۱ اگر $0 < a < 1$ باشد با افزایش مقدار x مقادیر تابع کاهش می‌یابد و به عدد صفر نزدیک می‌شود.

x	-۱	۰	۱	۲	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...

۲ اگر $a > 1$ باشد با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع افزایش می‌یابد.

x	-۱	۰	۱	۲	...
$y = 2^x$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	...

تذکر تابع نمایی $y = a^x$ همواره مقداری مثبت دارد؛ یعنی به‌ازای هر مقدار x ، $y = a^x > 0$.

نکته در یک تابع نمایی به‌صورت $y = ka^x$ اگر مقادیر ورودی، تشکیل

یک دنباله حسابی بدهند، آنگاه مقادیر خروجی تشکیل یک دنباله

هندسی خواهند داد. هم‌چنین اگر

مقادیر خروجی تشکیل یک دنباله

هندسی بدهند، مقادیر ورودی حتماً

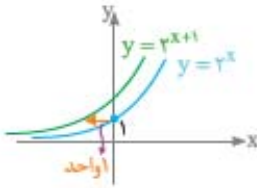
تشکیل یک دنباله حسابی داده‌اند.



مثال داده‌های جدول زیر، مربوط به یک تابع نمایی است.

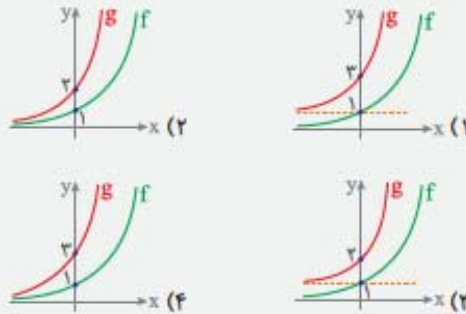
x	۱	۲	۳	۵
$f(x)$	۱۶	۴	۱	۱

$\times \frac{1}{4} \quad \times \frac{1}{4}$



۲ اگر $a < 0$ باشد، نمودار را a واحد در راستای محور x ها به چپ انتقال می‌دهیم.

تست در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 2^{x+1}$ به درستی رسم شده است؟



۴ نمودار تابع g محور y ها را در نقطه‌ای با عرض $g(0) = 2^{0+1} = 2$ قطع می‌کند. پس گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند. از طرفی نمودار g از انتقال نمودار تابع $y = 2^x$ به اندازه یک واحد به سمت چپ به دست آمده است، نه یک واحد به سمت بالا. پس گزینه (۴) درست است.

انتقال عمودی در نمودار تابع نمایی

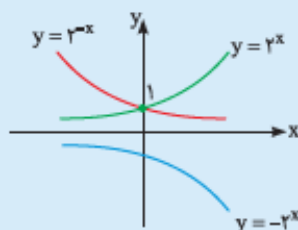
می‌دانیم که برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + b$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $b > 0$ باشد، باید نمودار $y = f(x)$ را در راستای محور y ها، b واحد به بالا منتقل کنیم.



۲ اگر $b < 0$ باشد، باید نمودار $y = f(x)$ را در راستای محور y ها، b واحد به پایین منتقل کنیم.

تذکره ۱ برای این که شکل به درستی رسم شود، یک خط چین افقی به موازات محور x برای نمودار رسم می‌کنیم (به این خط چین افقی، *میانپ* افقی تابع می‌گویند).

تذکره ۲ اگر نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها و نسبت به محور y ها قرینه کنیم، به ترتیب نمودار $y = -f(x)$ و $y = f(-x)$ به دست می‌آید.



قوانین مربوط به اعداد توان‌دار برای توان‌های حقیقی به صورت زیر است:

$$1 \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$2 \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$3 \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$4 \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$5 \quad (ab)^x = a^x \times b^x$$

$$6 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$7 \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

نمودار تابع نمایی

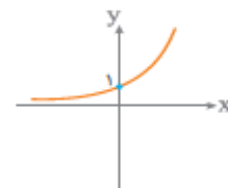
نمودار تابع نمایی $y = a^x$ با توجه این که a عددی بزرگ‌تر از یک باشد یا این که a عددی بین صفر و یک باشد، به یکی از شکل‌های زیر است:

$$1 \quad 0 < a < 1$$

$$2 \quad a > 1$$



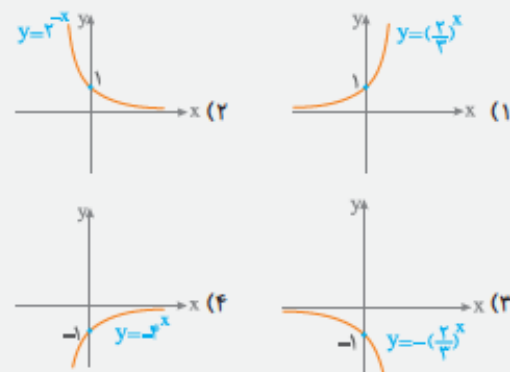
اکیداً نزولی



اکیداً صعودی

- دامنه این توابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن‌ها برابر $(0, +\infty)$ است.
- این توابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر هستند.
- محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کنند.
- با محور x ها در هیچ نقطه‌ای برخورد ندارند.

تست نمودار کدام تابع به درستی رسم شده است؟



۲ در گزینه (۲) ضابطه تابع را به صورت $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ می‌نویسیم. چون پایه عددی بین ۰ و ۱ است، پس نمودار آن نزولی است.

انتقال افقی در نمودار تابع نمایی

می‌دانیم که اگر بخواهیم نمودار تابع $y = f(x - a)$ را از روی نمودار $y = f(x)$ رسم کنیم:

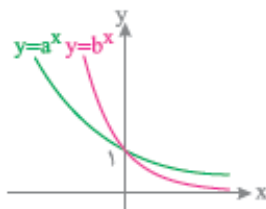


۱ اگر $a > 0$ باشد، نمودار را a واحد در راستای محور x ها به راست انتقال می‌دهیم.

مقایسه نمودارهای $y = a^x$ و $y = b^x$

وضعیت نمودار دو تابع نمایی $y = a^x$ و $y = b^x$ ، با توجه به مقادیر a و b به صورت زیر است:

$$0 < b < a < 1$$

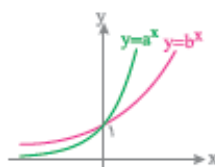


$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ و } y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

به صورت مقابل است:



$$a > b > 1$$



$$\text{مثلاً نمودار توابع } y = 3^x \text{ و } y = 2^x \text{ به}$$

صورت مقابل است:



نکته با توجه به نمودارهای فوق، اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و

مخالف یک باشند، به طوری که $a > b$ در این صورت به ازای $x > 0$

رابطه $a^x > b^x$ و به ازای $x < 0$ رابطه $a^x < b^x$ برقرار است. (به

عبارتی دیگر، به ازای x های مثبت هر چه پایه بزرگتر باشد، نمودارش بالاتر و به

ازای x های منفی نمودارش پایین تر است.)

تذکر با کمک نمودار دو تابع نمایی $y = a^x$ و $y = b^x$ می توانیم دو

عدد a^x و b^x را مقایسه کنیم.



مثلاً، با توجه به نمودار تابع های $y = 3^x$ و

$y = 5^x$ می توان نتیجه گرفت:

$$\Rightarrow 5^{\sqrt{2}} > 3^{\sqrt{2}}$$

تست نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



$$y = 3^x - 2 \quad (1)$$

$$y = -2 + 3^{x-1} \quad (2)$$

$$y = 2 - 3^{x+1} \quad (3)$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 2 \quad (4)$$

۲ نمودار از نقطه $(0, -\frac{5}{3})$ می گذرد پس باید گزینه ای را انتخاب کنیم که در آن $f(0) = -\frac{5}{3}$ باشد. پس گزینه های (۱) و (۳) نادرست هستند. از طرفی در نمودار تابع، با افزایش مقدار x مقدار y افزایش می یابد. بنابراین باید پایه تابع نمایی بزرگتر از یک باشد، پس گزینه (۴) نیز نادرست است.

تست شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است.



مقدار $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

$$54 \quad (1) \quad (\text{داخل } 99)$$

$$60 \quad (2)$$

$$48 \quad (3)$$

$$28 \quad (4)$$

۲ نمودار محور y را در نقطه $(0, -2)$ و محور x ها را در نقطه $(-\frac{1}{3}, 0)$ قطع می کند، پس:

$$f(0) = -2 \Rightarrow -4 + 2^{a \cdot 0 + b} = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f(-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow -4 + 2^{-\frac{a}{3} + 1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{a}{3} + 1} = 4$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین $f(x) = -4 + 2^{-3x+1}$ است و $f(-\frac{5}{3})$ برابر است با:

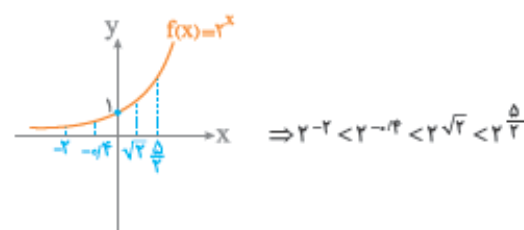
$$f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^{-3(-\frac{5}{3})+1} = -4 + 2^6 = -4 + 64 = 60$$

نکته با کمک نمودار تابع نمایی $y = a^x$ می توانیم دو عدد a^{x_1} و a^{x_2}

را مقایسه کنیم.

مثلاً، برای مقایسه عددهای 2^{-2} ، $2^{-0.4}$ ، $2^{\sqrt{2}}$ ، $2^{\frac{5}{3}}$ می توانیم نمودار تابع

$f(x) = 2^x$ را رسم کنیم و عرض نقاط با طول های -2 ، -0.4 ، $\sqrt{2}$ ، $\frac{5}{3}$ را تعیین کنیم. بنابراین با توجه به نمودار زیر نتیجه می گیریم:



نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = 2^{-x}$

با توجه به نمودار دو تابع $y = 2^x$ و $y = 2^{-x}$ در شکل زیر داریم:

برد تابع $y = 2^x$ برابر $(0, +\infty)$ و برد تابع $y = 2^{-x}$ برابر $(0, +\infty)$ است.

این دو تابع در یک نقطه با طول منفی و دو

نقطه با طول مثبت متقاطع هستند. [یعنی در

نقطه متقاطع اند]

این دو تابع در ربع اول، در نقاطی با طول های

$x = 2$ و $x = 4$ متقاطع هستند.

در ربع اول در بازه $(2, 4)$ نمودار تابع $y = 2^x$ بالای نمودار $y = 2^{-x}$ است.



معادلات نمایی

به معادلاتی مانند $2^x = 32$ یا $3^{x-1} = 81$ که مجهول در توان قرار

دارد، معادلات نمایی می گویند. برای حل سؤال های مربوط به معادلات

نمایی با حالت های کلی زیر مواجه هستیم:

1 در بعضی از معادله ها، در دو طرف تساوی یک عبارت نمایی

وجود دارد که می توانیم پایه های آن ها را یکسان کرده و معادله

توان ها را حل کنیم:

$$2^x = (0.125)^{x-1} \Rightarrow 2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} \Rightarrow 2^x = 2^{-2x+2}$$

$$\Rightarrow x = -2x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

تست از دو معادله $5^{x^2+x} = 1$ و $4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{2y-1}$ مقدار y کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \quad (3) \quad (4) \text{ هیچ کدام}$$

3 در هر یک از معادله ها، پایه ها را در طرفین تساوی یکسان

می کنیم:

$$5^{x^2+x} = 1 = 5^0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$$

$$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{2y-1} \Rightarrow (2^2)^x = (2^{-1})^{2y-1} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{1-2y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0: 1 = 2^{1-2y} \Rightarrow 1 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x = -1: 2^{-2} = 2^{1-2y} \Rightarrow 1 - 2y = -2 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2 در بعضی از معادله ها که معمولاً دو عبارت نمایی به همراه یک عدد

ثابت با هم جمع یا از هم کم شده اند، می توانیم از روش تغییر متغیر

استفاده کنیم.

$$9^x + 3^x - 12 = 0 \xrightarrow{t=3^x} t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \quad \times \\ t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

توجه کنید معادله $3^x = -4$ جواب ندارد، زیرا 3^x همواره عددی

مثبت است.

تست از دو معادله $4^x - 2^x = 56$ و $4^{1+x} \times 2^{x-y} = 16$ مقدار y کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 7 \quad (4)$$

4 ابتدا معادله $4^x - 2^x = 56$ را به صورت $(2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$ می نویسیم و سپس از تغییر متغیر $2^x = t > 0$ استفاده می کنیم؛ بنابراین:

$$t^2 - t - 56 = 0 \Rightarrow (t-8)(t+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \quad \checkmark \\ t = -7 \quad \times \end{cases}$$

از $2^x = 8$ نتیجه می گیریم $x = 3$ است و سپس آن را در معادله دوم جایگذاری می کنیم:

$$2^{2-y} \times 4^{1+3} = 16 \Rightarrow 2^{2-y} \times 2^8 = 2^4 \Rightarrow 2^{10-y} = 2^4 \Rightarrow 10 - y = 4 \Rightarrow y = 6$$

تذکر اگر بخواهیم محل برخورد دو تابع f و g را به دست آوریم، باید معادله نمایی $f(x) = g(x)$ را حل کنیم.

تست نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار

تابع $y = 2^x - x$ را در دو نقطه به طول های 1 و 2 قطع می کند. $f(3)$

کدام است؟ (داخل 98-)

$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

4 نمودارها در دو نقطه به طول های 1 و 2 متقاطع اند. پس این دو

نقطه در معادله $2^x - x = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{Ax+B}$ صدق می کند:

$$1) \quad x = 1: 2^1 - 1 = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{A+B} = 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2 \Rightarrow -A - B = 1$$

$$2) \quad x = 2: 2^2 - 2 = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{2A+B} = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \Rightarrow -2A - B = 2$$

$$(2), (1) \Rightarrow A = -1, B = 0$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای A و B خواهیم داشت:

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -2 + 2^3 = -2 + 8 = 6$$

نامعادلات نمایی

برای حل نامعادلات نمایی، باید ابتدا پایه ها را یکسان کنیم. در این صورت دو حالت خواهیم داشت:

1 اگر عدد پایه بین 0 و 1 باشد، پایه ها را از طرفین نامعادله حذف کرده و جهت نامساوی را عوض می کنیم.

$$a^x \geq a^y \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq y$$

$$(0.12)^{x-1} \leq (0.12)^x \Rightarrow (0.12)^{x-1} \leq (0.12)^x \Rightarrow x-1 \geq x \Rightarrow x \leq -1$$

2 اگر عدد پایه، بزرگتر از 1 باشد، پایه ها را از طرفین نامعادله حذف کرده ولی جهت نامساوی را عوض نمی کنیم.

$$a^x \geq a^y \xrightarrow{a > 1} x \geq y$$

$$3^{x+2} \geq 27^x \Rightarrow 3^{x+2} \geq 3^{3x} \Rightarrow x+2 \geq 3x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

۴ پایه‌ها را یکسان می‌کنیم تا بتوانیم توان‌ها را باهم مقایسه کنیم:

$$25^{2x-1} \leq 5^{x-2} \Rightarrow (5^2)^{2x-1} \leq 5^{x-2} \Rightarrow 5^{4x-2} \leq 5^{x-2}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، پایه برابر ۵، یعنی بزرگتر از یک است، پس جهت نامساوی بدون تغییر می‌ماند و خواهیم داشت:

$$4x-2 \leq x-2 \Rightarrow 3x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

تست مجموعه جواب نامعادله $5^{x-2} \leq 25^{2x-1}$ کدام بازه است؟

$$(1) \left(\frac{1}{5}, +\infty\right) \quad (2) \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$$

$$(3) \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right) \quad (4) \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right]$$

درس توابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

تابع لگاریتمی

تابع نمایی $f(x) = a^x$ با توجه به نمودارش یک به یک است و بنابراین وارون‌پذیر است. وارون آن به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نمایش داده می‌شود و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامند؛ به طوری که $a > 0$ و $a \neq 1$ است.

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

می‌دانیم بُرد تابع نمایی به صورت $(0, +\infty)$ است؛ پس دامنه وارون آن، یعنی دامنه تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ برابر $(0, +\infty)$ خواهد بود؛ بنابراین لگاریتم، فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود.

دامنه توابع لگاریتمی

برای به دست آوردن دامنه توابع لگاریتمی باید سه شرط زیر را بررسی کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک بگیریم:

- عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد.
- مبنای لگاریتم مثبت باشد.
- مبنای لگاریتم یک نباشد.

$$\log \Rightarrow \begin{cases} > 0 \\ > 0 \\ \neq 1 \end{cases} \rightarrow \text{دامنه به دست می‌آید.}$$

مثال دامنه $f(x) = \log_{(x-3)}(6-x)$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} 6-x > 0 \Rightarrow x < 6 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x-3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{cases} \rightarrow D_f = (3, 6) - \{4\} = (3, 4) \cup (4, 6)$$

تست دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-1)}(2x^2 - 5x + 3)$ کدام است؟

$$(1) (-\infty, 2) \quad (2) (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$(3) \mathbb{R} - \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad (4) \emptyset$$

۲ دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-1)}(2x^2 - 5x + 3)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2x^2 - 5x + 3 > 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > \frac{3}{2}$$

$$2-x > 0 \Rightarrow 2 > x \text{ و } 2-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$$

بنابراین دامنه تابع به صورت $D_f = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ است.

نکته در هنگام تعیین دامنه، نباید تابع را ساده کنیم.

مثلاً، دامنه تابع $y = \log x^2$ به صورت $\mathbb{R} - \{0\}$ است، در حالی که دامنه تابع $g(x) = 2 \log x$ به صورت $(0, +\infty)$ است.

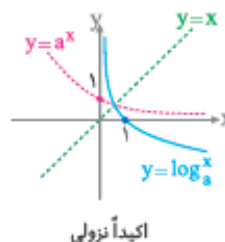
نمودار توابع لگاریتمی

با توجه به این که تابع لگاریتمی، وارون تابع نمایی است، پس نمودار تابع $y = \log_a x$ با توجه به مقدار a به یکی از صورت‌های زیر است:

$$a > 1$$

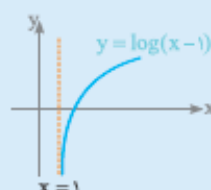
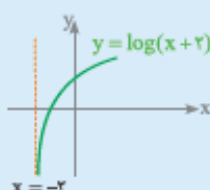


$$0 < a < 1$$



- دامنه این توابع برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.
- این توابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند.
- محور x ها را در نقطه‌ای با طول ۱ قطع می‌کنند.
- با محور y ها برخوردی ندارند.

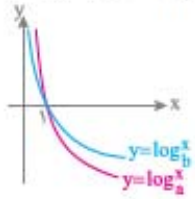
تذکره اگر در نمودارهای لگاریتم، انتقال افقی داشته باشیم، یک خط‌چین به موازات محور y ها رسم می‌کنیم تا مرز دامنه مشخص باشد. (به این خط‌چین افقی، **میان‌ب‌فانم تابع می‌گویند**)



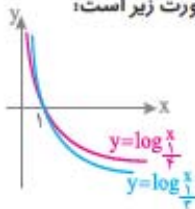
مقایسه نمودارهای $y = \log_b x$ و $y = \log_a x$

وضعیت نمودار دو تابع لگاریتمی $y = \log_b x$ و $y = \log_a x$ ، با توجه به مقادیر a و b به صورت مقابل است:

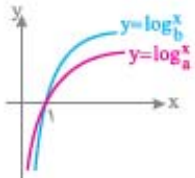
$$0 < b < a < 1$$



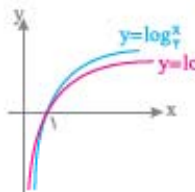
مثلاً نمودار توابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ و $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ به صورت زیر است:



$$a > b > 1$$

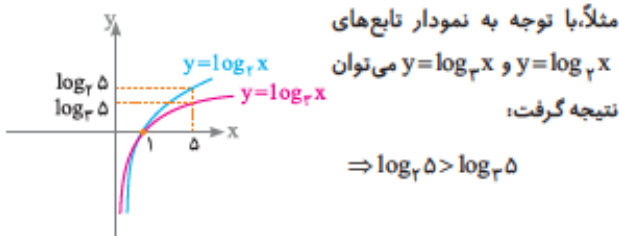


مثلاً نمودار توابع $\log_2 x$ و $\log_3 x$ به صورت زیر است:



تذکر با توجه به نمودارهای فوق، اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند، به طوری که $a > b$ ، در این صورت به ازای $x > 1$ رابطه $\log_a x < \log_b x$ و به ازای $0 < x < 1$ رابطه $\log_a x > \log_b x$ برقرار است. (به عبارت دیگر به ازای $x > 1$ هر چه مبنا بزرگتر باشد، نمودارش پایین تر و به ازای $0 < x < 1$ نمودارش بالاتر قرار می گیرد.)

نکته با کمک نمودار دو تابع نمایی $y = \log_b x$ و $y = \log_a x$ می توانیم دو عدد $\log_b x$ و $\log_a x$ را مقایسه کنیم.

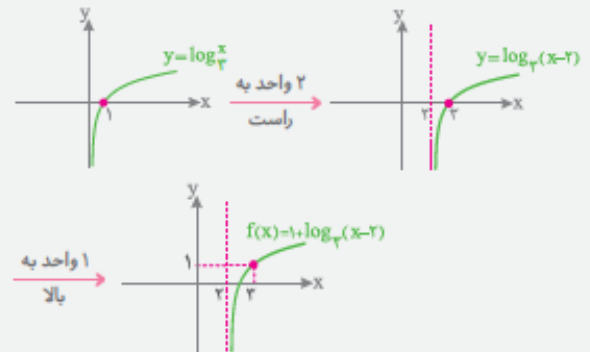

محاسبه لگاریتم

در سؤالاتی که می خواهیم مقدار $\log_b a$ را به دست آوریم، یکی از راهها این است که به سؤال [b به چه توانی برسد تا حاصل برابر a شود؟] پاسخ دهیم. مثلاً، اگر 2 به توان عدد 4 برسد، حاصل برابر 16 می شود، پس:

$$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

مثال نمودار تابع $f(x) = 1 + \log_2(x-2)$ را رسم کنید.

چون مبنای لگاریتم بزرگتر از 1 است، پس نمودار اکیداً صعودی است. حال با کمک قوانین انتقال داریم:


تست نمودار تابع $f(x) = \log_c(ax-b)$ به صورت مقابل است. مقدار

$a+b+c$ کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۷ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

۲ نمودار از نقطه $(5,0)$ می گذرد، پس:

$$f(5) = 0 \Rightarrow \log_c(5a-b) = 0 \Rightarrow 5a-b=1 \quad (1)$$

از طرفی دامنه تابع برابر $x > 4$ است، پس $x=4$ ریشه عبارت جلوی لگاریتم است:

$$4a-b=0 \Rightarrow b=4a \quad (2)$$

از (۱) و (۲) مقادیر $a=1$ و $b=4$ به دست می آیند. حال با توجه به این که نمودار از نقطه $(20,4)$ می گذرد، داریم:

$$f(20) = 4 \Rightarrow \log_c(20-4) = 4 \Rightarrow \log_c 16 = 4$$

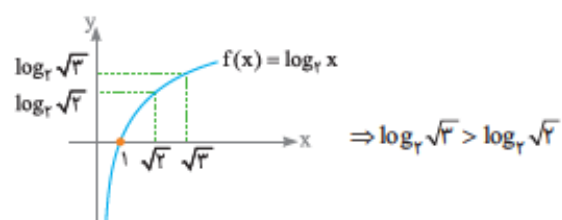
$$\Rightarrow c^4 = 16 \xrightarrow{c>0} c=2$$

پس $a+b+c=7$ است.

مقایسه لگاریتم ها

با کمک نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ می توانیم دو عدد $\log_a x_1$ و $\log_a x_2$ را مقایسه کنیم.

مثلاً، برای مقایسه دو عدد $\log_2 \sqrt{3}$ و $\log_2 \sqrt{2}$ می توانیم نمودار تابع $f(x) = \log_2 x$ را رسم کنیم و عرض دو نقطه با طول های $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ را تعیین کنیم. بنابراین با توجه به نمودار زیر نتیجه می گیریم:



تست حاصل $\log_3 9\sqrt{27}$ برابر کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (4) \quad \frac{8}{3} \quad (3) \quad \frac{7}{3} \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

۲ عبارت جلوی لگاریتم را به صورت توان دار می‌نویسیم و از قاعده انتقال توان استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_3 9\sqrt{27} &= \log_3 3^2 \times \sqrt{3^3} = \log_3 3^2 \times 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 3^{\frac{7}{2}} \\ &= \frac{7}{2} \log_3 3 = \frac{7}{2} \times 1 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

تست اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه

لگاریتم عدد $(\frac{1}{A} - 1)$ در مبنای ۴ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad -3 \quad (1)$$

۴ ابتدا A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A &= \log_8 2\sqrt[3]{25} = \log_8 2 \times (\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = \log_8 2 \times (2^{-2})^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_8 2 \times 2^{-\frac{2}{3}} = \log_8 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_8 2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\log_4 (\frac{1}{A} - 1) = \log_4 (9 - 1) = \log_4 8 = \log_8 2^3 = \frac{3}{2}$$

تست تابع $f(x) = \log_p(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{p}, +\infty)$

با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آنگاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟ (داخل - ۹۴)

$$1 \quad (4) \quad 0.5 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

۱ چون دامنه تابع به صورت بازه $(-\frac{1}{p}, +\infty)$ است، پس $-\frac{1}{p}$ ریشه عبارت جلوی لگاریتم است:

$$a(-\frac{1}{p}) + b = 0 \Rightarrow a = pb \quad (1)$$

از طرفی $f(4) = 2$ است، پس:

$$f(4) = \log_p(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b = 3^2 = 9 \xrightarrow{(1)} 9b = 9$$

$$\Rightarrow b = 1, a = 2$$

بنابراین $f(x) = \log_p(2x+1)$ است و $f(-\frac{4}{9})$ برابر است با:

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_p(2 \times (-\frac{4}{9}) + 1) = \log_p \frac{1}{9} = \log_p 3^{-2} = -2$$

جمع و تفریق لگاریتم‌ها

برای به دست آوردن مجموع یا تفاضل دو لگاریتم (یا چند لگاریتم) با مبنای یکسان، از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b ac$$

تست در کدام گزینه a بزرگتر است؟

$$\log_{-2} a = 4 \quad (2) \quad \log_a \frac{1}{3} = -1 \quad (1)$$

$$\log_{25} a = -\frac{1}{5} \quad (4) \quad \log_a 2 = \frac{1}{3} \quad (3)$$

۳ همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1) \log_a \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$$

توجه کنید در گزینه ۲ چون مبنای ۲ برابر ۲- و منفی است، پس $\log_{-2} a$ تعریف نشده است.

$$3) \log_a 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۳}} a = 2^3 = 8$$

$$4) \log_{25} a = -\frac{1}{5} \Rightarrow a = (25)^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[5]{25}} = \frac{1}{5}$$

قوانین محاسبه لگاریتم

برای محاسبه لگاریتم‌ها، قانون‌های مختلفی داریم که در ادامه آن‌ها را با جزئیات بررسی می‌کنیم. توجه داشته باشید، در همه قوانین زیر مبنای مخالف عدد ۱ در نظر گرفته می‌شود.

قاعده انتقال توان

اگر عبارت جلوی لگاریتم و مبنای لگاریتم عبارت‌هایی توان‌دار باشند، با کمک قاعده انتقال توان می‌توانیم توان آن‌ها را به پشت لگاریتم منتقل کنیم:

$$\log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

۱ اگر عبارت جلوی لگاریتم [یا مبنای لگاریتم] از ضرب دو یا چند عدد تشکیل شده باشد به طوری که فقط بعضی از آن‌ها توان‌دار باشند، نمی‌توانیم توان را به پشت لگاریتم منتقل کنیم.

$$\log(3 \times 5^2) \neq 2 \log(3 \times 5) \quad \log(3 \times 5)^2 = 2 \log(3 \times 5)$$

۲ توان عبارت جلوی لگاریتم را نمی‌توان به عنوان توان برای خود لگاریتم در نظر گرفت.

$$\frac{1}{p} \log 3 = \log 3^{\frac{1}{p}} = \log \sqrt[p]{3} \quad (\log 3)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\log 3}$$

$$(\log 3)^2 \neq \log 3^2$$

تذکره ۱ با توجه به تعریف لگاریتم، می‌توانیم دو قانون زیر را نتیجه بگیریم:

۱ لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر با صفر است.

$$\log_a 1 = 0$$

۲ لگاریتم هر عددی در پایه خودش برابر با یک است.

$$\log_a a = 1$$

تذکره ۲ لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامند و معمولاً در

این حالت مبنای لگاریتم نوشته نمی‌شود، یعنی:

$$\log_{10} a = \log a$$

$$\log 10 = \log_{10} 10 = 1 \quad \log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$$

قاعده تغییر مبنای

هر لگاریتم را می‌توان با کمک قانون تغییر مبنای به صورت تقسیم دو لگاریتم نوشت؛ به عبارتی اگر c یک عدد حقیقی دلخواه ($c > 0, c \neq 1$) باشد، آنگاه می‌توان از c به عنوان پایه لگاریتم استفاده کرد؛ بنابراین:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \quad \frac{\log_3 9}{\log_3 6} = \log_6 9$$

مثال اگر $\log_3 2 = a$ باشد، مقدار $\log_6 2$ را بر حسب a به دست آورید.

$$\begin{aligned} \log_6 2 &= \frac{\log_3 2}{\log_3 6} = \frac{\log_3 2}{\log_3 (3 \times 2)} = \frac{\log_3 2}{\log_3 3 + \log_3 2} \\ &= \frac{\log_3 2}{1 + \log_3 2} = \frac{a}{1+a} \end{aligned}$$

نتایج و کاربردهای قانون تغییر مبنای

۱ به طور کلی می‌توان گفت $\log_b a$ و $\log_a b$ معکوس یکدیگر هستند:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

تست حاصل $\frac{1}{\log_3 4} - \frac{1}{\log_3 6}$ کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۲ با توجه به رابطه $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ داریم:

$$\frac{1}{\log_3 4} - \frac{1}{\log_3 6} = \log_4 3 - \log_6 3 = \log_3 \frac{4}{6} = \log_3 \frac{2}{3} = \log_3 2 - \log_3 3 = 2 - 1 = 1$$

۳ اگر دو (یا چند) لگاریتم در یکدیگر ضرب شوند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

مثال حاصل $\log_3 4 \times \log_4 9$ را به دست آورید.

$$\log_3 4 \times \log_4 9 = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

۳ اگر مقدار یک لگاریتم داده شود و از ما حاصل یک لگاریتم دیگر با مبنای متفاوت را بخواهند (در صورتی که مبنای آن را نتوان به هم تبدیل کرد) بهترین راهکار این است که لگاریتم خواسته شده را با کمک قاعده تغییر مبنای به مبنای لگاریتم داده شده ببریم.

تست اگر $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ باشد، آنگاه $\log_{18} 8$ کدام است؟ (خارج - ۹۹)

$$\frac{3}{4} \quad (4) \quad \frac{8}{11} \quad (3) \quad \frac{5}{7} \quad (2) \quad \frac{15}{22} \quad (1)$$

۲ از قاعده تغییر مبنای استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{18} 8 &= \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 (3 \times 2^2)} = \frac{3 \log_3 2}{\log_3 3 + 2 \log_3 2} \\ &= \frac{3 \times \frac{5}{8}}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{9}{4}} = \frac{15}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

مثلاً، برای ساده کردن لگاریتم‌های زیر داریم:

$$2 \log_6 3 + \log_6 4 = \log_6 3^2 + \log_6 4 = \log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36 = 2$$

$$\log_{25} 3600 - \log_{25} 12 = \log_{25} 6 \times 10^2 - \log_{25} 12 = \frac{2}{5} \log_{25} 600 - \log_{25} 12$$

$$= \log_{25} \frac{600}{12} = \log_{25} 50 = 1$$

تذکره ۱ از آنجایی که $\log 10 = 1$ است، می‌توانیم $\log 2$

و $\log 5$ را به صورت زیر به یکدیگر تبدیل کنیم:

$$\log 5 = 1 - \log 2$$

$$\log 2 = 1 - \log 5$$

تذکره ۲ اگر بخواهیم مجموع یا تفاضل یک عدد و یک عبارت لگاریتمی

را پیدا کنیم، می‌توانیم عدد را به شکل لگاریتمی با مبنای لگاریتم داده شده بنویسیم و سپس از قانون جمع و تفریق دو لگاریتم استفاده کنیم.

$$\frac{1}{2} + \log_5 3 = \log_5 \sqrt{5} + \log_5 3 = \log_5 3\sqrt{5}$$

تست اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، آنگاه $\log \sqrt{12}$ کدام است؟

$$\frac{a}{2} + b \quad (4) \quad 2a + b \quad (3) \quad a + \frac{b}{2} \quad (2) \quad a + 2b \quad (1)$$

۲

$$\log \sqrt{12} = \log 12^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 12 = \frac{1}{2} (\log 4 + \log 3)$$

$$= \frac{1}{2} (2 \log 2 + \log 3) = \frac{1}{2} (2a + b) = a + \frac{b}{2}$$

تست حاصل $\log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{5} + \log \frac{5}{6} + \dots + \log \frac{29}{30}$ کدام است؟

$$-1 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -\frac{1}{3} \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

۴

$$\log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{5} + \log \frac{5}{6} + \dots + \log \frac{29}{30}$$

$$= \log \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{29}{30} \right)$$

$$= \log \frac{3}{30} = \log \frac{1}{10} = -1$$

تذکره اگر مجموع یا تفاضل دو لگاریتم خواسته شود به طوری که عبارت

جلوی لگاریتم‌ها از مجموع (یا تفاضل) دو رادیکال یا یک عددویک رادیکال تشکیل شده باشد، از دو اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج استفاده می‌کنیم.

تست اگر $\log 3 = k$ باشد، حاصل $2 \log(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \log(7 + 2\sqrt{10})$ کدام است؟

$$2 + 2k \quad (4) \quad 1 + k \quad (3) \quad 2k \quad (2) \quad 2k \quad (1)$$

۱ با کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای $(7 + 2\sqrt{10})$ را به صورت

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$$

می‌نویسیم. سپس با استفاده از قوانین لگاریتم و اتحاد مزدوج داریم:

$$2 \log(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \log(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 =$$

$$2 \log(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + 2 \log(\sqrt{5} + \sqrt{2}) =$$

$$= 2 \log(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 2 \log(5 - 2) = 2 \log 3 = 2k$$

مثال معادله $\log_2(x+1)=3$ را حل کنید.

$$\log_2(x+1)=3 \Rightarrow x+1=2^3 \Rightarrow x=7$$

چون $x=7$ عبارت جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

در بعضی از معادلات، می‌توانیم در دو طرف تساوی، دو لگاریتم با مبنای مساوی ایجاد کنیم و معادله را به شکل $\log_b \text{ ()} = \log_b \text{ ()}$ بنویسیم. در این معادلات، با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتم، می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\text{ ()} = \text{ ()}$.

مثال معادله $2\log_5 x - \log_5(2x-1)=0$ را حل کنید.

$$2\log_5 x - \log_5(2x-1)=0 \Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} \log_5 x - \log_5(2x-1)=0$$

$$\Rightarrow \log_5 x = \log_5(2x-1) \Rightarrow x=2x-1 \Rightarrow x=1$$

از آنجایی که $x=1$ هیچ یک از دو عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی یا صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

تذکر پس از حل معادله لگاریتمی، جواب‌های به دست آمده را در معادله قرار می‌دهیم تا مشخص شود که در دامنه لگاریتم هستند یا نه.

برای حل بعضی از معادلات لگاریتمی باید از تغییر متغیر استفاده کنیم.

$$(\log_2 x)^2 - 8\log_2 x + 1 = 0 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8\log_2 x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{8}{1} \log_2 x + 1 = 0 \xrightarrow{\log_2 x = t} t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x=2$$

تذکر برای حل بعضی از معادلات نمایی که در هر دو طرف تساوی یک عبارت نمایی وجود دارد، در صورتی که پایه‌های آن‌ها برابر نباشد و نتوان پایه‌های طرفین را یکسان کرد، می‌توانیم عبارت‌های شامل x را با کمک قوانین اعداد توان‌دار، تنها کنیم و سپس با استفاده از تعریف لگاریتم مقدار x را پیدا کنیم.

مثال معادله $2^{1-x} = 3^x$ را حل کنید.

$$2^{1-x} = 3^x \Rightarrow 2^1 \times 2^{-x} = 3^x \Rightarrow 2 \times \frac{1}{2^x} = 3^x \Rightarrow 6^x = 2 \Rightarrow x = \log_6 2$$

تست از تساوی $\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3$ مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$

در مبنای ۴ کدام است؟

$$\frac{1}{3} (4) \quad \frac{1}{4} (3) \quad -\frac{1}{4} (2) \quad -\frac{1}{3} (1)$$

۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log \sqrt{x^2} = \log 3$$

$$\Rightarrow \log(2x-1) + \log |x| = \log 3$$

حال چون دامنه معادله $x > \frac{1}{2}$ است، پس $|x| = x$ و داریم:

$$\log(2x-1) + \log x = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1)x = \log 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{b=a+c} x = \frac{3}{2} \checkmark, x = -1 \times$$

$$\Rightarrow \log_6 \frac{x}{3} = \log_6 \frac{3}{2} = \log_6 \frac{1}{2} = \log_6 2^{-1} = -\frac{1}{2}$$

قاعده اعداد با توان لگاریتمی

اگر یک عبارت لگاریتمی به عنوان توان یک عدد قرار بگیرد، می‌توانیم جای عدد و عبارت جلوی لگاریتم را با یکدیگر عوض کنیم:

$${}_a \log_c b = b \log_c a$$

تذکر در حالت خاص، داریم:

$${}_a \log_a b = b$$

$${}_2 \log_5 3 = 3 \log_5 2$$

$${}_{12} \log_{27} 6 = 6 \log_{27} 12$$

$${}_3 \log_{25} 5 = 5$$

تست حاصل عبارت $\frac{1}{\log_5 3} + \frac{1}{\log_5 11}$ کدام است؟

$$25 (4) \quad 14 (3) \quad 10 (2) \quad 7 (1)$$

۲ می‌دانیم $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ است، پس:

$$\frac{1}{{}_3 \log_5 3} + \frac{1}{\log_5 11} = {}_3 \log_5 3 + \log_5 11 = {}_3 \log_{15} 3 + \log_{15} 11 = \log_{15} 33 = \log_{15} 3 \times 11 = \log_{15} 3 + \log_{15} 11 = 1 + 0 = 1$$

یافتن حدود لگاریتم

اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\log_b a$ را محاسبه کنیم، یعنی بررسی کنیم که $\log_b a$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، باید مشخص کنیم عدد a بین کدام دو توان متوالی از b قرار دارد.

مثلاً برای این که ببینیم $\log_2 10$ ، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و به کدام یک نزدیک‌تر است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2^3 < 10 < 2^4 \xrightarrow{\log \text{ در مبنای ۲}} \log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^4 \Rightarrow 3 < \log_2 10 < 4$$

چون 10 به $2^3 = 8$ نزدیک‌تر است تا به $2^4 = 16$ ، پس $\log_2 10$ هم به 3 نزدیک‌تر است تا به 4 .

تست حاصل عبارت $[\log_{1/5} 3/5]$ کدام است؟

$$-2 (4) \quad -1 (3) \quad 2 (2) \quad 1 (1)$$

$$\log_{1/5} 3/5 = \log_{\frac{1}{5}} \frac{3}{5} = -\log_5 \frac{3}{5}$$

۴ می‌دانیم:

از آنجایی که $2^2 < 3/5 < 2^1$ ، داریم:

$$\log_2 2^1 < \log_2 3/5 < \log_2 2^2 \Rightarrow 1 < \log_2 3/5 < 2$$

پس $-\log_2 3/5$ بین دو عدد -2 و -1 قرار گرفته است. بنابراین:

$$[\log_{1/5} 3/5] = [-\log_2 3/5] = -2$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا به کمک قوانین لگاریتم، معادله را در صورت امکان ساده کرده و سپس پارامتر خواسته شده را به دست می‌آوریم. در این سوالات با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر پس از ساده کردن لگاریتم، معادله به صورت $\log_b \text{ ()} = c$ دربیاید، برای حل معادله از تعریف لگاریتم استفاده می‌کنیم؛ یعنی می‌نویسیم $b^c = \text{ ()}$ و ...

یا طبق فرمولی که بانک به سپرده سود می‌دهد، میزان نهایی جمعیت یا پول را به‌دست آوریم. در این مسائل معمولاً یک تابع نمایی داریم و برای به‌دست آوردن خواسته مسئله باید یک معادله نمایی حل کنیم.

مثال نوعی بیماری با 50 باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم‌ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه $p(t) = 50 \times 2^{2t}$ به‌دست می‌آید. با فرض این‌که هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از 4 ساعت را به‌دست آورید.

$$p(4) = 50 \times 2^{2 \times 4} = 50 \times 2^8 = 50 \times 256 = 12800$$

تذکر اگر مقدار اولیه مشخص نبود، می‌توانیم با قرار دادن $t=0$ در رابطه داده شده، مقدار اولیه را به‌دست آوریم.

شدت زلزله

اگر قدرت زلزله‌ای برحسب ریشتر برابر M باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله، برابر E ، برحسب اِرج (Erg) است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow E = 10^{1/8 + 1/5 M}$$

مثال انرژی آزادشده‌ای که در زلزله‌ای به قدرت $2/8$ ریشتر گزارش شده، برحسب اِرج چقدر است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \xrightarrow{M=2/8} \log E = 11/8 + 1/5 (2/8) \\ \Rightarrow \log E = 16 \Rightarrow E = 10^{16}$$

تذکر هر اِرج معادل 10^{-7} ژول است؛ پس برای تبدیل اِرج به ژول، باید انرژی آزاد شده برحسب اِرج را در 10^{-7} ضرب کنیم.

در مثال قبل انرژی آزاد شده برحسب ژول برابر است با:

$$E = 10^{16} \times 10^{-7} = 10^9 \text{ (ژول)}$$

نکته اگر میزان انرژی آزاد شده در زلزله‌ای با قدرت M_1 ریشتر برابر E_1 و میزان انرژی آزادشده در زلزله‌ای با قدرت M_2 ریشتر برابر E_2 باشد، رابطه زیر برای نسبت انرژی‌های آزادشده در دو زلزله برقرار است:

$$\log \frac{E_1}{E_2} = 1/5 (M_1 - M_2)$$

مثال میزان انرژی آزادشده در یک زلزله $5/6$ ریشتری چند برابر یک

زلزله $3/6$ ریشتری است؟

$$\log \frac{E_1}{E_2} = 1/5 (\underbrace{5/6 - 3/6}_1) = 1/5 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/5} = 10^{\dots}$$

نامعادلات لگاریتمی

برای حل نامعادله‌های لگاریتمی، ابتدا دامنه هر یک از لگاریتم‌ها را به‌دست می‌آوریم و نامعادله را به یکی از صورت‌های زیر حل می‌کنیم. سپس اشتراک مقادیر به‌دست آمده از دامنه و نامعادله را به عنوان جواب در نظر می‌گیریم.

حل نامعادله $\log_a x \geq \log_a y$

۱ اگر مبنا عددی بین 0 و 1 باشد، عبارت‌های جلوی لگاریتم را نگه داشته و جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$$\log_a x \geq \log_a y \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq y$$

مثال نامعادله $\log_{1/3} (x-1) < \log_{1/3} 3$ را حل کنید.

دامنه $\log_{1/3} (x-1)$ برابر $(1, +\infty)$ است. حال داریم:

$$\log_{1/3} (x-1) < \log_{1/3} 3 \Rightarrow x-1 > 3 \Rightarrow x > 4$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $(4, +\infty)$ است.

۲ اگر مبنا عددی بزرگ‌تر از 1 باشد، عبارت‌های جلوی لگاریتم را نگه داشته و جهت نامساوی را عوض نمی‌کنیم.

$$\log_a x \geq \log_a y \xrightarrow{a > 1} x \geq y$$

مثال نامعادله $\log_7 (x-1) < \log_7 3$ را حل کنید.

دامنه $\log_7 (x-1)$ برابر $(1, +\infty)$ است. حال داریم:

$$\log_7 (x-1) < \log_7 3 \Rightarrow x-1 < 3 \Rightarrow x < 4$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $(1, 4)$ است.

تذکر برای حل نامعادلات لگاریتمی، باید مبنای لگاریتم‌ها یکسان باشد.

مثال مجموعه جواب نامعادله $\log_7 (x^2-1) < \log_7 8$ ، شامل چند

عدد صحیح است؟

$$\log_7 (x^2-1) < \log_7 8 \Rightarrow x^2-1 < 8 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3$$

$$\Rightarrow -3 < x < 3 \quad (1)$$

$$\text{تعیین دامنه } \log_7 (x^2-1): \log_7 (x^2-1) > 0 \Rightarrow x^2-1 > 0 \Rightarrow |x| > 1$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \quad (2)$$

اشتراک جواب به‌دست آمده از (۱) و (۲) به صورت بازه $(1, 3) \cup (-3, -1)$

است که شامل ۲ عدد صحیح $x=2$ و $x=-2$ است.

کاربرد توابع نمایی و لگاریتم

رشد و زوال

در بعضی از سؤالات مقدار اولیه چیزهایی مثل میزان جمعیت، باکتری، سپرده یک فرد در بانک و... را می‌دهند. سپس از ما می‌خواهند طبق رابطه‌ای که در آن جمعیت زیاد می‌شود (رشد) یا کاهش می‌یابد (زوال)

مثلثات

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیازهای این فصل معادله و نامعادله، توان و عبارت جبری و تابع است. مباحث مربوط به مثلثات، پیش‌نیاز فصل‌های حد، مشتق و کاربرد مشتق است.

توصیه: سعی کنید با تمرین و تکرار روی روابط اولیه مثلثات و دایره مثلثاتی مسلط شوید. یادگیری موضوع‌های زیادی از مثلثات، نیاز به شناخت دایره مثلثاتی دارد. اگر می‌خواهید نتیجه خوبی در مثلثات بگیرید فقط روی فرمول‌های اصلی یعنی روابط اولیه، روابط دو آلفا و رابطه طلایی تمرکز کنید و به جای استفاده از فرمول‌های میانبر، کاربرد و نحوه استفاده از فرمول‌های اصلی را یاد بگیرید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	(نوبت اول) ۱۴۰۲	(نوبت دوم) ۱۴۰۲	(نوبت اول) ۱۴۰۳	(نوبت دوم) ۱۴۰۳	(نوبت اول) ۱۴۰۴
تعداد تست	۴	۳	۴	۴	۵	۴	۴	۳

مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات

درس

زاویه مرکزی برحسب طول کمان و شعاع

در هر دایره به شعاع r ، اگر l طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی θ باشد اندازه زاویه مرکزی θ برحسب رادیان برابر است با:

$$\theta = \frac{l}{r}$$



مثال محیط دایره زیر را به دست آورید.

$$\Rightarrow \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow 2 = \frac{r}{r} \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = 2\pi r = 4\pi$$

تبدیل واحدهای زاویه به یکدیگر

اگر D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان باشد، با استفاده از رابطه زیر می‌توان درجه و رادیان را به هم تبدیل کرد:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

تذکر با توجه به رابطه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود هر رادیان تقریباً 57° است؛ زیرا:

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} = 57^\circ$$

تست اگر مجموع دو زاویه برابر $\frac{5\pi}{12}$ رادیان و تفاضل آن‌ها 5° درجه باشد، زاویه بزرگ‌تر چند درجه است؟

۱) زاویه بزرگ‌تر را x و زاویه کوچک‌تر را y در نظر می‌گیریم. از آن جایی که $\frac{5\pi}{12}$ رادیان معادل 75° است، پس:

$$x + y = 75^\circ$$

$$x - y = 5^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 80^\circ \Rightarrow x = 40^\circ, y = 35^\circ$$

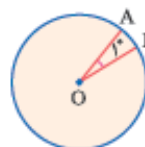
درجه و رادیان

در صفحه مختصات، زاویه به وسیله دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند ایجاد می‌شود. یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع دوران حول رأس مشترک است در نظر می‌گیرند و نیم‌خط دیگر را به عنوان ضلع انتهایی که مکان انتهای دوران است در نظر می‌گیرند.



مفهوم درجه و رادیان

برای اندازه‌گیری زاویه، از واحدهای درجه و رادیان استفاده می‌شود:



۱) اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به هر قسمت را یک درجه می‌نامند.



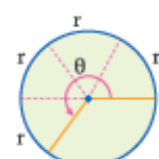
۲) اگر در هر دایره دلخواه، کمانی به اندازه شعاع دایره در نظر بگیریم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی آن کمان را یک رادیان می‌نامند.

$$\theta = 1 \text{ rad}$$

مثلاً در دایره‌های زیر زاویه‌های ۲ رادیان و ۴ رادیان مشخص شده است:

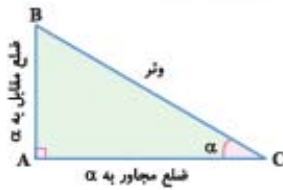


$$\theta = 2 \text{ rad}$$



$$\theta = 4 \text{ rad}$$

معرفی نسبت‌های مثلثاتی



در هر مثلث قائم‌الزاویه با زاویه دلخواه α ، چهار نسبت مثلثاتی مهم قابل تعریف است:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

نتیجه

تست با توجه به مثلث مقابل، کدام نسبت مثلثاتی از بقیه کوچک‌تر است؟



- (۱) $\sin \hat{C}$
- (۲) $\tan \hat{A}$
- (۳) $\tan \hat{C}$
- (۴) $\sin \hat{A}$

۴ ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس طول ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 64 \Rightarrow AB = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{6}, \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} \\ \sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10}, \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} \end{cases}$$

پس $\sin \hat{A}$ از بقیه نسبت‌ها کوچک‌تر است.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف مطابق جدول زیر است:

نسبت مثلثاتی \ زاویه α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
0°	۰	۱	۰	تعریف نشده
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	۱	۰	تعریف نشده	۰
$180^\circ = \pi$	۰	-۱	۰	تعریف نشده
$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	-۱	۰	تعریف نشده	۰
$360^\circ = 2\pi$	۰	۱	۰	تعریف نشده

تست در دایره‌ای به قطر ۸ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه 135°

کدام است؟

- (۱) π
- (۲) 2π
- (۳) 3π
- (۴) 4π

۳ ابتدا زاویه 135° را به صورت رادیان می‌نویسیم:

$$\frac{\theta}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{4}$$

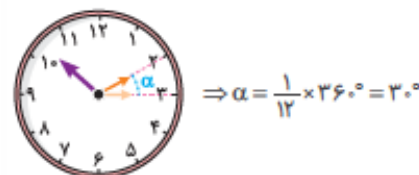
حال با توجه به رابطه طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی θ داریم:

$$l = r\theta \Rightarrow l = \left(\frac{8}{2}\right) \left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \times \frac{3\pi}{4} = 3\pi$$

زاویه طی‌شده توسط عقربه‌های ساعت

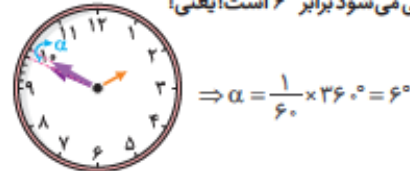
اگر نوک عقربه ساعت‌شمار یک دور کامل بچرخد، 2π رادیان معادل 360° دوران می‌کند؛ یعنی 12 ساعت سپری شده است.

پس زاویه‌ای که در هر ساعت توسط عقربه ساعت‌شمار طی می‌شود برابر 30° است؛ یعنی:



$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$$

اگر نوک عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل بچرخد، 2π رادیان معادل 360° دوران می‌کند؛ یعنی 60 دقیقه سپری شده است. پس زاویه‌ای که در هر دقیقه توسط عقربه دقیقه‌شمار طی می‌شود برابر 6° است؛ یعنی:



$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{60} \times 360^\circ = 6^\circ$$

تست پس از گذشت ۳ ساعت و ۴۰ دقیقه، نوک عقربه ساعت

شماری به طول ۳۶ چه مسافتی را پیموده است؟

- (۱) 22π
- (۲) 18π
- (۳) 26π
- (۴) 14π

۱ عقربه ساعت‌شمار در 12 ساعت، یعنی 720 دقیقه، به اندازه 2π دوران می‌کند، پس در 3 ساعت و 40 دقیقه، یعنی 220 دقیقه، داریم:

$$\frac{720 \text{ دقیقه}}{220 \text{ دقیقه}} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{18} \pi$$

بنابراین مسافت پیموده شده توسط نوک عقربه ساعت‌شمار برابر

$$l = r\theta \Rightarrow l = 36 \times \frac{1}{18} \pi = 2\pi$$

است با:

تست چرخ در ۵ دقیقه 75° دور می‌چرخد. زاویه چرخش این چرخ

در مدت یک ثانیه چند رادیان است؟

- (۱) 3π
- (۲) 4π
- (۳) 5π
- (۴) 6π

۳ این چرخ در ۵ دقیقه یعنی $300 = 5 \times 60^\circ$ ثانیه، 75° دور می‌چرخد،

پس در هر ثانیه $\frac{75^\circ}{300} = 2.5^\circ$ دور می‌چرخد. از آنجایی که هر دور

معادل 2π رادیان است، پس $2.5 \times 2\pi = 5\pi$.

در مثلث‌های ABD و ACD داریم:

$$\begin{cases} \triangle ACD: \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{h}{x} = 1 \Rightarrow h = x \\ \triangle ABD: \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{h}{10+x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{10+h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} h = \frac{10\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{10}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1)$$

تست در مثلث قائم الزاویه مقابل، اگر $\cos \hat{A} = 0.8$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟



- ۶۰ (۱)
۹۰ (۲)
۱۲۰ (۳)
۹۶ (۴)

۴ چون کسینوس زاویه $\hat{A}$ برابر 0.8 است، پس:

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow 0.8 = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 16$$

حال برای محاسبه مساحت، ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس اندازه ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

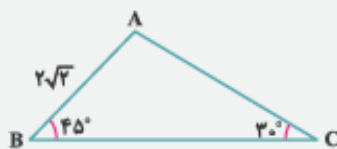
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 20^2 = 16^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow BC = 12$$

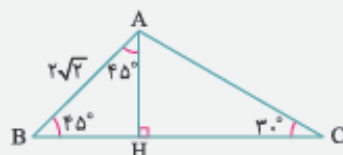
$$S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$$

تذکر اگر مثلث داده شده قائم‌الزاویه نباشد، می‌توانیم با رسم ارتفاع، درون مثلث اولیه دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم. سپس به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی طول اضلاع خواسته شده را به دست آوریم.

مثال در مثلث مقابل، $\hat{A} = 30^\circ$ ، $\hat{B} = 45^\circ$ ، $AB = 2\sqrt{2}$ است. طول ضلع BC را به دست آورید.



ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و در هر یک از مثلث‌های ABH و ACH داریم:



$$\begin{cases} \triangle ABH: \cos \hat{B} = \cos 45^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{2\sqrt{2}} \\ \Rightarrow BH = 2 \Rightarrow AH = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle ACH: \tan 30^\circ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{CH} \Rightarrow CH = 2\sqrt{3} \\ \Rightarrow BC = BH + CH = 2 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

تست حاصل عبارت $\sin \frac{3\pi}{4} \times \cot^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \pi \times \tan \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$\frac{2}{9} (4) \quad \frac{5}{9} (3) \quad \frac{3}{4} (2) \quad \frac{2}{3} (1)$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} \times \cot^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \pi \times \tan \frac{\pi}{4} = (-1) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2 \times 1 = -1 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

زوایای متمم

دو زاویه را متمم می‌نامند هرگاه حاصل جمع آن‌ها، برابر با 90° باشد. ویژگی دو زاویه متمم این است که سینوس یکی از آن‌ها با کسینوس دیگری برابر است و تانژانت یکی از آن‌ها با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس.

$$30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

زوایای مکمل

دو زاویه را مکمل می‌نامند هرگاه حاصل جمع آن‌ها، برابر با 180° باشد، اگر دو زاویه مکمل باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است، اما سایر نسبت‌های مثلثاتی قرینه‌اند.

$$30^\circ + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin 150^\circ = \sin 30^\circ \\ \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ \\ \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ \\ \cot 150^\circ = -\cot 30^\circ \end{cases}$$

تست حاصل $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 7^\circ + \cos 8^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 7^\circ + \sin 8^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} (4) \quad \frac{3}{2} (3) \quad \frac{1}{2} (2) \quad 1 (1)$$

۱ زاویه‌های 2° و 7° و همچنین زاویه‌های 1° و 8° متمم‌اند، پس:

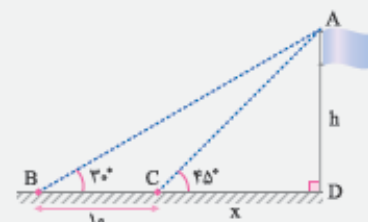
$$\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 7^\circ + \cos 8^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 7^\circ + \sin 8^\circ} = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \sin 2^\circ + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cos 2^\circ + \cos 1^\circ} = 1$$

اضلاع مجهول در مثلث قائم‌الزاویه

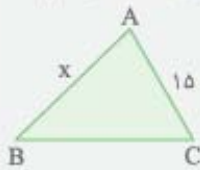
در سؤالاتی که در یک مثلث قائم‌الزاویه طول یک ضلع به همراه اندازه یک زاویه یا یک نسبت مثلثاتی از آن زاویه مشخص باشد، می‌توانیم به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی طول بقیه اضلاع مثلث را به دست آوریم.

مثال مطابق شکل یک فرد در نزدیکی پرچمی در نقطه C قرار دارد و

نوک پرچم را با زاویه 45° مشاهده می‌کند. اگر ۱۰ متر به عقب برود، و در نقطه B قرار گیرد نوک پرچم را با زاویه 30° خواهد دید. ارتفاع پرچم را به دست آورید.



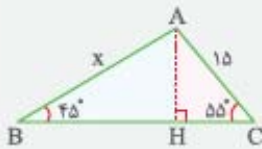
۳ روش اول: مسئله را از طریق قضیه سینوس ها نیز حل کنیم:



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\sin 45^\circ} \Rightarrow x = 12\sqrt{2}$$

روش دوم: می توانستیم بدون استفاده از قضیه سینوس ها نیز این سؤال را حل کنیم.

ارتفاع AH را رسم می کنیم. سپس در مثلث AHC زاویه C را می نویسیم:

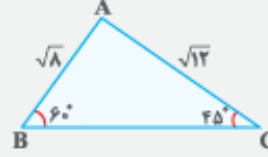


$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \sin 55^\circ = \frac{AH}{15} \Rightarrow AH = 12$$

حال در مثلث AHB با کمک سینوس زاویه B اندازه ضلع AB را به دست می آوریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12}{\sin 45^\circ} = 12\sqrt{2}$$

تست در مثلث مقابل طول ضلع BC کدام است؟

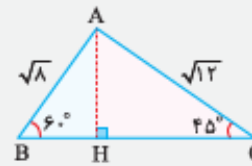


$$(1) \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$(2) \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$(3) 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$(4) 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$



۱ ارتفاع AH را رسم می کنیم و در مثلث های قائم الزاویه AHB و AHC به ترتیب کسینوس زاویه های 60° و 45° را می نویسیم:

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{\sqrt{8}} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

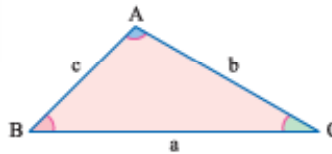
$$\cos 45^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CH}{\sqrt{12}} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

بنابراین طول ضلع BC برابر است با:

$$BC = BH + CH = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

قضیه سینوس ها

در هر مثلث رابطه زیر بین اندازه اضلاع و سینوس زاویه ها برقرار است:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

به این قضیه، قضیه سینوس ها می گویند.

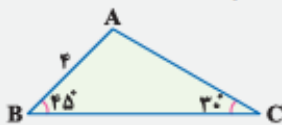
مثال در شکل مقابل طول ضلع AC را به دست آورید.



مطابق قضیه سینوس ها:

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AC = \frac{\sin 45^\circ \times 6}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 6}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$$

تست در مثلث زیر، طول ضلع BC کدام است؟



$$(1) \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$(2) 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$(3) \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$(4) 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

۴ ابتدا با استفاده از قضیه سینوس ها اندازه ضلع AC را پیدا می کنیم:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$$

حال ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می کنیم و اندازه ضلع BC را به دست می آوریم:



$$BC = BH + CH = 4 \cos 45^\circ + 4\sqrt{2} \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow BC = (4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) + (4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

تست در شکل مقابل، یک بالن توسط

دو طناب به زمین بسته شده است. زاویه بین طناب ۱۵ متری با زمین 55° است. طول طناب دوم چقدر است؟ $(\sin 55^\circ \approx 0.8)$



$$(1) 2\sqrt{2}$$

$$(2) 4\sqrt{2}$$

$$(3) 12\sqrt{2}$$

$$(4) 16\sqrt{2}$$

تست مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ارتفاع $6\sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $72\sqrt{3}$ (۲) $36\sqrt{3}$ (۳) $18\sqrt{3}$ (۴) $27\sqrt{3}$

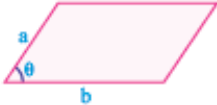
۲ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؛ پس:

$$a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 12 \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

مساحت متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع، با معلوم بودن دو ضلع یا دو قطر و زاویه بین آن‌ها مساحت به روش‌های زیر قابل محاسبه است:

۱ اگر طول دو ضلع متوازی الاضلاع، a ، b و زاویه بین آن‌ها θ باشد، مساحت برابر است با:



$$\Rightarrow S = ab \sin \theta$$

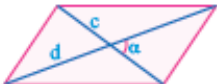
تست اگر مساحت متوازی الاضلاع زیر برابر ۹ باشد، طول ضلع بزرگ آن کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

$$S = ab \sin \theta \xrightarrow{S=9, \theta=135^\circ} 9 = (3)(b) \sin 135^\circ$$

$$\xrightarrow{\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}} 9 = (3)(b) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow b = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

۲ اگر طول دو قطر متوازی الاضلاع d ، c و زاویه بین آن‌ها α باشد، مساحت متوازی الاضلاع برابر است با:



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}cd \sin \alpha$$

تست در متوازی الاضلاع دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه بین دو قطر 135° درجه است. مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

(داخل - ۹۲)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۲ می‌دانیم اگر طول دو قطر متوازی الاضلاع a و b و زاویه بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی الاضلاع از رابطه $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ به دست می‌آید؛ پس:

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 135^\circ = 48 \sin (180^\circ - 45^\circ) = 48 \sin 45^\circ = 48 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$$

تذکر مربع، مستطیل و لوزی هم از این دو رابطه پیروی می‌کنند، چون نوعی متوازی الاضلاع هستند.

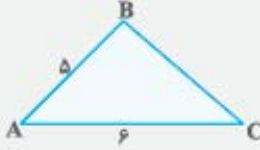
مساحت مثلث

اگر در یک مثلث مطابق شکل اندازه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها مشخص باشد، مساحت این مثلث به صورت زیر قابل محاسبه است:



$$S = \frac{1}{2}a \times h = \frac{1}{2}a \times b \sin \theta \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

تست در شکل زیر $\sin \hat{A} = 0.8$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- 
- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times 0.8 = 12$$

تست مساحت مثلث متساوی الساقین مقابل کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $9\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$



۲ چون مثلث متساوی الساقین است، پس:

از طرفی می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی در هر مثلث برابر 180° است؛ پس:

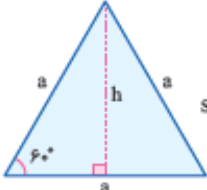
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 67.5^\circ + 67.5^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{A} + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

حال مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 45^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

در هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، ارتفاع مثلث به صورت زیر قابل محاسبه است:

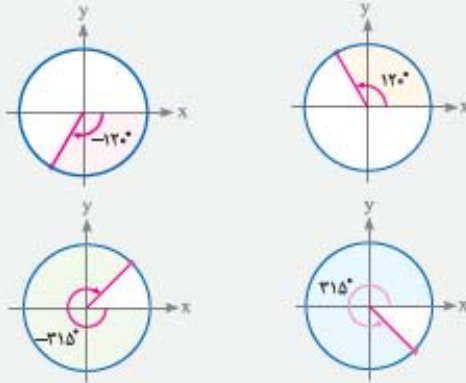


$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

بنابراین مساحت مثلث به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

مثال موقعیت زاویه‌های $12^\circ, 12^\circ, -315^\circ, 315^\circ$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید.



تست انتهای زاویه‌های ۲ و ۶ رادیان به ترتیب در کدام ربع مثلثاتی قرار دارند؟

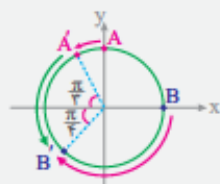
۱) دوم - اول
۲) سوم - دوم
۳) دوم - چهارم
۴) سوم - اول

۳ می‌دانیم هر رادیان تقریباً معادل 57° است؛ پس ۲ رادیان $114^\circ = 2 \times 57^\circ$ و ۶ رادیان $342^\circ = 6 \times 57^\circ$ است؛ یعنی انتهای زاویه‌های ۲ و ۶ رادیان به ترتیب در ربع دوم و چهارم دایره مثلثاتی قرار دارند.

تست نقطه $A(0, 1)$ را روی دایره مثلثاتی به اندازه $\frac{\pi}{6}$ در جهت مثبت مثلثاتی حرکت می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. سپس نقطه $B(1, 0)$ را نیز روی همین دایره مثلثاتی به اندازه $\frac{3\pi}{4}$ در خلاف جهت مثلثاتی حرکت می‌دهیم تا به نقطه B' برسیم برای رسیدن از نقطه A' به نقطه B' باید روی دایره مثلثاتی چقدر حرکت کنیم؟

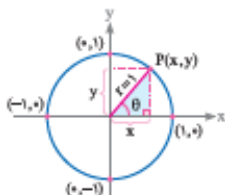
۱) $\frac{5\pi}{6}$ در خلاف جهت مثلثاتی ۲) $\frac{5\pi}{6}$ در جهت مثبت مثلثاتی
۳) $\frac{7\pi}{12}$ در خلاف جهت مثلثاتی ۴) $\frac{7\pi}{12}$ در جهت مثبت مثلثاتی

۴ مطابق دایره مثلثاتی مقابل برای رسیدن از نقطه A' به نقطه B' باید به اندازه $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کنیم.



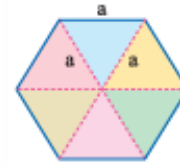
ویژگی نقطه‌های روی دایره مثلثاتی

۱ با توجه به شکل زیر طول هر نقطه روی دایره مثلثاتی، برابر $\cos \theta$ و عرض آن برابر $\sin \theta$ است؛
 $P(\cos \theta, \sin \theta)$
۲ با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث رنگ شده برای هر نقطه $y^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ خواهیم داشت؛ $P(x, y)$



مساحت شش ضلعی منتظم

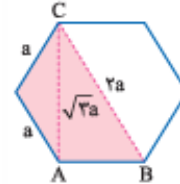
هر شش ضلعی منتظم مطابق شکل از ۶ مثلث متساوی الاضلاع به هم چسبیده تشکیل شده است؛



۱ مقدار مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a ، برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a است؛

$$S_6 = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$

۲ طول قطرهای بزرگ شش ضلعی منتظم (مثلاً BC)، و طول قطرهای کوچک (مثلاً AC) برابر است با؛



$$BC = 2a$$

$$AC = \sqrt{3}a$$

مثال اگر کوچک‌ترین قطر یک شش ضلعی برابر $\frac{6}{\sqrt{12}}$ باشد. مساحت آن چند است؟

کوچک‌ترین قطر $\sqrt{3}a$ است.
 $\sqrt{3}a = \frac{6}{\sqrt{12}} \Rightarrow a = \frac{6}{6} = 1$
مساحت یک شش ضلعی $a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) 6$ است که با توجه به اینکه $a = 1$ داریم؛
 $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

تست درون یک دایره به شعاع ۲، یک شش ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



$$4\pi - 4\sqrt{3} \quad (2) \quad \pi - \sqrt{3} \quad (1)$$

$$4\pi - 6\sqrt{3} \quad (4) \quad 2\pi - \sqrt{3} \quad (3)$$

۴ شعاع دایره برابر طول ضلع شش ضلعی است، پس؛

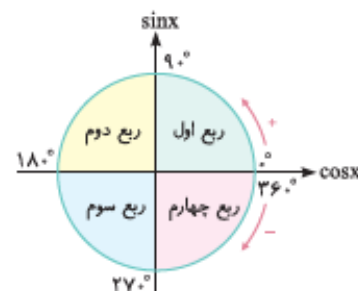


$$S = S_{\text{circle}} - S_{\text{hexagon}} = \pi r^2 - 6 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \pi(2)^2 - 6 \times \frac{(2)^2 \sqrt{3}}{4} = 4\pi - 6\sqrt{3}$$

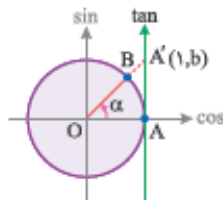
دایره مثلثاتی

دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبدأ مختصات را دایره مثلثاتی می‌گوییم. این دایره از چهار ربع مثلثاتی تشکیل شده که هر ربع آن معادل با 90° است. جهت حرکت مثبت در این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.



تانژانت و ویژگی آن

محور تانژانت همان خط $x=1$ است که بر دایره مثلثاتی، مماس شده است. برای پیدا کردن تانژانت زاویه α ، شعاع OB را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را قطع کند. تانژانت زاویه α برابر b است.

تست در دایره مثلثاتی مقابل $\tan \theta$ کدام است؟

- OA (۱)
CH (۲)
AB (۳)
OH (۴)

۳ چون امتداد ضلع زاویه θ محور تانژانت را در B قطع کرده است،
 $\tan \theta = AB$ پس:

تعیین محدوده نسبت‌های مثلثاتی

با توجه به دایره مثلثاتی، مقادیر سینوس و کسینوس هر زاویه دلخواه، همواره در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد.

مثال محدوده عبارت $A = 2 + 3 \sin x$ را تعیین کنید.

می‌دانیم $\sin x$ در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد، پس:
 $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2 + 3 \sin x \leq 5$
 $\Rightarrow -1 \leq A \leq 5$

تست کم‌ترین مقدار $A = \cos^2 x + 2 \cos x - 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۴ ابتدا A را ساده‌تر می‌نویسیم.

$$A = \cos^2 x + 2 \cos x + 1 - 4 = (\cos x + 1)^2 - 4$$

می‌دانیم $\cos x$ در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد، پس:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq (\cos x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq (\cos x + 1)^2 - 4 \leq 0$$

در برخی سؤالات حدود زاویه داده می‌شود و از ما حدود یکی از نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن زاویه را می‌خواهند. در این سؤالات باید ابتدا محدوده زاویه را روی دایره مثلثاتی مشخص کنیم و سپس محدوده نسبت مثلثاتی خواسته شده را به دست آوریم.

تست در دایره مثلثاتی مقابل اگر

$\tan \theta = -2$ باشد، مختصات نقطه P کدام است؟



- (۱) $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ (۲) $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ (۳) $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ (۴) $(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$

۲ نقطه P روی دایره مثلثاتی است و اگر مختصات نقطه P به صورت (x, y) باشد، داریم:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad \tan \theta = -2 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2 \Rightarrow \sin \theta = -2 \cos \theta \Rightarrow y = -2x$$

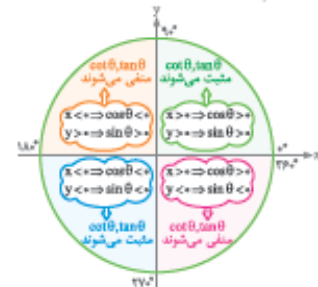
$$\Rightarrow x^2 + (-2x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

چون نقطه P در ربع دوم مثلثاتی است، پس x منفی بوده و داریم:

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = -2x = -2(-\frac{\sqrt{5}}{5}) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow P(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه‌های مختلف را می‌توان مطابق شکل زیر مرتب و دسته‌بندی کرد:



به اختصار می‌توان علامت نسبت‌های مثبت هر ربع مثلثاتی را این‌گونه به خاطر سپرد [دقت کنید که هرگاه تانژانت مثبت است، کتانژانت هم مثبت است]:



همه در ربع اول مثبت

سینوس در ربع دوم مثبت

تانژانت (و کتانژانت) در ربع سوم مثبت

کسینوس در ربع چهارم مثبت

تست علامت چه تعداد از نسبت‌های مثلثاتی زیر مثبت است؟

الف) $\sin 15^\circ$ (ب) $\cos 56^\circ$ (پ) $\tan 342^\circ$

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲ به بررسی عبارات می‌پردازیم:

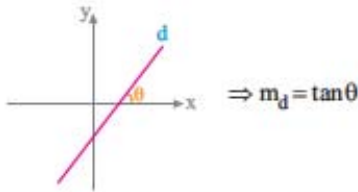
الف) چون 15° در ربع دوم قرار دارد، پس $\sin 15^\circ > 0$ است.

ب) چون $56^\circ = 360^\circ + 2^\circ$ در ربع سوم قرار دارد پس $\cos 56^\circ < 0$ است.

پ) چون 342° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\tan 342^\circ < 0$ است.

تانژانت و شیب خط

تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، برابر شیب خط است:



در صورت داشتن نقطه A از خط d ، معادله خط به صورت زیر به دست می آید:
 $(y - y_A) = \tan \theta (x - x_A)$

تست با توجه به شکل مقابل، معادله خط d کدام است؟



۳ خط d با جهت مثبت محور x زاویه 45° می سازد، پس شیب آن برابر است با:
 در ضمن عرض از مبدأ خط برابر ۲ است، پس معادله آن به صورت $y = x + 2$ است.

تست کدام یک از خط‌های زیر با جهت مثبت محور x ها زاویه 135° می سازد و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است؟

$$\begin{aligned} x+y=2 \quad (1) \quad x-y=2 \quad (2) \\ x+y=-2 \quad (3) \quad y-x=2 \quad (4) \end{aligned}$$

۲ می دانیم اگر خط با جهت مثبت محور x ها زاویه θ بسازد، آنگاه شیب خط برابر $\tan \theta$ است؛ پس:

$$\theta = 135^\circ \Rightarrow \tan \theta = -1 \Rightarrow m = -1$$

در ضمن چون عرض از مبدأ خط برابر ۲ است، پس معادله خط به صورت مقابل خواهد بود:

$$y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 2$$

تست عرض از مبدأ خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° می سازد و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می کند، کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1) \quad -\sqrt{3} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3) \quad \sqrt{3} \quad (4)$$

۴ شیب خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° می سازد، برابر است با:

$$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

در ضمن خط محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می کند، پس معادله خط به صورت زیر است:

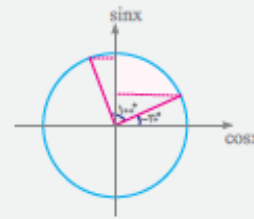
$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

با قرار دادن $x = 0$ در معادله خط عرض از مبدأ را به دست می آوریم:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال اگر $15^\circ < x < 50^\circ$ ، $\sin 2x = \frac{m-1}{2}$ باشد، حدود m را به دست آورید.

چون $15^\circ < x < 50^\circ$ است، پس $30^\circ < 2x < 100^\circ$ است.



با توجه به دایره مثلثاتی مقابل $\sin 2x$ در بازه $(\frac{1}{2}, 1]$ قرار دارد،

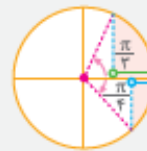
بنابراین:

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

تست اگر $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\cos 2x = \frac{m+1}{2}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

$$\begin{aligned} (0, 1] \quad (1) \quad (\sqrt{2}-1, 1] \quad (2) \\ [-\sqrt{2}, 1) \quad (3) \quad [-1, 0) \quad (4) \end{aligned}$$

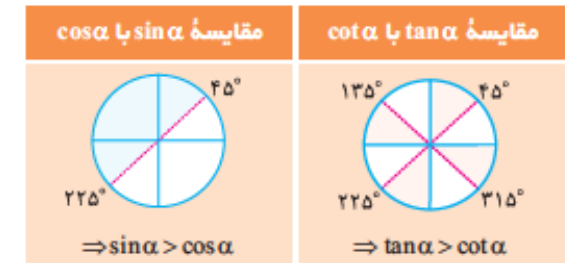
۲ از آنجایی که $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{6}$ است، پس $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{3}$ می باشد؛ بنابراین محدوده $2x$ بر روی دایره مثلثاتی به صورت مقابل است:



$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} < \cos 2x \leq \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m+1}{2} \leq 1 \\ \Rightarrow 1 < m+1 \leq 2 \Rightarrow 0 < m \leq 1 \end{aligned}$$

مقایسه مقدار نسبت‌ها

برای مقایسه $\sin \alpha$ با $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ با $\cot \alpha$ از دایره‌های مثلثاتی زیر کمک می گیریم. اگر انتهای کمان α در ناحیه‌های رنگ شده باشد، آنگاه:



تست اگر $\tan \theta > \cot \theta$ و انتهای کمان θ در ناحیه اول مثلثاتی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$$\begin{aligned} \sin \theta > \tan \theta \quad (1) \quad \cos \theta < \sin \theta \quad (2) \\ \cos \theta > \tan \theta \quad (3) \quad \sin \theta < \cos \theta \quad (4) \end{aligned}$$

۱ از آنجایی که θ در ناحیه اول مثلثاتی بوده و $\tan \theta > \cot \theta$ است، پس θ در ناحیه رنگی زیر است:
 در این ناحیه رنگی $\sin \theta > \cos \theta$ است.



درس اتحادها و روابط مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی

مجموع مربعات سینوس و کسینوس هر زاویه دلخواه برابر ۱ است:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

نتیجه‌های رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

۱ اگر $\sin^2 \alpha$ را به سمت راست تساوی منتقل کنیم، مقدار $\cos^2 \alpha$ به دست می‌آید:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

۲ اگر $\cos^2 \alpha$ را به سمت راست تساوی منتقل کنیم، مقدار $\sin^2 \alpha$ به دست می‌آید:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

۳ اگر طرفین این اتحاد را بر $\sin^2 \alpha$ تقسیم کنیم، داریم:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۴ اگر طرفین این اتحاد را بر $\cos^2 \alpha$ تقسیم کنیم، داریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

در سؤالاتی که $1 + \tan^2 \alpha$ ، $1 + \cot^2 \alpha$ ، $1 - \cos^2 \alpha$ ، $1 - \sin^2 \alpha$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارند، برای حل، بهتر است به جای آن‌ها معادلاتشان را قرار دهیم تا بتوانیم آن‌ها را از زیر رادیکال خارج کنیم.

مثال اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (1 - \sqrt{1 - \cos^2 x})$ را به دست آورید.

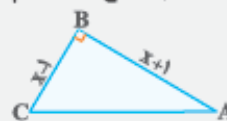
$$\sqrt{1 + \tan^2 x} (1 - \sqrt{1 - \cos^2 x}) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot (1 - \sqrt{\sin^2 x})$$

$$= \frac{1}{|\cos x|} (1 - |\sin x|)$$

در $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ یعنی ربع دوم، $\sin x$ مثبت و $\cos x$ منفی است، پس:

$$\frac{1}{|\cos x|} (1 - |\sin x|) = \frac{1}{-\cos x} (1 - \sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \tan x - \frac{1}{\cos x}$$

تست در مثلث مقابل، اگر $\cos \hat{A} = \frac{4}{5}$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



۳ ابتدا با مشخص بودن $\tan A$ ، $\cos A$ را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \tan^2 A \Rightarrow \tan^2 A = \frac{1}{(\frac{4}{5})^2} - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \tan A = \pm \frac{3}{4} \text{ (مقدار منفی قابل قبول نیست)} \Rightarrow \tan A = \frac{3}{4}$$

در مثلث ABC داریم:

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow 3x+3 = 4x-4 \Rightarrow x=7$$

طول ضلع BC برابر با $x-1$ است؛ پس برابر است با:

$$x-1=7-1=6$$

تست اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{(\frac{1}{\cos x} - 1)(\frac{1}{\cos x} + 1)}$ کدام است؟

$$1) \tan \alpha \quad 2) -\tan \alpha \quad 3) \cot \alpha \quad 4) -\cot \alpha$$

۲ عبارت زیر رادیکال را با اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{(\frac{1}{\cos x} - 1)(\frac{1}{\cos x} + 1)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = (\tan^2 x + 1) - 1$$

$$= \sqrt{\tan^2 x} = |\tan \alpha| = -\tan \alpha$$

در $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ یعنی ربع دوم، $\tan \alpha$ منفی است.

تست ساده‌شده عبارت $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta)$ کدام است؟

$$1) \sin \theta \quad 2) \cos \theta \quad 3) \sin^2 \theta \quad 4) \cos^2 \theta$$

۲ به جای $\tan \theta$ می‌نویسیم $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$:

$$(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = (\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta})(1 - \sin \theta)$$

$$= (\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta})(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta$$

میانبر با قرار دادن زاویه دلخواه $\theta = \frac{\pi}{3}$ داریم:

$$(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} + \tan \frac{\pi}{3})(1 - \sin \frac{\pi}{3}) = (2 + \sqrt{3})(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$$

در میان گزینه‌ها فقط $\cos \theta$ به ازای $\theta = \frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

تعیین نسبت‌های مثلثاتی از روی یک نسبت

اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای مشخص باشد، می‌توانیم بدون استفاده از روابط مثلثاتی مقدار بقیه نسبت‌های مثلثاتی زاویه را به ترتیب زیر مشخص کنیم:

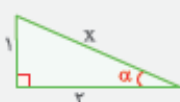
۱ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم و با توجه به نسبت مثلثاتی داده‌شده،

طول ۲ ضلع مثلث را مشخص می‌کنیم.

۲ با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول ضلع سوم را تعیین می‌کنیم.

۳ مقدار سایر نسبت‌های مثلثاتی را تعیین می‌کنیم و با توجه به موقعیت زاویه، علامت هر نسبت مثلثاتی را مشخص می‌کنیم.

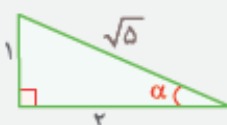
مثال اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ باشد، مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را به دست آورید.



$$\Rightarrow x^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

چون α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار دارد،

پس سینوس و کسینوس منفی هستند:



$$\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$



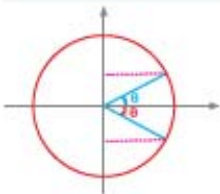
اگر مجموع دو زاویه برابر 180° باشد، آن دو زاویه را مکمل یکدیگر می‌نامند. بنابراین دو زاویه θ و $\pi - \theta$ مکمل یکدیگر هستند:

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه مکمل θ و $\pi - \theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\sin 15^\circ = \sin 3^\circ$	$\cos 17^\circ = -\cos 1^\circ$
$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$
$\tan 10^\circ = -\tan 8^\circ$	$\cot 14^\circ = -\cot 4^\circ$

مثال اگر $\sin 10^\circ = A$ باشد، مقدار $\cos 10^\circ$ را محاسبه کنید.

می‌دانیم $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$ است چون 10° و 80° متکم هم هستند از طرفی:



زاویه θ - قرینه زاویه θ است. مطابق شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ - به صورت زیر است:

نسبت‌های مثلثاتی زاویه منفی

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\sin(-3^\circ) = -\sin 3^\circ$	$\cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$
$\tan(-45^\circ) = -\tan(45^\circ)$	$\cot(-2^\circ) = -\cot 2^\circ$

نسبت‌های مثلثاتی $\pi \pm \theta$ و $\frac{\pi}{2} \pm \theta$

برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که به مضارب صحیح π نزدیک هستند [یعنی زوایای $k\pi \pm \theta$]، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1 ابتدا باید مشخص کنیم زاویه در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد و علامت نسبت مثلثاتی در آن ربع را تعیین کنیم و در طرف دوم پشت نسبت جدید قرار دهیم.

2 سپس $k\pi$ را حذف می‌کنیم.

$$\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = +\sin \frac{\pi}{3} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تذکر در محاسبه همه نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم مضارب زوج π (مانند $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots$) را حذف کنیم.

$$\tan(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\sin(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(2\pi + \pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = +\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

تذکر در محاسبه تانژانت و کتانژانت، مضارب فرد π (مانند $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$) نیز قابل حذف است.

$$\tan(3\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

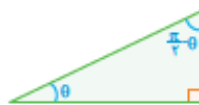
تست اگر $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ، $\cos \alpha < 0$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$(1) -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2) \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4) \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3 چون $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$ است، پس α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی قرار دارد و $\tan \alpha$ منفی است، بنابراین با توجه به این که

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x^2 + (\sqrt{2})^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = -\sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم و مکمل



در صورتی که مجموع دو زاویه برابر 90° باشد، آن دو زاویه را متمم یکدیگر می‌نامند. بنابراین دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$ متمم یکدیگر هستند:

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$
$\sin 6^\circ = \cos 3^\circ$	$\cos 10^\circ = \sin 8^\circ$
$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$
$\tan 4^\circ = \cot 5^\circ$	$\cot 2^\circ = \tan 7^\circ$

مثال اگر $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{5\pi}{6} - x)$ را به دست آورید.

چون مجموع دو زاویه $x + \frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} - x$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است، پس این دو زاویه، متمم یکدیگرند. بنابراین:

$$\cos(\frac{5\pi}{6} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}$$

تست اگر $\tan(\alpha + 2^\circ) = 2$ باشد، مقدار $\tan(70^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) 2 \quad (3) -\frac{1}{2} \quad (4) -2$$

1 چون مجموع زوایای $(\alpha + 2^\circ)$ و $(70^\circ - \alpha)$ ، 90° درجه است، پس این دو زاویه متمم‌اند و داریم:

$$\begin{aligned} 1) \tan(70^\circ - \alpha) &= \cot(\alpha + 2^\circ) \\ 2) \cot(\alpha + 2^\circ) &= \frac{1}{\tan(\alpha + 2^\circ)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan(70^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

تست حاصل عبارت $\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) \frac{2}{3} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) 2$$

1 دو زاویه $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ متمم‌اند، چون:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{8\pi + 9\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} = \pi$$

بنابراین به جای $\sin^2 \frac{2\pi}{3}$ معادل آن یعنی $\cos^2 \frac{3\pi}{4}$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} = \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{3\pi}{4} = 1$$

تست حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ کدام است؟

$$\frac{16}{9} \quad (4) \quad \frac{9}{16} \quad (3) \quad -\frac{9}{16} \quad (2) \quad -\frac{16}{9} \quad (1)$$

1 در هر یک از روابط مثلثاتی داده شده، زاویه ها را به شکلی می نویسیم که زاویه 15° ایجاد شود:

$$\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(360^\circ + 180^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

حال صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم تا $\tan 15^\circ$ ایجاد شود:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = -\frac{16}{9}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 2α

سینوس و کسینوس زاویه 2α از روابط زیر محاسبه می شود:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

روابط فرعی 2α

1 اگر در رابطه $\cos 2\alpha$ به جای $\cos^2 \alpha$ بنویسیم $1 - \sin^2 \alpha$ رابطه $1 - \sin^2 \alpha$ را به دست می آید:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

2 اگر در رابطه $\cos 2\alpha$ به جای $\sin^2 \alpha$ بنویسیم $1 - \cos^2 \alpha$ رابطه $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ را به دست می آید:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

3 اگر طرفین رابطه $\sin 2\alpha$ را بر 2 تقسیم کنیم، حاصل ضرب $\sin \alpha$ در $\cos \alpha$ به دست می آید:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

مثال اگر α زاویه ای حاده و $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{3} + 2\alpha)$ کدام است؟

$$\cos(\frac{\pi}{3} + 2\alpha) = \cos \frac{\pi}{3} \cos 2\alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2\alpha$$

بنابراین باید $\cos \alpha$ را به دست آوریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$-\sin 2\alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -2(\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

تست حاصل عبارت $\frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$ کدام است؟

$$-2\sqrt{3} \quad (4) \quad -\sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{3} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (1)$$

2 در صورت کسر از رابطه $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و در مخرج کسر از رابطه $\frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$ استفاده می کنیم:

$$\frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{2 \cot 30^\circ}{1} = 2\sqrt{3}$$

در کمان هایی که به شکل $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ هستند، اگر k عددی فرد باشد، علاوه بر امکان تغییر علامت، جنس نسبت های مثلثاتی نیز تغییر می کند. بنابراین برای محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه هایی که به مضارب فرد $\frac{\pi}{p}$ نزدیک هستند، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

1 ابتدا باید مشخص کنیم زاویه در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد و علامت نسبت مثلثاتی را در آن ربع، تعیین کنیم و در طرف دوم پشت نسبت جدید قرار می دهیم.

2 سپس مضارب فرد $\frac{\pi}{p}$ را حذف کرده و نسبت مثلثاتی سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تبدیل می کنیم (و بالعکس).

$$\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{13\pi}{12} = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تست حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\tan(10\pi + \frac{\pi}{6}) \cot(2\pi + \frac{\pi}{6}) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{6}) \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$$

$$\frac{1}{4} \quad (4) \quad \frac{3}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

2

$$\tan(10\pi + \frac{\pi}{6}) \cot(2\pi + \frac{\pi}{6}) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{6}) \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$$

$$= \tan \frac{\pi}{6} \times \cot \frac{\pi}{6} + \cos(-\frac{\pi}{6}) \times -\cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

تست اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (خارج-98)

$$\sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{4})$$

$$0.48 \quad (4) \quad 0.27 \quad (3) \quad -0.52 \quad (2) \quad -1.23 \quad (1)$$

3 ابتدا هریک از نسبت های مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = \cos(2\pi + \frac{3\pi}{4} - \alpha) = \cos(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\tan(\alpha - \frac{3\pi}{4}) = -\tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = -(-\cot \alpha) = \cot \alpha$$

حال با توجه به این که $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان در ربع سوم است، داریم:



فیثاغورس $x = 5$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$(\cos \alpha)(\sin \alpha) - (-\cot \alpha) = (-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100}$$

تست اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) 2
(۳) $4 - \sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$

۲

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 2$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α بر حسب $\tan \alpha$

با کمک روابط زیر می‌توانیم مقادیر $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\tan 2x$ را با داشتن $\tan x$ به دست آوریم:

محاسبه روابط 2α بر حسب $\tan \alpha$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال اگر $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ را به دست آورید.

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2(-\frac{3}{4})}{1 + (-\frac{3}{4})^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = -\frac{12}{25}$$

تست اگر $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = -3$ باشد، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

$$\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = -3 \Rightarrow 1 + \tan \theta = -3 + 3 \tan \theta$$

۴

$$\Rightarrow 2 \tan \theta = 4 \Rightarrow \tan \theta = 2$$

حال با استفاده از رابطه $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ داریم:

$$\sin 2\theta = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

تست اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan 2x = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\cot x$ کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) 3 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3/2$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 - 3 \tan^2 x = 4 \tan x$$

۲

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x + 4 \tan x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{3} \checkmark \\ \tan x = -3 \times \end{cases}$$

چون $0 < x < \frac{\pi}{4}$ پس $\tan x$ مثبت است و $\tan x = \frac{1}{3}$ قابل قبول

است؛ بنابراین $\cot x = 3$ است.

تست حاصل $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳ ابتدا با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را باز می‌کنیم و سپس از رابطه $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} &= (\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8})(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}) \\ &= \cos(\frac{\pi}{4}) \times 1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

تست حاصل $\sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۳

$$\sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

در بعضی سؤالات، ممکن است با ضرب کسینوس چند زاویه در هم مواجه شویم به‌طوری که زاویه‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ داده باشند. برای به‌دست آوردن حاصل این عبارت‌ها، بهترین روش این است که عبارت را در سینوس کوچک‌ترین زاویه، ضرب و تقسیم کنیم و چندین بار از فرمول $\sin 2\alpha$ استفاده کنیم تا عبارت ساده شود. مثلاً برای ساده کردن عبارت $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ ، آن را در $\sin 10^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ &= \frac{1}{\sin 10^\circ} \times \underbrace{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}_{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} \times \cos 20^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{2 \sin 10^\circ} \times \underbrace{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}_{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} \times \cos 40^\circ = \frac{1}{4 \sin 10^\circ} \times \sin 40^\circ \\ &= \frac{1}{4 \sin 10^\circ} \times \cos 10^\circ = \frac{1}{4} \cot 10^\circ \end{aligned}$$

فرمول‌های طلایی

با استفاده از رابطه‌های بسیار کاربردی و مهم زیر می‌توانیم $\cos^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha$ را بر حسب کمان 2α بنویسیم. این روابط به فرمول‌های طلایی معروف هستند:

فرمول‌های طلایی

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

مثال مقدار $\cos 15^\circ$ را به دست آورید.

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

تست حاصل $\cot^2 \frac{\pi}{8} - \tan^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $-2\sqrt{2}$ (۴) $-4\sqrt{2}$

۲

$$\begin{aligned} \cot^2 \frac{\pi}{8} - \tan^2 \frac{\pi}{8} &= (\cot \frac{\pi}{8} - \tan \frac{\pi}{8})(\cot \frac{\pi}{8} + \tan \frac{\pi}{8}) \\ &= 2 \cot \frac{\pi}{8} \times \frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \times 1 \times \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

تست اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار $\tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳ ابتدا طرفین تساوی $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{3} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

حال با کمک اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ داریم:

$$\begin{aligned} \tan^2 x + \cot^2 x &= (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x \\ &= \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{-\frac{2}{3}}\right)^2 - 2 = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7 \end{aligned}$$

اتحادهای $\sin^n x + \cos^n x$

روابط $\sin^2 x + \cos^2 x$ و $\sin^4 x + \cos^4 x$ به صورت زیر هستند:

روابط $\sin^4 x + \cos^4 x$ و $\sin^6 x + \cos^6 x$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2$$

مثال اگر $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta$ را به دست آورید.

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

تست حاصل $\sin^6 75^\circ + \cos^6 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{5}{16}$ (۳) $\frac{13}{16}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۱ می‌دانیم $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2$ پس:

$$\begin{aligned} \sin^6 75^\circ + \cos^6 75^\circ &= 1 - 2(\underbrace{\sin 75^\circ \cos 75^\circ}_{\frac{1}{2} \sin 150^\circ})^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

کسینوس $\pm$ سینوس و کتانژانت $\pm$ تانژانت

در سؤالاتی که در آن‌ها جمع یا تفریق سینوس و کسینوس وجود دارد، می‌توانیم با به توان ۲ رساندن طرفین عبارت داده شده، برای ایجاد رابطه $\sin 2x$ اقدام به حل مسئله کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

مثال اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\sin 2x$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{25} \\ \Rightarrow 2 \sin x \cos x &= -\frac{16}{25} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{16}{25} \end{aligned}$$

تست اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $-\frac{4}{9}$ (۴) $-\frac{5}{9}$

۲ می‌دانیم $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$ است. حال برای محاسبه $\sin 2\alpha$ طرفین رابطه $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9} \\ \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha &= \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{5}{9} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

تست اگر $\sin 2x = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\sin x - \cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۱ به کمک اتحاد $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$ داریم:

$$\begin{aligned} A = \sin x - \cos x &\Rightarrow A^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \\ \Rightarrow A^2 &= 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۱) پاسخ سؤال است.

روابط $\tan x + \cot x$ ، $\tan x - \cot x$ به صورت زیر است:

روابط $\cot x \pm \tan x$

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

تست حاصل $\cot 22/5^\circ - \tan 22/5^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) $2/5$

۳ با استفاده از رابطه $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ داریم:

$$\cot 22/5^\circ - \tan 22/5^\circ = 2 \cot 2(22/5^\circ) = 2 \cot 45^\circ = 2 \times 1 = 2$$

تست اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ چقدر است؟

$$\frac{13}{27} \quad (1) \quad \frac{13}{27} \quad (2) \quad \frac{13}{27} \quad (3) \quad \frac{13}{27} \quad (4)$$

۱ ابتدا طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم تا $\sin x \cos x$

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \sin x \cos x &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

با توجه به اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ داریم:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(3 \times -\frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

با کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت $\sin^3 x \pm \cos^3 x$ برابر است با:

$$\sin^3 x \pm \cos^3 x$$
 روابط

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

تذکر می‌توانیم به جای $\sin x \cos x$ بنویسیم $\frac{1}{2} \sin 2x$ و این روابط را برحسب $\sin 2x$ بنویسیم.

درس نمودار توابع مثلثاتی و توابع متناوب

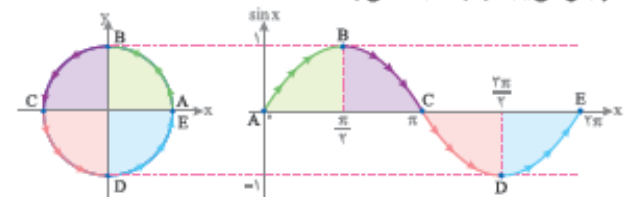
$$y = \cos x \text{ و } y = \sin x$$
 تابع

می‌خواهیم تغییرات تابع $f(x) = \sin x$ را در ۴ ناحیه مثلثاتی بررسی کنیم، با توجه به دایره مثلثاتی، با افزایش زاویه x :

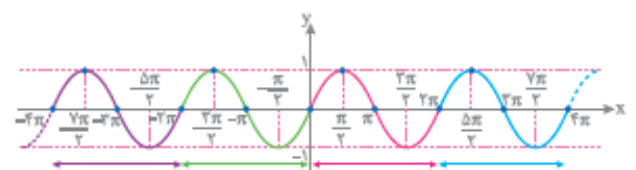
۱ در ناحیه اول، وقتی از نقطه A در جهت مثلثاتی (پاد ساعتگرد) شروع به حرکت می‌کنیم تا به نقطه B برسیم مقدار $\sin x$ از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
۲ در ناحیه دوم، وقتی از نقطه B به نقطه C می‌رویم، مقدار $\sin x$ از ۱ به ۰ صفر کاهش می‌یابد.

۳ در ناحیه سوم، وقتی از نقطه C به D می‌رویم، باز هم مقدار $\sin x$ کاهش می‌یابد و از ۰ به -۱ می‌رسد.

۴ در ناحیه چهارم وقتی از نقطه D به نقطه E می‌رویم، مقدار $\sin x$ افزایش می‌یابد و از -۱ به ۰ می‌رسد.



اضافه و کم کردن مضارب زوج π به کمان، مقدار سینوس را تغییر نمی‌دهد؛ یعنی $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ است که در این رابطه k عددی صحیح است. بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌هایی به طول 2π یعنی در بازه‌های $[-2\pi, 0]$ ، $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ و ... تکرار می‌شود. به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی نیز می‌گویند.



با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ داریم:

۱ دامنه تابع $y = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و بُرد آن $[-1, 1]$ است.

۲ مقدار $y = \sin x$ در نقاط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ یعنی $(\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ برابر ۱ و در نقاط $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ یعنی $(\frac{7\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ برابر -۱ است.

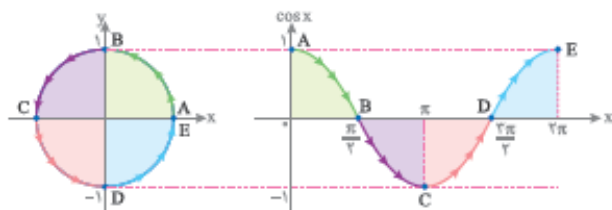
۳ نمودار $y = \sin x$ در نقاط $x = k\pi$ یعنی $(\pi, 0, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots)$ محور x ها را قطع می‌کند. [در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است].
می‌خواهیم نحوه تغییرات تابع $f(x) = \cos x$ را در ۴ ناحیه مثلثاتی بررسی کنیم، با توجه به دایره مثلثاتی، با افزایش زاویه x :

۱ در ناحیه اول، وقتی از نقطه A در جهت مثلثاتی (پاد ساعتگرد) شروع به حرکت می‌کنیم تا به نقطه B برسیم، با افزایش زاویه x ، مقدار $\cos x$ از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.

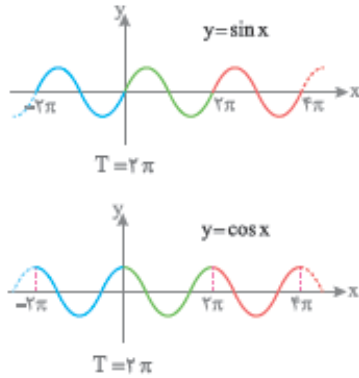
۲ در ناحیه دوم، وقتی از نقطه B به نقطه C می‌رویم، با افزایش زاویه x ، مقدار $\cos x$ از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.

۳ در ناحیه سوم، وقتی از نقطه C به نقطه D می‌رویم، مقدار $\cos x$ افزایش می‌یابد و از -۱ به ۰ می‌رسد.

۴ در ناحیه چهارم، وقتی از نقطه D به نقطه E می‌رویم، مقدار $\cos x$ باز هم افزایش می‌یابد و از ۰ به ۱ می‌رسد.



اضافه و کم کردن مضارب زوج π به کمان، مقدار کسینوس را تغییر نمی‌دهد؛ یعنی $\cos(2k\pi + x) = \cos x$ است که در این رابطه k عددی صحیح است؛ بنابراین نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود. به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.



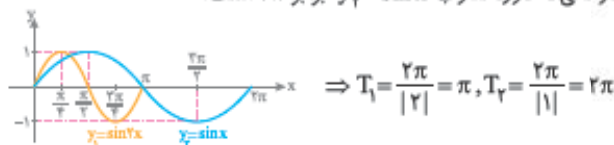
تست بخشی از نمودار تابع f به صورت زیر است. دوره تناوب این تابع کدام است؟



تذکر توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، متناوب نیستند. مثلاً، تابع $f(x) = x^2$ یک تابع اکیداً صعودی است، پس متناوب نیست.

دوره تناوب توابع مثلثاتی $y = k \sin(ax+b) + c$ و $y = k \cos(ax+b) + c$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر دوره تناوب توابع مثلثاتی فقط به ضریب x بستگی دارد. [یعنی فقط انبساط و انقباض افقی روی دوره تناوب تأثیر گذار است.]

مثلاً دوره تناوب تابع $y_1 = \sin 2x$ با توجه به نمودار زیر برابر π است. در حالی که دوره تناوب $y_2 = \sin x$ برابر 2π است.



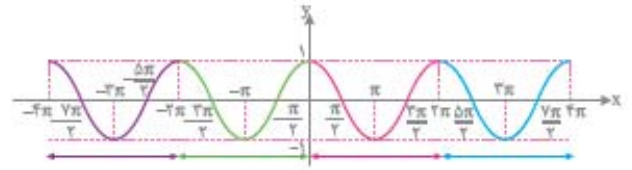
مثال دوره تناوب توابع زیر را به دست آورید.

$$y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = 5 \cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|-2|} = \pi$$

توابع مثلثاتی در صورتی متناوب هستند که توان x در کمان آن‌ها برابر با ۱ باشد.

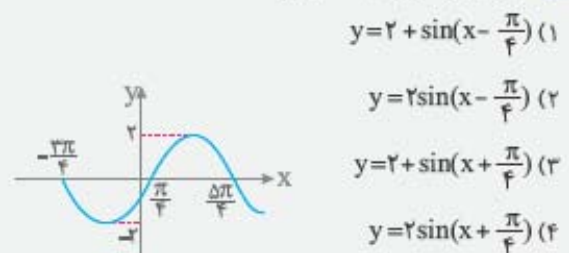
مثلاً توابع $y = \sin \frac{1}{x}$ ، $y = \cos x^2$ ، $y = \sin \sqrt{x}$ متناوب نیستند.



با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ داریم:

- ۱ دامنه تابع $y = \cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.
- ۲ مقدار تابع در مضارب زوج π یعنی $(\dots, -2\pi, 2\pi, 0)$ برابر ۱ است و مقدار تابع در مضارب فرد π یعنی $(\dots, -3\pi, 3\pi, -\pi, \pi)$ برابر -۱ است.
- ۳ نمودار $y = \cos x$ در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ یعنی $(\dots, \frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محور x ها را قطع می‌کند. [مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است.]

تست نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



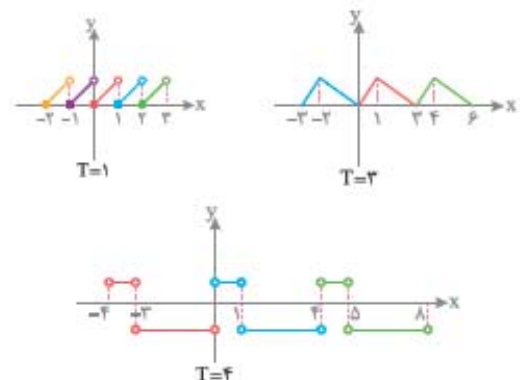
۲ نمودار تابع $y = \sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست منتقل شده، پس $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ خواهیم داشت. از طرفی چون بیشترین مقدار تابع برابر ۲ و کمترین مقدار آن -۲ است، پس معادله نمودار به صورت $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ است.

تابع متناوب

اگر نمودار تابع f در فاصله‌های مشخص و ثابت تکرار شود، آن تابع را متناوب می‌گویند. به کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع f در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب می‌گویند و آن را با T نشان می‌دهند. به عبارت دیگر در تابع متناوب f ، به کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت T که در شرایط زیر صدق کند، دوره تناوب می‌گویند:

$$x \in D_f, x \pm T \in D_f \Rightarrow f(x \pm T) = f(x)$$

مثلاً توابع زیر همگی متناوب هستند:



تست دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 2x|$ کدام است؟

$$\frac{2\pi}{3} \quad (1) \quad \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \pi \quad (4)$$

۲ چون $\sin 2x$ درون قدرمطلق قرار گرفته است، پس:

$$T = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی

بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با قرار دادن ۱ یا -۱ به جای سینوس و کسینوس به دست می‌آید؛ پس:

$$\max(y) = |a| + d \quad \min(y) = -|a| + d$$

مثال ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

$$y = -2 \cos x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |-2| + 3 = 5 \\ \min(y) = -|-2| + 3 = 1 \end{cases}$$

$$y = 4 \sin x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |4| - 1 = 3 \\ \min(y) = -|4| - 1 = -5 \end{cases}$$

تست مجموع مقادیر ماکزیمم و دوره تناوب تابع

$f(x) = \pi - 3 \sin(-x)$ کدام است؟

$$3 + \pi \quad (1) \quad 3 - \pi \quad (2) \quad 1 + 2\pi \quad (3) \quad 2 + \pi \quad (4)$$

۱ ابتدا ضابطه f را به صورت $f(x) = \pi + 3 \sin x$ بازنویسی می‌کنیم. حال در این تابع:

$$(1) \text{ دوره تناوب برابر است با: } T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

(۲) بیشترین مقدار تابع برابر است با: $\max(y) = \pi + 3(1) = \pi + 3$ پس مجموع این مقادیر برابر $2\pi + (\pi + 3) = 3\pi + 3$ است.

واضح است که مقدار d برابر میانگین مقدار ماکزیمم و مینیمم و مقدار $|a|$ برابر نصف تفاضل مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی فوق است:

$$d = \frac{\max(y) + \min(y)}{2} \quad |a| = \frac{\max(y) - \min(y)}{2}$$

مثال اگر در تابع مثلثاتی $y = a \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + d$ مقدار ماکزیمم

تابع برابر ۸ و مقدار مینیمم آن برابر -۲ باشد، مقدار $|a|$ و d را به دست آورید.

$$d = \frac{\max(y) + \min(y)}{2} = \frac{8 + (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$|a| = \frac{8 - (-2)}{2} = 5$$

تست دوره تناوب کدام تابع از بقیه بزرگتر است؟

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} x \quad (2) \quad y = \cos \pi x \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} x \quad (4) \quad y = 3 + \sin 2\pi x \quad (3)$$

۴ دوره تناوب توابع مثلثاتی $y = \sin(ax)$ و $y = \cos(ax)$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ به دست می‌آید. حال دوره تناوب هر یک از توابع را به دست می‌آوریم:

$$(1) T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

$$(2) T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = 6$$

$$(3) T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$$

$$(4) T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = 6$$

تذکر برای به دست آوردن دوره تناوب توابعی که از حاصل ضرب یا مجموع چند نسبت مثلثاتی تشکیل شده‌اند، ابتدا باید آن‌ها را به کمک روابط مثلثاتی ساده کنیم، سپس دوره تناوب تابع را به دست آوریم.

تست دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x \cos x$ کدام است؟

$$2\pi \quad (4) \quad \frac{2\pi}{3} \quad (3) \quad \pi \quad (2) \quad \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

۲ با استفاده از رابطه $\frac{1}{2} \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ ضابطه تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

تست دوره تناوب تابع $f(x) = 1 - \cos^2 3x$ کدام است؟

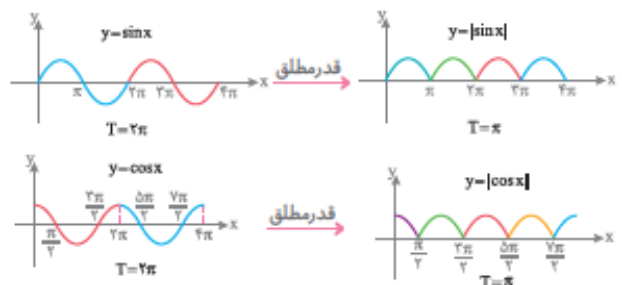
$$\frac{2\pi}{3} \quad (4) \quad \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad 2\pi \quad (1)$$

۳ با استفاده از فرمول طلایی، ضابطه f را ساده می‌کنیم:

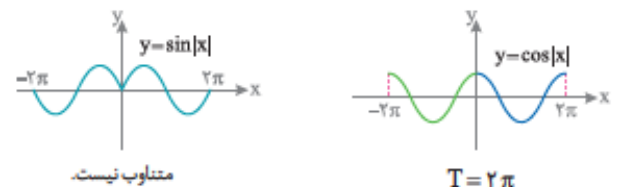
$$f(x) = 1 - \cos^2 3x = \sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$$

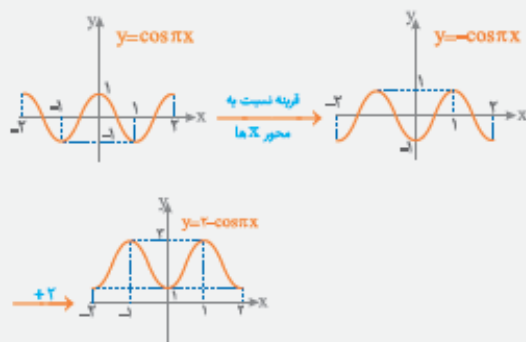
اگر در یک تابع مثلثاتی، $\sin x$ و $\cos x$ درون قدر مطلق قرار گیرند، دوره تناوب نصف و برابر $T = \pi$ می‌شود.



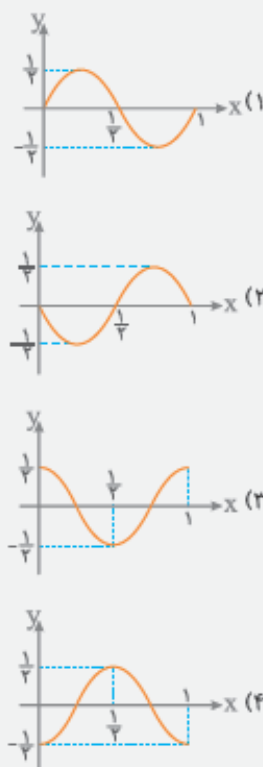
تابع $y = \sin|x|$ متناوب نیست، اما تابع $y = \cos|x|$ متناوب بوده و دوره تناوب آن برابر با $T = 2\pi$ است.



سپس با قواعد انتقال نمودار آن را رسم می‌کنیم:



تست نمودار تابع $y = \sin \pi x \cos \pi x$ کدام است؟



1 ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \sin \pi x \cos \pi x = \frac{1}{2} \sin 2\pi x$$

دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$ است؛ پس:

$$y = \sin 2\pi x$$

$$y = \frac{1}{2} \sin 2\pi x$$



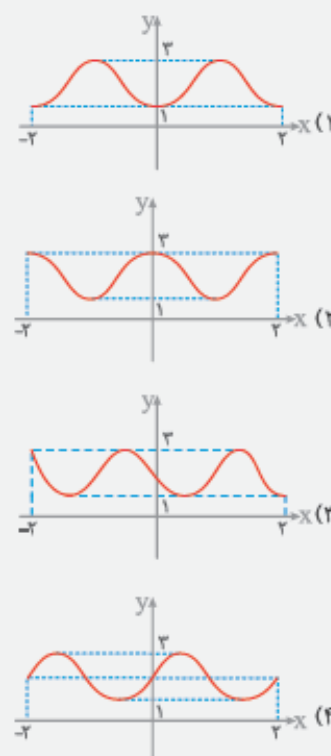
مهم‌ترین سوالات این بخش، پیدا کردن پارامترهای مجهول در ضابطه تابع است. به سؤالات بعدی دقت کنید.

جهت حرکت نمودار تابع‌های $y = a \cos(bx+c)+d$ و $y = a \sin(bx+c)+d$ با شرط $0 \leq c < \frac{\pi}{b}$ در شروع رسم از $x=0$ به صورت زیر است:

نمودار $y = a \sin(bx+c)+d$	
علامت a و b یکسان	علامت a و b متفاوت
در شروع از $x=0$ به بالا می‌رود. [شبه $y = \sin x$]	در شروع از $x=0$ به پایین می‌رود. [شبه $y = -\sin x$]

نمودار $y = a \cos(bx+c)+d$	
علامت a مثبت	علامت a منفی
در شروع از $x=0$ به پایین می‌رود. [شبه $y = \cos x$]	در شروع از $x=0$ به بالا می‌رود. [شبه $y = -\cos x$]

تست نمودار تابع $y = 2 - \cos \pi x$ کدام است؟



1 در تابع $y = 2 - \cos \pi x$ ، دوره تابع برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

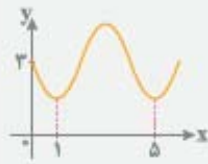
مثال قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(2\pi x)$ به صورت زیر است. مقدار a را به دست آورید.



چون نمودار در شروع رسم از $x=0$ به سمت بالا می‌رود، پس a و ضریب x یعنی 2π هم علامت هستند؛ بنابراین $a > 0$ است. از طرفی طبق شکل، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است:

$$\max(y) = |a| + 0 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

تست شکل زیر قسمتی از نمودار $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟ (داخل - ۹۳)



- (۱) ۲
(۲) ۲/۵
(۳) ۳
(۴) ۳/۵

۲ مقدار تابع در $x=0$ برابر ۳ است؛ پس نقطه $(0, 3)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$3 = a + \sin 0 \Rightarrow a = 3$$

از طرفی با توجه به شکل، دوره تناوب تابع برابر $T = 5 - 1 = 4$ است؛ بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow 4 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون شکل نمودار در مبدأ ابتدا نزولی است، پس $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است. در نتیجه ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y &= 3 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \xrightarrow{x = \frac{25}{3}} y = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{25}{3}\right) \\ &= 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

تست شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + b$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) ۳/۲
(۳) ۵/۲
(۴) ۲

۲ چون بیش‌ترین مقدار تابع برابر $\frac{5}{2}$ و کم‌ترین مقدار آن برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:

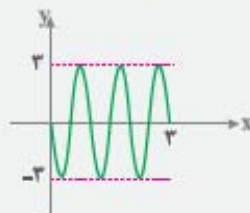
$$b = \frac{\max(y) + \min(y)}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

از طرفی مقدار تابع در $x=0$ برابر $\frac{5}{2}$ است؛ پس:

$$a \cos(0) + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

پس $a \times b = \frac{3}{2}$ است.

تست شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos\left(\frac{1}{2}\pi - bx\right)$ است. a, b کدام است؟



- (۱) -۶
(۲) -۳
(۳) ۴/۵
(۴) ۶

۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = a \cos\left(\frac{1}{2}\pi - bx\right) = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\pi x\right) = a \sin b\pi x$$

با توجه به نمودار بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است؛ پس $a = \pm 3$. از طرفی دوره تناوب تابع برابر ۱ است؛ پس:

$$\begin{aligned} T &= 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \\ &\Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \end{aligned}$$

از آنجایی که نمودار ابتدا نزولی است، پس a و b هم علامت نیستند، بنابراین $a, b = -6$ است.

تست شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟ (داخل - ۹۶)



- (۱) ۱/۲
(۲) -۱/۲
(۳) ۱
(۴) -۱

۲ با توجه به شکل دوره تناوب تابع 4π است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

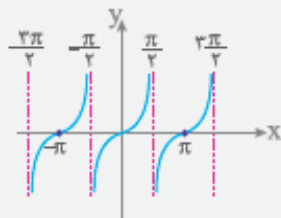
$$= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

تست نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در کدام بازه زیر یکنوا است؟

(۱) $(0, \pi)$ (۲) $(-\pi, 0)$

(۳) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (۴) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

۴ نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی و بنابراین یکنواست.



تست نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟

(۱) $y = -1 + \tan x$

(۲) $y = -1 + \tan \frac{x}{2}$

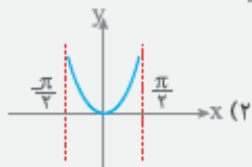
(۳) $y = -1 + \tan 2x$

(۴) $y = \tan(\frac{x}{2} - 1)$

۲ با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع $T = 2\pi$ است؛ پس با توجه به رابطه $T = \frac{\pi}{|a|}$ ضریب x برابر $\frac{1}{2}$ است. از طرفی نمودار ۱ واحد به پایین منتقل شده؛ پس:

$y = -1 + \tan \frac{x}{2}$

تست نمودار تابع $y = |\tan 2x|$ کدام است؟



۱ ابتدا نمودار $y = \tan x$ را رسم می‌کنیم و با کمک قوانین تبدیل نمودار، به نمودار $y = |\tan 2x|$ می‌رسیم:



$y = |\tan 2x|$

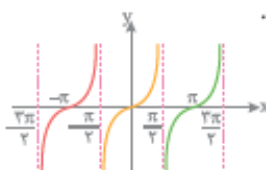


تانژانت و تغییرات آن

نحوه تغییرات تانژانت در ربع‌های مختلف

ربع	دایره مثلثاتی	نمودار	تغییرات
اول			در بازه $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ مقدار تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.
دوم			در بازه $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ مقدار تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.
سوم			در بازه $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$ مقدار تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.
چهارم			در بازه $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ مقدار تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.

نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت زیر است.



با توجه به این نمودار:

۱ نمودار تابع تانژانت در بازه‌های

$(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \dots$ تکرار می‌شود.

از آن جایی که طول هر یک از این بازه‌ها برابر π است پس تابعی متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است.

۲ این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \dots$ اکیداً صعودی است؛ اما در کل $\mathbb{R}$ تابعی غیریکنوا است.

۳ این تابع محور x ها را در $x = k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$ قطع می‌کند. [یعنی در این

نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.]

۴ دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.

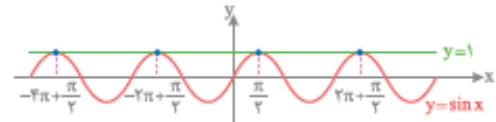
در حالت کلی، دوره تناوب تابع $y = \tan ax$ از رابطه $T = \frac{\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

درس معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

به معادله‌ای که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زوایای مجهول نوشته می‌شود، معادله مثلثاتی می‌گویند.

مثلاً معادله $\sin x = 1$ ، یک معادله مثلثاتی محسوب می‌شود. در واقع جواب‌های معادله $\sin x = 1$ ، محل برخورد دو تابع $y = \sin x$ و $y = 1$ است؛

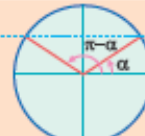


اگر بخواهیم همه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ را به صورت کلی نمایش دهیم، می‌توانیم آن را به شکل $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ بنویسیم که به آن، جواب کلی معادله می‌گویند. توجه داشته باشید که در جواب کلی، k همواره عددی صحیح است. مثلاً اگر به جای k عدد ۱ قرار دهیم، به جواب $2\pi + \frac{\pi}{2}$ می‌رسیم.

تذکر اگر جواب کلی یک معادله مثلثاتی را داشته باشیم، با قرار دادن $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ می‌توانیم همه جواب‌ها را به دست آوریم.

با توجه به دایره مثلثاتی، جواب کلی معادله‌های $\sin x = \sin \alpha$ و $\cos x = \cos \alpha$ به صورت زیر است:

 $\sin x = \sin \alpha$



$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

 $\cos x = \cos \alpha$



$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin x$ را به دست آورید.

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos x$ کدام است؟

$$k\pi \quad (1) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (4)$$

۲

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به دست آمده برابر $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

در معادلات مثلثاتی باید ضرب هر دو طرف تساوی، مثبت یک باشد. بنابراین برای حل معادله‌های $\sin x = -\sin \alpha$ و $\cos x = -\cos \alpha$ می‌توانیم ضرب منفی را با کمک روابط $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ و $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$ از بین ببریم.

مثال جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = -\cos x$ را به دست آورید.

در سمت راست معادله، به جای $-\cos x$ می‌نویسیم $\cos(\pi - x)$ و داریم:

$$\cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\pi - x) \\ 2x = 2k\pi - (\pi - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

در بعضی از معادله‌های مثلثاتی پس از ساده کردن، به معادله $\sin x = \pm \cos \alpha$ می‌رسیم. در این صورت باید نسبت‌های موجود در دو طرف تساوی را با کمک نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ هم‌نام کنیم.

تست در معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ تعداد جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۲ با توجه به این که $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ است، طرف راست معادله را به کسینوس تبدیل می‌کنیم:

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \\ 2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

معادله در بازه $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

مثال جواب کلی معادله $\sin 2x = \cos x$ را به دست آورید.

می‌توانیم با استفاده از تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ سمت راست معادله را به سینوس تبدیل کنیم:

$$\sin 2x = \cos x \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

تست معادله $\cos 2x \sin 3x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- ۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

۳

$$\cos 2x \sin 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0,1} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{3} \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

پس این معادله دارای ۶ جواب است.

تست مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x (\sin 3x - 1) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- $\frac{\Delta\pi}{2}$ (۴) 3π (۳) 2π (۲) $\frac{7\pi}{2}$ (۱)

۴

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x \in [0, \pi]}{k=0,1,2} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \\ \frac{x \in [0, \pi]}{k=0,1} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{\Delta\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\Delta\pi}{2}$$

تذکر جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \alpha = -\cos \alpha$ و $\sin \alpha = \cos \alpha$ به صورت زیر است:

$$\sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \alpha = -\cos \alpha \Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

- $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۱)
 $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)

۴ می‌دانیم $\sin(\pi + x) = -\sin x$ و $\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \cos x$ است؛

پس:

$$\sin(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

تست جواب کلی معادله $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ (۱)
 $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)

۲ ابتدا معادله را به صورت $\cos 3x = -\cos x$ می‌نویسیم و با استفاده از رابطه $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ، ضریب منفی را از بین می‌بریم؛

$$\cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \checkmark \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \times \end{cases}$$

$\cos x \neq 0$

حالت‌های خاص

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

معادله
سینوسی

معادله
کسینوسی

معادلات مثلثاتی قابل تبدیل به اتحاد

برای حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجه دوم، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

1 اگر نسبت‌های مثلثاتی یکسان باشند، می‌توانیم با استفاده از اتحادهای جبری، معادله را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم.

مثلاً معادله $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ را به صورت $(\sin x - 1)^2 = 0$ تجزیه می‌کنیم؛
 $(\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

2 اگر در معادله، هم سینوس و هم کسینوس وجود داشته باشد، ابتدا عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی یکسان می‌نویسیم و سپس آن را تجزیه می‌کنیم. مثلاً برای حل معادله $2\sin^2 x - \cos^2 x - 2 = 0$ ، به جای $\cos^2 x$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 x$ ؛
 $2\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 2 = 0 \Rightarrow 3\sin^2 x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

تذکر در بعضی معادلات بهتر است ابتدا همه عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل کنیم، سپس با کمک دسته‌بندی عبارت‌ها و فاکتورگیری، آن را به حاصل ضرب تعدادی پرانتز تبدیل کنیم.

 مثال جواب کلی معادله $1 + \sin x (\cos x - 1) = \cos x$ را به دست آورید.

ابتدا $\cos x$ را به طرف چپ معادله منتقل می‌کنیم و سپس از $(\cos x - 1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 1 + \sin x (\cos x - 1) - \cos x &= 0 \\ \Rightarrow \sin x (\cos x - 1) - (\cos x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow (\cos x - 1)(\sin x - 1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

 تست معادله مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

1 با استفاده از فاکتورگیری داریم:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \sin x + \cos x (1 + \sin x) + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (\sin x + 1) + \cos x (1 + \sin x) &= (\sin x + 1)(\cos x + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \xrightarrow{\oplus} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \text{جواب ندارد} \\ \cos x = -1 \xrightarrow{\oplus} x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{k=0} x = \pi \end{cases}$$

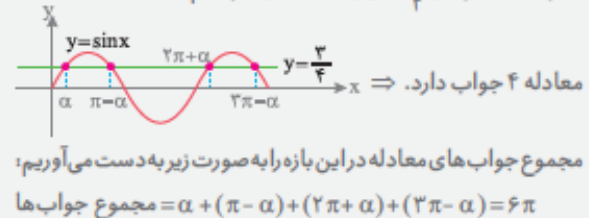
برای حل معادلات مثلثاتی به صورت $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ حالت‌های کلی زیر مطرح می‌شود:

1 اگر a برابر با سینوس یا کسینوس یک زاویه معروف باشد، می‌توانیم به جای a ، نسبت مثلثاتی آن زاویه را قرار دهیم و سپس معادله را حل کنیم. مثلاً برای حل معادله $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ ، می‌توانیم آن را به صورت $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بنویسیم و با قرار دادن $\cos \frac{\pi}{4}$ به جای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، معادله را به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ بازنویسی کنیم.

2 اگر a برابر با سینوس یا کسینوس یک زاویه معروف نباشد، بهترین راهکار این است که نمودار تابع مثلثاتی و خط $y = a$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم تا محل برخورد آن‌ها مشخص شود. جواب‌های معادله همان طول نقاط برخورد دو نمودار هستند.

 مثال مجموع جواب‌های معادله $4\sin x - 3 = 0$ در بازه $[0, 3\pi]$ را به دست آورید.

برای پیدا کردن مجموع جواب‌های معادله $\sin x = \frac{3}{4}$ در بازه $[0, 3\pi]$ ، با توجه به نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{3}{4}$ خواهیم داشت:


 تست تعداد جواب‌های معادله $4\sin x + \sqrt{2} = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

$$\begin{aligned} 4\sin x + \sqrt{2} &= 0 \Rightarrow 4\sin x = -\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x \in [0, 2\pi], k=1} x = \frac{7\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x \in [0, 2\pi], k=0} x = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

معادله دارای 2 جواب است.

 تست مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

4 چون حاصل ضرب دو پرانتز برابر صفر است، پس باید هر یک از آن‌ها را برابر صفر بگذاریم:

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین مجموع همه جواب‌ها برابر است با: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}$

معادلات مثلثاتی شامل کمان ۲۴

در بعضی از معادلات مثلثاتی، علاوه بر $\sin x$ یا $\cos x$ ، نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه یعنی $\sin 2x$ یا $\cos 2x$ نیز وجود دارند. در این سوالات باید با استفاده از روابط نصف کمان و به کمک نسبت‌های مثلثاتی مانند $\sin 2x$ و $\cos 2x$ و... معادله مثلثاتی را ساده کنیم. در این صورت با دو حالت مواجه می‌شویم؛ ۱ اگر معادله، تبدیل به یک معادله درجه دوم بر حسب یک نسبت مثلثاتی شود، در این صورت باید با استفاده از روش‌های حل معادله درجه دوم، جواب معادله را به دست آوریم.

مثلاً برای حل معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin x = -2$ ، با استفاده از رابطه $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ، معادله را بر حسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$(1 - 2\sin^2 x) + \sin x = -2 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} \sin x = -1 \quad \checkmark \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{3}{2} \quad \times \end{cases}$$

۲ در بعضی از سوالات، می‌توانیم همه عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل کنیم و با استفاده از فاکتورگیری، آن را به صورت حاصل ضرب چند عبارت مثلثاتی بنویسیم، سپس همه عبارت‌ها را برابر با صفر قرار دهیم. مثلاً برای حل معادله مثلثاتی $\sin 2x - 2\cos x = 0$ ، از رابطه $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ استفاده می‌کنیم:

$$2\sin x \cos x - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x (\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست مجموع جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$\frac{3\pi}{2} \quad (4) \quad \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \pi \quad (1)$$

۲ می‌دانیم $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ است؛ پس:

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \frac{x \in [0, \pi]}{k=0} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \frac{x \in [0, \pi]}{k=0} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ است.

تست مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ در بازه

$[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{4} \quad (4) \quad \frac{4\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{3\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \frac{x \in [0, 2\pi]}{k=0,1} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \frac{x \in [0, 2\pi]}{k=0,1} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 4\pi$$

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x = 3\cos x$ به کدام صورت است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

۴ به جای $\sin^2 x$ می‌نویسیم $1 - \cos^2 x$ تا به یک معادله درجه دوم بر حسب $\cos x$ برسیم:

$$2\sin^2 x = 3\cos x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4(-2)(2) = 49$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \quad \times \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین جواب کلی معادله $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است.

تست معادله مثلثاتی $\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند

جواب دارد؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

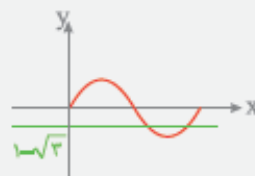
۲ معادله داده شده، یک معادله درجه دوم بر حسب $\sin x$ است:

$$\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0$$

$$\Delta = 12 \Rightarrow \sin x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

چون $1 + \sqrt{3}$ بزرگتر از ۱ است، پس قابل قبول نیست؛ بنابراین باید

تعداد جواب‌های معادله $\sin x = 1 - \sqrt{3}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ پیدا کنیم؛



تست جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (3)$$

۲ به جای $\cos^2 x$ معادل آن یعنی $1 - \sin^2 x$ را قرار می‌دهیم تا به یک معادله درجه دوم بر حسب $\sin x$ برسیم:

$$2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c} \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos^2 x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟

$$\begin{aligned} & k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1) \\ & k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2) \\ & 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3) \\ & 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

۲ چون حاصل کسر برابر صفر است، پس باید صورت آن برابر صفر باشد:

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \checkmark \\ \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \times \end{cases}$$

به ازای $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ مخرج کسر یعنی $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ صفر می‌شود.

حل معادلات شامل تانژانت و کتانژانت

برای حل معادلات مثلثاتی که در آن‌ها تانژانت یا کتانژانت وجود دارد، می‌توانیم به جای $\tan x$ بنویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ و به جای $\cot x$ بنویسیم $\frac{\cos x}{\sin x}$ ؛ سپس معادله را بر حسب سینوس و کسینوس حل کنیم. حال از آنجایی که معادلات مثلثاتی شامل تانژانت، حالتی از معادلات مثلثاتی کسری هستند، پس باید بعد از حل آن‌ها، جواب‌ها در دامنه صدق کنند.

مثال مجموعه جواب معادله $(1 - \sin x) \tan x = 0$ را به دست آورید.

برای حل معادله داده شده به جای $\tan x$ می‌نویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ داریم:

$$(1 - \sin x) \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases}$$

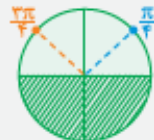
جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ باعث صفر شدن مخرج می‌شود، پس قابل قبول نیست.

تست معادله $\cos x - \sin x \tan x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

$$\begin{aligned} & 4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1) \\ & \text{۲ به جای } \tan x \text{ معادل آن یعنی } \frac{\sin x}{\cos x} \text{ را قرار می‌دهیم:} \end{aligned}$$

$$\cos x - \sin x \tan x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{\cos x \neq 0}$$

$$\cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ \cos x = -\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



در بازه $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$ به کدام صورت است؟

$$\begin{aligned} & x = \frac{k\pi}{3} \quad (1) \\ & x = \frac{2k\pi}{3} \quad (2) \\ & x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (4) \\ & x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3) \end{aligned}$$

۲ می‌دانیم $\sin(\frac{3\pi}{4} + x) = -\cos x$ است. حال با استفاده از رابطه $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ داریم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x) \Rightarrow -\cos^2 x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری که در مخرج کسر نیز یک عبارت مثلثاتی وجود دارد، باید توجه داشت که جواب‌های به دست آمده، باعث صفر شدن مخرج کسر نشوند.

مثال جواب‌های معادله $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ را به دست آورید.

از آنجایی که حاصل کسر برابر صفر است، باید صورت آن یعنی $\sin x$ برابر یا صفر باشد، پس:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi$$

اما جواب $x = \pi$ باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شود، پس جواب‌های این معادله در بازه داده شده فقط $x = 2\pi, x = 0$ هستند.

تست جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{2} \quad (4) \quad 2k\pi \quad (3) \quad k\pi \quad (2) \quad (2k+1)\pi \quad (1)$$

۱ چون $1 - \cos x$ در مخرج کسر قرار دارد، پس نباید صفر شود، یعنی باید $1 - \cos x \neq 0$ باشد، پس:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$



اما به ازای $x = 2k\pi$ مقدار $\cos x$ برابر ۱ می‌شود، پس جواب معادله به صورت $x = 2k\pi + \pi$ است.

حد و پیوستگی

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیازهای این فصل که خیلی هم مهم هستند شامل توان و عبارت جبری، تابع، مثلثات و معادله و تابع درجه دوم است. این فصل پیش‌نیاز فصل مهم و تأثیرگذار مشتق است.

این فصل دو بخش کلی دارد: بخش حد و بخش پیوستگی. بخش حد از حدهای نموداری و صفر صفر سال یازدهم شروع شده و در نهایت به حدهای نامتناهی سال دوازدهم می‌رسد. بخش پیوستگی هم که کلاً مربوط به سال یازدهم و تقریباً پای ثابت کنکور است. **توصیه:** برای حل حدها علاوه بر روش‌های مرسوم، روش هوییتال را هم آورده‌ایم. پیشنهاد می‌شود بعد از آموختن مشتق‌گیری، مجدد تست‌های این بخش را با روش هوییتال حل کنید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۴

درس تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

درس

عملیات تقسیم چند جمله‌ای‌ها

مراحل تقسیم دو عبارت چند جمله‌ای به یک دیگر در مثال زیر بیان شده است:

مثال خارج قسمت تقسیم $5x^3 + 2x^2 - x^3$ را بر $x^2 - x$ به دست آورید.

(۱) مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل استاندارد، یعنی از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ \vdots \end{array}$$

(۲) اولین جمله از مقسوم را بر اولین جمله از مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و جواب را در خارج قسمت می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ \vdots \end{array}$$

(۳) جواب به دست آمده در خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و حاصل را در زیر مقسوم نوشته و از آن کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ \vdots \end{array}$$

(۴) این عمل را تا جایی تکرار می‌کنیم که درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ \vdots \end{array}$$

بنابراین $q(x) = x^2 + x - 1$ است و در آن ضریب x برابر ۱ است.

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که تساوی زیر برقرار باشد **[این تساوی را اتحاد تقسیم می‌نامند]**:

$$\frac{f(x)}{p(x)} = \frac{q(x)}{r(x)} \Rightarrow f(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

تذکر توجه کنید در اتحاد تقسیم، درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کمتر است.

تست در تقسیم چند جمله‌ای $5x^3 + 2x^2 - x^3$ بر $x + 1$ ، خارج قسمت شامل

جمله ax است. مقدار a کدام است؟

۱(۱) ۲(۳) ۳(۴) ۴(۱)

۱ عمل تقسیم را به صورت زیر انجام می‌دهیم و خارج قسمت را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ \vdots \end{array}$$

بنابراین $q(x) = x^2 + x - 1$ است و در آن ضریب x برابر ۱ است.

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$

می‌دانیم درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه کمتر است، پس اگر مقسوم علیه عبارتی از درجه ۱ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده عدد ثابت خواهد بود. همچنین می‌دانیم در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x) = (ax+b)Q(x) + \underbrace{R}_{\text{عدد ثابت}}$$

در ضمن می‌دانیم یک اتحاد به ازای تمام مقادیر x برقرار است، پس می‌توانیم به جای x ، ریشه مقسوم علیه یعنی $-\frac{b}{a}$ را در آن قرار دهیم:

$$\xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R = R$$

تذکر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثلاً باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^3 - 3x^2 + x + 9$ بر $x-2$ برابر است با:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r = f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 9 = 16 - 12 + 2 + 9 = 3$$

مثال باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^3 + x^2 + ax$ بر $x-1$ چهار واحد

بیشتر از باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+3$ است. مقدار a را به دست آورید.

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر $f\left(\frac{1}{1}\right)$ و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x+3$ برابر $f\left(-\frac{3}{1}\right)$ است. پس داریم:

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = 4 + f\left(-\frac{3}{1}\right) \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{a}{1} = 4 + \frac{-27}{1} + \frac{9}{1} + \frac{3a}{1} \\ \Rightarrow 2a = \frac{1}{1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

تست فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ ،

به ترتیب ۱ و ۳ باشند، باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x-2$

کدام است؟ (خارج ۹۹)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & \text{صفر} \end{array}$$

۱ چون باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱

است، پس:

حال باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x-2$ برابر است با:

$$p(2^2) + 4p(-2) = p(4) + 4p(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

بخش پذیری

اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر صفر شود، آن‌گاه $f(x)$ بر $ax+b$ بخش پذیر است.

مثال اگر چندجمله‌ای $f(x) = 8x^3 - kx + 1$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد،

مقدار k را به دست آورید.

چون چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، پس باقی‌مانده تقسیم

$f(x)$ بر $x-1$ یعنی $f\left(\frac{1}{1}\right)$ برابر صفر است. بنابراین:

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = 8\left(\frac{1}{1}\right)^3 - k\left(\frac{1}{1}\right) + 1 = 8 - k + 1 = 0 \Rightarrow \frac{k}{1} = 9 \Rightarrow k = 9$$

تست عبارت $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ به ازای تمام مقادیر n

بر $x+2$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم این عبارت بر $x-1$

کدام است؟

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -9 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \end{array}$$

۲ چون $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر $x+2$ بخش پذیر

است، پس $P(-2) = 0$ است و داریم:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$$

$$\Rightarrow -2 \times (-2)^{2n} + 2(-2)^{2n} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

باقی‌مانده تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-1$ برابر $P(1)$ است:

$$P(1) = (1)^{2n+1} + 2(1)^{2n} + 1^5 - 5(1)^3 - 8 = 1 + 2 + 1 - 5 - 8 = -10$$

اگر مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر باشد، بر تک تک عوامل مقسوم علیه نیز بخش پذیر است.

مثلاً می‌دانیم اگر عددی بر ۱۰ بخش پذیر باشد، حتماً بر ۵ و ۲ نیز بخش پذیر است یا اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x+1)(x-2)$ بخش پذیر باشد، قطعاً بر $(x-2)$ و $(x+1)$ بخش پذیر است.

مثال اگر عبارت $x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x - 3$ بر $x^2 - 2x - 3$ بخش پذیر

باشد، مقادیر a و b را بیابید.

می‌دانیم تجزیه عبارت $x^2 - 2x - 3$ به صورت $(x+1)(x-3)$ است. از

طرفی چون عبارت $x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x - 3$ بر $f(x) = x^2 - 2x - 3$

بخش پذیر است، پس بر هر یک از عبارت‌های $(x+1)$ و $(x-3)$ نیز

بخش پذیر است. بنابراین داریم:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow (3)^4 + a(3)^3 + b(3)^2 - 2(3) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 81a + 9b = -72 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 81a + 9b = -72 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = -2$$

بررسی خارج قسمت در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$

در بعضی از مسائل، اطلاعاتی راجع به خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ خواسته می‌شود. برای حل این مسائل دوراهاکار وجود دارد:

۱ راهکار اصلی این است که چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $ax+b$ تقسیم کرده و خارج قسمت را به دست آوریم.

۲ در برخی از سؤالات، می‌توانیم باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$f(x)$ بر $ax+b$ را محاسبه کنیم، سپس اتحاد تقسیم را نوشته و

با جای‌گذاری x مناسب، اطلاعات خواسته شده راجع به خارج

قسمت را به دست آوریم.

حال با جای گذاری $x = -1$ و $x = -2$ در اتحاد تقسیم داریم:

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + 4(-1)^2 + 1 = (-1+1)q(-1) + a(-1) + b \\ \Rightarrow -a + b = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^3 + 4(-2)^2 + 1 = (-2+1)q(-2) + a(-2) + b \\ \Rightarrow -2a + b = 9$$

با حل این معادلات $a = -5$ و $b = -1$ به دست می آید؛ بنابراین باقی مانده به صورت $-5x - 1$ است.

تست اگر باقی مانده تقسیم چندجمله ای $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + x^2$

بر $x^2 - 4$ برابر $2x + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$\frac{1}{32} (4) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{1}{16} (2) \quad \frac{1}{8} (1)$$

۲ با توجه به صورت سؤال، اتحاد تقسیم به صورت زیر است:

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + x^2 = (x^2 - 4)Q(x) + 2x + 5$$

$$1) \quad x = 2: 2^5 + a \times 2^4 + b \times 2^3 + 2^2 = 2(2) + 5$$

$$\Rightarrow 32 + 16a + 8b + 4 = 9 \Rightarrow 16a + 8b = -37$$

$$2) \quad x = -2: (-2)^5 + a \times (-2)^4 + b \times (-2)^3 + (-2)^2 = 2(-2) + 5$$

$$\Rightarrow -32 + 16a - 8b + 4 = 1 \Rightarrow 16a - 8b = 29$$

با جمع کردن طرفین معادله های (۱) و (۲) داریم:

$$32a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{16}$$

به دست آوردن ریشه های یک چندجمله ای با مشخص بودن یکی از ریشه ها

اگر چندجمله ای $f(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، یعنی $f(a) = 0$ باشد، آنگاه $x = a$ ریشه $f(x)$ است. می توانیم با تقسیم $f(x)$ بر $x - a$ سایر ریشه های $f(x)$ را در صورت وجود بیابیم. مثلاً در چند جمله ای

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$f(-1) = -1 + 2 - 5 - 6 = 0$$

پس چندجمله ای $f(x)$ بر $x + 1$ بخش پذیر است چون $f(-1) = 0$ می باشد. حالا با تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ ریشه های دیگر $f(x)$ را در صورت وجود

می یابیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x + 1 \\ -(x^3 + x^2) & \\ \hline x^2 - 5x - 6 & \\ -(x^2 + x) & \\ \hline -6x - 6 & \\ -(-6x - 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد قسم}} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6) + 0$$

حالا ریشه های عامل $x^2 + x - 6$ را به دست می آوریم:

$$\underbrace{x^2 + x - 6}_{(x-2)(x+3)} = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$$

پس به جز $x = -1$ ریشه های $x = 2$ و $x = -3$ را نیز داریم.

تست باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $P(x) = x^2 + 4x + 5$

برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت

این تقسیم کدام مورد می تواند باشد؟ (خارج - ۱۴۰۱)

$$-2x + 3 \quad (4) \quad 3x - 2 \quad (3) \quad 2x - 1 \quad (2) \quad -x + 2 \quad (1)$$

۴ اتحاد تقسیم را می نویسیم و در آن $x = 1$ و $x = -1$ می گذاریم:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)Q(x) + x + 2$$

$$1) \quad f(1) = 1 + 4 + 5 = 10 \Rightarrow Q(1) + 1 + 2 = 13 \Rightarrow Q(1) = 1$$

$$2) \quad f(-1) = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow Q(-1) + (-1) + 2 = 11 \Rightarrow Q(-1) = 5$$

با توجه به گزینه ها، فقط $Q(x) = -2x + 3$ مناسب است.

تست اگر $q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله ای $f(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 1$

بر $x^2 + 2$ باشد، باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x - 1$ کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۴ ابتدا باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + 2$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-2) = (-2)^5 - 4(-2)^4 + (-2)^3 + 1 = -32 - 64 - 8 + 1 = -103$$

حال اتحاد تقسیم را نوشته و از آن جایی که باقی مانده تقسیم $q(x)$

بر $x - 1$ برابر $q(1)$ است، در اتحاد تقسیم $x = 1$ را قرار می دهیم:

$$\xrightarrow{x=1} (x^2 + 2)q(x) + 5 - 4x^4 + x^3 + 1 = (x-1)q(x) + 5 - 4x^4 + x^3 + 1$$

$$1 - 4 + 1 + 1 = (1+2)q(1) + 5 \Rightarrow -6 = 3q(1) \Rightarrow q(1) = -2$$

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر مقسوم علیه درجه دوم [یا بالاتر]

برای محاسبه باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه دوم [یا با درجه بالاتر] راهکار کلی این است که ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار دهیم. سپس در مقسوم علیه، جمله با درجه بیشتر را بر حسب سایر جملات به دست آورده و آن را در $f(x)$ قرار می دهیم. این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که درجه عبارت $f(x)$ کمتر از درجه مقسوم علیه شود. عبارت به دست آمده، همان باقی مانده است. [این روش به روش کاهش توان مشهور است]. مثلاً برای محاسبه باقی مانده عبارت $f(x) = 2x^3 + 5x - 9$ بر $x^2 - x$ ، مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم و داریم:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = x \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 2x + 5x - 9 = 7x - 9$$

بنابراین باقی مانده $7x - 9$ است.

برای محاسبه باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه دوم [یا با درجه بالاتر] اگر مقسوم علیه قابل تجزیه به عوامل درجه اول باشد، با جای گذاری ریشه های عوامل مقسوم علیه در اتحاد تقسیم، باقی مانده را به دست می آوریم.

تذکر اگر مقسوم علیه، یک عبارت درجه دوم باشد، باقی مانده حداکثر از

درجه اول خواهد بود. پس باید باقی مانده را به صورت $ax + b$ در نظر بگیریم.

مثال باقی مانده تقسیم عبارت $f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$ بر $x^2 + 3x + 2$ را

به دست آورید.

فرض می کنیم باقی مانده به صورت $ax + b$ باشد. سپس مقسوم علیه را به صورت $(x+1)(x+2)$ تجزیه کرده و اتحاد تقسیم را به صورت زیر

$$x^3 + 4x^2 + 1 = (x+1)(x+2)q(x) + ax + b$$

می نویسیم:

درس مفاهیم اولیه و محاسبه حد توابع

همسایگی

اگر x یک عدد حقیقی باشد، به هر بازه باز شامل نقطه x یک همسایگی از x می‌گوییم؛ بنابراین اگر $x \in (a, b)$ ، آن‌گاه بازه (a, b) یک همسایگی از x است.

مثلاً $(3, 5)$ همسایگی عدد ۴ است. یا همین بازه $(3, 5)$ همسایگی اعداد $3/7$ یا $4/2$ یا $\sqrt{11}$ نیز می‌باشد اما همسایگی اعداد ۲ یا ۶ یا صفر نیست چون شامل این اعداد نیست.



اگر $\epsilon > 0$ ، در این صورت بازه $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ را یک همسایگی راست x_0 می‌نامیم. مثلاً $(3, 5)$ همسایگی راست عدد ۳ است.



همچنین اگر $\epsilon > 0$ ، در این صورت بازه $(x_0 - \epsilon, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم. مثلاً بازه $(3, 5)$ همسایگی چپ عدد ۵ است.



مثال اگر بازه $(x - 1, 2x + 3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

برای به دست آوردن مجموعه مقادیر x ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x - 1 < 2 < 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 < 2 \Rightarrow x < 3 \\ 2 < 2x + 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$$

اگر x را از بازه (a, b) حذف کنیم، مجموعه $\{x\} - (a, b)$ را یک همسایگی محذوف x می‌نامیم.



تست اگر بازه $\{2\} - (2x - 1, x + 4)$ یک همسایگی محذوف باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

$$-2 < x < 2 \quad (2) \qquad -1 < x < 2 \quad (1)$$

$$-2 < x < \frac{3}{2} \quad (4) \qquad -\frac{3}{2} < x < 3 \quad (3)$$

۴ چون نقطه $x = 2$ از بازه حذف شده، پس بازه داده شده همسایگی محذوف ۲ است، بنابراین:

$$2x - 1 < 2 < x + 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < 2 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \\ 2 < x + 4 \Rightarrow -2 < x \end{cases} \Rightarrow -2 < x < \frac{3}{2}$$

تست دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم. می‌دانیم زیر رادیکال نباید منفی باشد، پس:

$$0 \leq 1 - x^2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

از طرفی مخرج کسر نیز نباید صفر باشد، بنابراین $\{0\} - [-1, 1] = D_f$ است. دامنه این تابع شامل مجموعه $\{0\} - [-1, 1]$ است که یک همسایگی محذوف برای نقطه صفر محسوب می‌شود.

مفهوم میل کردن

اگر a یک عدد حقیقی روی محور اعداد باشد، منظور از نماد $x \rightarrow a$ این است که x بدون این‌که خود a را اختیار کند، از هر دو طرف به a نزدیک می‌شود.

تذکر توجه کنید وقتی x به سمت a میل می‌کند، لازم نیست خود a در دامنه یا بازه باشد، ولی همسایگی آن حتماً باید در دامنه باشد.

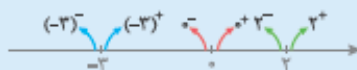
فرض کنید $a = 2$ و $x \rightarrow 2$ ، در این صورت این نزدیک شدن را می‌توانیم به صورت جدول زیر نمایش دهیم:

x با مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.	a	x با مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.
$1/8 \quad 1/9 \quad 1/99 \quad 1/999$	$\rightarrow 2 \leftarrow$	$2/101 \quad 2/10 \quad 2/1 \quad 2/2$

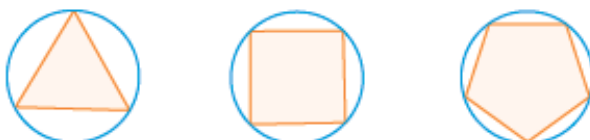
منظور از نماد $x \rightarrow a^+$ این است که x فقط با مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک می‌شود و منظور از نماد $x \rightarrow a^-$ این است که x فقط با مقادیر کوچکتر از a به a نزدیک می‌شود.



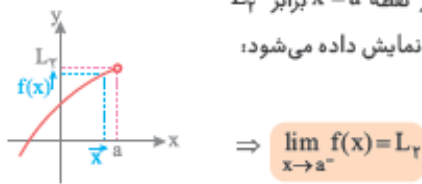
تذکر در نماد میل کردن، علامت‌های $+$ ، $-$ روی عدد، نشان‌دهنده جهت نزدیک شدن x به a هستند. وقتی $x \rightarrow a^+$ ، علامت $+$ روی a نشان‌دهنده این است که x از سمت راست به a نزدیک می‌شود و نباید تصور کرد که a یک عدد مثبت است. همچنین $x \rightarrow a^-$ ، نشان‌دهنده این است که x از چپ به a نزدیک می‌شود و هیچ ربطی به منفی بودن عدد a ندارد.



با توجه به الگوی زیر، چند ضلعی‌هایی درون دایره محاط شده است و با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها افزایش پیدا کرده و به مساحت دایره نزدیک می‌شود. [در یوتوب باستان برای رسیدن به مساحت و محیط شکل‌های هندسی از این روش استفاده می‌کنند]

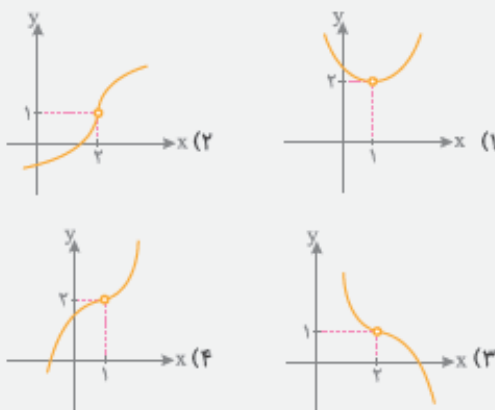


با توجه به نمودار زیر، وقتی x از سمت چپ و با مقادیر کوچکتر از a به نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f به L_1 نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد چپ تابع f ، در نقطه $x = a$ برابر L_1 است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:



تست جدول زیر، رفتار کدام تابع را به درستی نشان می‌دهد؟

x	$1/5$	$1/7$	$1/9$	2	$2/1$	$2/3$	$2/5$
$f(x)$	$1/3$	$1/1$	$1/5$	1	0.99	0.9	0.8



۳ با توجه به جدول، وقتی x با مقادیر بزرگتر از 2 به سمت 2 نزدیک می‌شود، مقادیر f با مقادیر کوچکتر از 1 به 1 نزدیک می‌شوند و وقتی x با مقادیر کوچکتر از 2 به سمت 2 نزدیک می‌شوند، مقادیر f با مقادیر بزرگتر از 1 به 1 نزدیک می‌شوند که گزینه 3 به درستی این رفتار را نشان می‌دهد.

تعریف ریاضی حد تابع

فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (x_1, x_2) شامل نقطه a [به جز اتمالاً در a] تعریف شده باشد. در این صورت تابع f در $x = a$ دارای حد است، هرگاه تابع f در $x = a$ دارای حدهای چپ و راست موجود، متناهی و برابر باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تابع f در حالت‌های زیر در نقطه $x = a$ حد ندارد:

۱ تابع f در $x = a$ فقط دارای حد راست یا فقط دارای حد چپ باشد.

۲ تابع f در $x = a$ حد چپ و راست نداشته باشد.

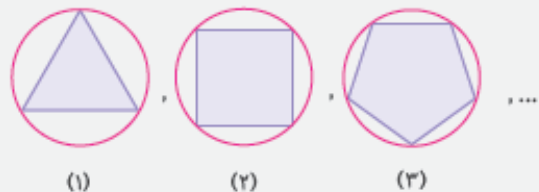
۳ هر یک از حدهای چپ و راست در $x = a$ موجود و مقداری حقیقی باشند، اما با هم برابر نباشند.

تست با توجه به الگوی زیر چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

(الف) با افزایش تعداد ضلع‌های شکل‌های درون دایره، مساحت ناحیه رنگ نشده تغییری نمی‌کند.

(ب) با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.

(پ) مساحت ناحیه رنگی در شکل دهم، کمتر از مساحت ناحیه رنگی در شکل نهم است.



(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱ با افزایش تعداد ضلع‌های شکل‌های درون دایره، مساحت ناحیه رنگ شده افزایش می‌یابد و در نتیجه مساحت ناحیه سفید کم می‌شود. پس مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود. پس (الف) نادرست و (ب) درست است. با توجه به این توضیحات مساحت ناحیه رنگی در شکل دهم بیشتر از شکل نهم است. پس (پ) نادرست است.

مفهوم شهودی حد

طبق شکل، وقتی $x \rightarrow a$ ، مقادیر تابع f به L نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد تابع f وقتی x به سمت a میل می‌کند، برابر عدد حقیقی L است. عدد L را حد تابع f در نقطه a می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

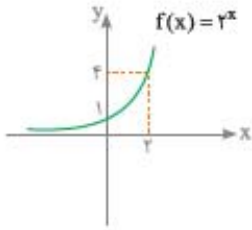
در نمودار زیر وقتی $x \rightarrow 2$ ، مقادیر تابع f به عدد 3 نزدیک می‌شوند؛ در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

x از راست به 2 نزدیک می‌شود.				x از چپ به 2 نزدیک می‌شود.			
$2/1$	$2/0.1$	$2/0.01$	2	2	$1/999$	$1/99$	$1/9$
$3/1$	$3/0.1$	$3/0.01$	3	3	$2/999$	$2/99$	$2/9$

با توجه به نمودار زیر، وقتی x از سمت راست و با مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f به L_1 نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x = a$ برابر L_1 است و به صورت مقابل نمایش داده می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$



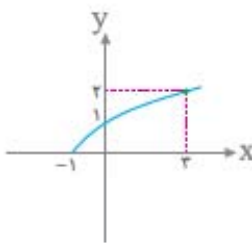
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4$$

در تابع کسری f اگر $x = a$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد، آن‌گاه حد تابع در نقطهٔ $x = a$ با مقدار تابع در این نقطه برابر است. [اگر $x = a$ ریشهٔ مخرج کسر باشد، ممکن است به ابواب $\frac{0}{0}$ برسیم و یا حاصل در برابر عدد دقیقی نباشد؛ که در ادامهٔ فصل به آن خواهیم پرداخت.]

حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ در نقطهٔ $x = -2$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{2(-2)+3}{(-2)^2+1} = -\frac{1}{5}$$

برای به‌دست آوردن حد توابع رادیکالی و لگاریتمی در نقطهٔ $x = a$ ابتدا باید دامنهٔ تابع را تعیین کنیم. اگر نقطهٔ $x = a$ دارای همسایگی باشد، آن‌گاه حد تابع f در $x = a$ با مقدار تابع در این نقطه برابر است.



دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ به صورت $D_f = [-1, +\infty)$ است. مطابق شکل، تابع در $x = -1$ حد ندارد اما حد تابع در $x = 3$ برابر ۲ است.

تست اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - x^2}$ باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر

درست است؟

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(پ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2\sqrt{3}$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^2} \Rightarrow \underbrace{x^2 - x^2}_{x^2(x^2 - 1)} \geq 0$$

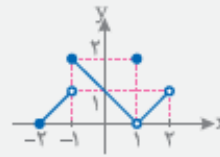
x	-1	0	1
$x^2 - x^2$	+	-	-

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$$

چون تابع در $x = 1$ فقط همسایگی راست دارد و در $x = 0$ همسایگی ندارد، پس حد تابع در $x = 0$ ، $x = 1$ موجود نیست. یعنی (الف) و (ب) نادرست هستند. اما برای قسمت (پ) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - x^2} = \sqrt{6 - 4} = \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

تست نمودار تابع f به‌صورت زیر است. کدامیک از حدهای زیر موجود است؟



(۱) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(۲) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

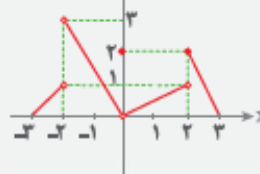
(۴) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

۳ به بررسی عبارات می‌پردازیم:

- (۱) حد چپ تابع در $x = -2$ وجود ندارد، پس $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وجود ندارد.
- (۲) حد چپ و راست تابع در $x = -1$ برابر نیست؛ پس این حد وجود ندارد.
- (۳) حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابر صفر و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ است.
- (۴) حد راست تابع در $x = 2$ وجود ندارد، پس $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

تست شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



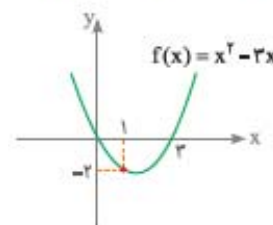
۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴) صفر

۲ حاصل حد تابع f وقتی x کمی بیشتر از -2 است برابر ۳، حاصل حد آن وقتی x کمی کمتر از 2 است برابر ۱ است و حاصل حد آن وقتی x کمی بیشتر یا کمی کمتر از صفر است برابر صفر می‌باشد. پس:

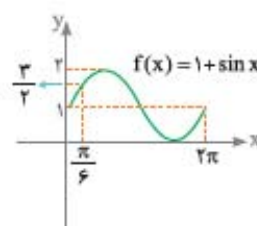
$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 - 1 + 0 = 2$$

حد توابع معروف، زیر ذره‌بین

حد توابع چند جمله‌ای، سینوسی، کسینوسی و نمایی در نقطهٔ $x = a$ از دامنهٔ آن‌ها، با مقدار تابع در نقطهٔ $x = a$ برابر است. به عبارت دیگر این توابع $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ است.



$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$$



$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$$

۲ اگر $x = a$ ، عبارت داخل براکت را صحیح کند، باید به طور مجزا حد چپ و راست تابع را در $x = a$ به دست آوریم.

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x[x^2] + |x - 2|)$ را به دست آورید.

وقتی $x \rightarrow 2^+$ یعنی $x > 2$ پس:

$$x > 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2, \quad x^2 > 4 \Rightarrow [x^2] = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x[x^2] + |x - 2|) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x + x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5x - 2) = 5(2) - 2 = 8$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}] - \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}]$ کدام است؟

$$-1(1) \quad -2(2) \quad 1(3) \quad 2(4)$$

۳ ابتدا حاصل $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}]$ را پیدا می‌کنیم:

$$x > -\frac{1}{11} \Rightarrow \frac{1}{x} < -11 \Rightarrow -\frac{1}{x} > 11$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}] = [11^+] = 11$$

حالا حاصل $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}]$ را پیدا می‌کنیم:

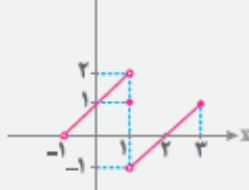
$$x < -\frac{1}{11} \Rightarrow \frac{1}{x} > -11 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 11$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}] = [11^-] = 10$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}] - \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}] = 11 - 10 = 1$$

تست اگر $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{1+2[g(x)]}$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} (1) \\ & -\frac{1}{3} (2) \\ & -\frac{1}{4} (3) \\ & 1 (4) \end{aligned}$$

۲ می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{1+2[g(x)]} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}{1+2 \lim_{x \rightarrow 1^-} [g(x)]}$ است. با توجه

به نمودار تابع g در صورت سؤال $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ کمی کمتر از ۲ است.

حال ضابطه f را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 1 & ; x > 1 \\ -1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{1+2 \lim_{x \rightarrow 1^-} [g(x)]} = \frac{-1}{1+2 \times [1^-]} = -\frac{1}{3}$$

حد توابع شامل قدر مطلق

برای محاسبه حد توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح وقتی $x \rightarrow a^+$ ، از نامساوی $x > a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی بزرگتر از آن است. به طور مشابه وقتی $x \rightarrow a^-$ ، از نامساوی $x < a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی کوچکتر از آن است.

برای محاسبه حد توابع شامل قدر مطلق در $x = a$ ابتدا باید قدر مطلق را حذف کنیم و سپس از تابع حد بگیریم. در این مسائل، با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدر مطلق نباشد، علامت عبارت داخل قدر مطلق را به ازای $x = a$ مشخص کرده و قدر مطلق را حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x-1} - \sqrt{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(3x-1) - (2x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5x}{x} = -5$$

۲ اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدر مطلق باشد، حد چپ و راست تابع را در $x = a$ به دست می‌آوریم. [یعنی علامت عبارت داخل قدر مطلق را به ازای مقدار کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از a مشخص می‌کنیم و قدر مطلق را برمی‌داریم، سپس به سراغ مقایسه عددی رویم.]

مثلاً برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|}{x^2-4}$ داریم:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

با توجه به نابرابر بودن حد چپ و حد راست، حاصل حد داده شده موجود نمی‌باشد.

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-3|-x}{2x^2-1}$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} (1) \quad -\frac{2}{3} (2) \quad \frac{1}{V} (3) \quad -\frac{1}{V} (4)$$

۱ وقتی $x \rightarrow 2$ عبارت داخل قدر مطلق مثبت است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-3|-x}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-3}{2x^2-1} = \frac{4-2-3}{8-1} = -\frac{1}{7}$$

حد توابع شامل جزء صحیح

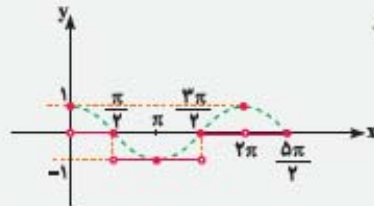
برای محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح [براکتی] در $x = a$ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم و سپس از تابع حد بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر $x = a$ ، عبارت داخل براکت را صحیح نکند، مقدار عبارت داخل براکت را به ازای $x = a$ مشخص کرده و براکت را حذف می‌کنیم، سپس حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + [\frac{x}{2}]) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + [\frac{3}{2}]) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 3 + 1 = 4$$

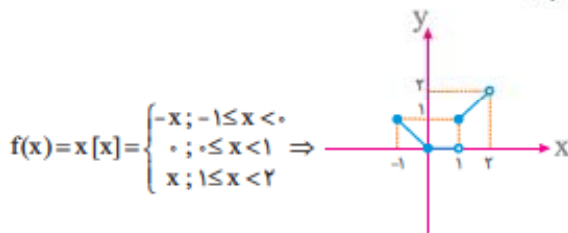
مثال حد تابع $y = [\cos x]$ را در نقاط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \pi$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ به دست آورید.

باتوجه به نمودار، تابع در نقاط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ حد ندارد و $\lim_{x \rightarrow 2\pi} [\cos x] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \pi} [\cos x] = -1$ است. در ضمن باتوجه به نکات ذکرشده واضح است که تابع در $x = \pi$ و $x = 2\pi$ چون به ترتیب دارای ماکزیمم و مینیمم می باشد، پس دارای حد بوده و در $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ چون به ترتیب دارای رفتار نزولی و صعودی می باشد، پس حد ندارد.



نکته تابع $f(x) = (x-a)[x]$ در نقطه صحیح $x=a$ دارای حد است.

مثلاً تابع $f(x) = x[x]$ در $x=0$ دارای حد است، اما در بقیه نقاط صحیح حد ندارد.



تست اگر تابع $f(x) = (x^2 - ax - 3)[x]$ در $x=3$ دارای حد باشد، مقدار a کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad 3 \quad 2 \quad \frac{3}{4}$$

به ازای $x=3$ عبارت داخل $[x]$ صحیح می شود، پس برای آن که تابع $f(x)$ در $x=3$ دارای حد باشد، باید $x=3$ ریشه عبارت پشت براکت باشد، بنابراین داریم:

$$x^2 - ax - 3 = 0 \Rightarrow 9 - 3a - 3 = 0 \Rightarrow a = 2$$

تست مجموع طول نقاط صحیحی که تابع $f(x) = (x^3 - 4x)[2x-1]$ در آن ها دارای حد می باشد کدام است؟

$$1 \quad 4 \quad -2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 0$$

می دانیم به ازای همه نقاط صحیح عبارت داخل $[2x-1]$ مقداری صحیح خواهد شد و فاقد حد خواهد بود. بنابراین فقط به ازای ریشه های صحیح عبارت پشت براکت تابع f در نقاط صحیح حد دارد:

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$$

$$\Rightarrow -2 + 0 + 2 = 0$$

بررسی حد توابع معروف براکتی

$f(x) = x + [x]$	$f(x) = [x]$
تابع در تمام نقاط صحیح، فاقد حد است.	تابع در تمام نقاط صحیح، فاقد حد است.
$f(x) = [x] + [-x]$	$f(x) = x - [x]$
تابع در تمام نقاط، دارای حد است و مقدار آن برابر 1- است.	تابع در تمام نقاط صحیح، فاقد حد است.

در بررسی حد توابع به شکل $[f(x)]$ وقتی $x \rightarrow x_0$ با دو حالت کلی روبه روهستیم:

1 اگر به ازای x_0 عبارت درون براکت برابر مقداری صحیح نشود، یعنی $f(x_0) \notin \mathbb{Z}$ ، آنگاه تابع $[f(x)]$ دارای حد می باشد و حد تابع با مقدار تابع برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{x^2}{4} \right] = \left[\frac{25}{4} \right] = 6 \text{ مثلاً}$$

2 اگر به ازای x_0 عبارت درون براکت مقداری صحیح شود، یعنی $f(x_0) = k \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه باید حد چپ و راست تابع را پیدا کنیم. (برای این منظور می توانیم به نمودار تابع و وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن در همسایگی x_0 توجه کنیم.)

مثال بررسی کنید که تابع $y = [x^2]$ در نقاط $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 1$ حد دارد یا خیر؟

باتوجه به نمودار واضح است که تابع $y = [x^2]$ در نقاط $x = -1$ و $x = 1$ حد ندارد و در $x = 0$ دارای حد می باشد. همچنین باتوجه به نکات ذکر شده می دانیم چون نمودار تابع $y = x^2$ در همسایگی نقاط $x = -1$ و $x = 1$ به ترتیب رفتار نزولی و صعودی دارد، پس در این نقاط حد ندارد و چون در $x = 0$ دارای مینیمم می باشد، پس در این نقطه حد دارد.



بررسی حد در اعمال جبری

با داشتن دو تابع f و g برای بررسی وضعیت حد در تابع‌های $f \pm g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ به موارد زیر توجه کنید:

۱ اگر دو تابع f, g در $x=a$ دارای حد باشند، در این صورت توابع $f \pm g$ ، $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ (به شرط $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) دارای حد هستند.

۲ اگر تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، ولی تابع g در $x=a$ حد نداشته باشد، توابع $f \pm g$ در $x=a$ فاقد حد هستند، اما توابع $\frac{f}{g}$ ، $f \times g$ ممکن است در $x=a$ دارای حد باشند یا نباشند؛ بنابراین باید وجود حد را در آن‌ها بررسی کنیم.

۳ اگر توابع f, g هر دو در $x=a$ فاقد حد باشند، توابع $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در $x=a$ دارای حد باشند یا نباشند.

مثلاً دو تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 1 \\ 6 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 5 & x \leq 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. این توابع در $x=1$ حد ندارند، اما تابع $f+g$ در این نقطه حد دارد:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{به ازای هر مقدار } x} (f+g)(x) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f+g)(x) = 4$$

همچنین تابع f^2 در $x=0$ دارای حد ندارد ولی تابع f^2 در $x=0$ حدی برابر ۱ دارد:

$$(f^2)(x) = (f \cdot f)(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^2(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 1$$

تست در کدام گزینه، توابع f و g در $x=1$ حد ندارند، اما تابع $f+g$ در $x=1$ دارای حد است؟

$$g(x) = |x|, f(x) = [x] \quad (1)$$

$$g(x) = x, f(x) = |x| \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}, f(x) = [x] \quad (3)$$

$$g(x) = [-x], f(x) = [x] \quad (4)$$

۴ در گزینه (۱) تابع g در $x=1$ حد دارد. در گزینه (۲) نیز هر دو تابع f و g در $x=1$ دارای حد هستند. اما در بقیه گزینه‌ها توابع f و g در $x=1$ حد ندارند، پس:

$$(3) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 1+2=3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2) = 0-2=-2 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] = 1-1=0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] = 0-1=-1 \end{cases}$$

اعمال جبری در حد توابع

اگر حد توابع f, g در $x=a$ موجود بوده و به ترتیب برابر اعداد حقیقی L_1, L_2 باشد، آن‌گاه می‌توانیم اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، ضرب عدد، توان رساندن و ریشه n ام را آزادانه به‌کار ببریم. البته باید توجه کرد که در تقسیم دو تابع، حد تابع واقع در مخارج کسر صفر نباشد و نیز در ریشه زوج گرفتن، حد تابع زیر رادیکال مقداری منفی نباشد؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L_1^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$

تذکر در $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)}$ ، توجه کنید که $\sqrt[n]{f(x)}$ حتماً باید در یک همسایگی a تعریف شده باشد و برای n های زوج $L_1 \geq 0$ باشد.

مثلاً تابع $f(x)=x$ در نقطه $x=0$ حد دارد، اما تابع $y=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x}$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا در همسایگی چپ $x=0$ تعریف شده نیست.

تست اگر تابع f در $x=1$ دارای حد باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+4x-1}{2f(x)+x^2+1} = \frac{1}{3}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

$$-7 \quad (1) \quad 9 \quad (2) \quad -4 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+4x-1}{2f(x)+x^2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 4 - 1}{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 9 = 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$$

تست اگر دو تابع f و g در $x=1$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow 1} (f+2g)(x) = 6$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (f-g)(x) = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f^2}{g} \right)(x)$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (1) \quad 6 \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{4}{3} \quad (4)$$

۲ با توجه به قوانین حد داریم:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (f+2g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 6$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (f-g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{3}{2}$$

از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f^2}{g} \right)(x) = \frac{3^2}{\frac{1}{2}} = \frac{18}{1} = 18 \quad \text{پس:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{3}{2}$$

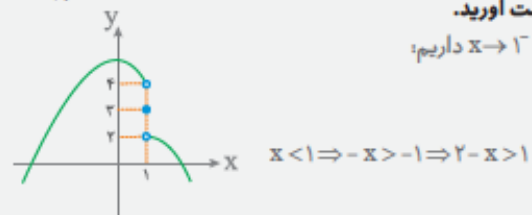
حد تابع مرکب

برای به دست آوردن حد تابع مرکب $f \circ g$ در $x = a$ ابتدا باید حد تابع درونی یعنی g را در $x = a$ به دست آوریم. اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow L} f(x)$$

اگر نمودار تابع f در $x = L$ دارای بُرش باشد [یعنی مرچپ و راست تابع f در $x = L$ برابر نباشند] برای تعیین $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ باید مشخص کنیم که g با مقادیر بیشتر از L به L نزدیک می شود یا با مقادیر کمتر از آن. سپس حد تابع f را وقتی $x \rightarrow L^+$ یا $x \rightarrow L^-$ محاسبه می کنیم.

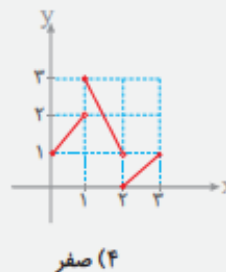
مثال نمودار تابع f به صورت زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(2-x)$ را به دست آورید.



یعنی وقتی $x \rightarrow 1^-$ عبارت $2-x$ کمی بزرگتر از یک است، بنابراین برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(2-x)$ کافیهست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. حاصل چه تعداد از حدهای زیر به درستی محاسبه شده است؟



الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(2-x^2) = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+2) = 1$

۱) ۲) ۳) ۴) صفر

۲ به بررسی عبارت ها می پردازیم:

الف) وقتی $x \rightarrow 0^+$ یعنی $x > 0$ پس $1-x < 1$ است، در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ و داریم:

ب) وقتی $x \rightarrow 0$ پس $x^2 \rightarrow 0^+$ و $2-x^2 \rightarrow 2^-$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} f(2-x^2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ بنابراین:

پ) وقتی $x \rightarrow 0^-$ نتیجه می گیریم $2+x \rightarrow 2^-$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

تعیین مقدار پارامتر در حد تابع

هرگاه از ما بخواهند مقدار پارامترهای تابع را به گونه ای تعیین کنیم که تابع در یک نقطه مشخص دارای حد باشد، باید حد چپ و راست تابع را در نقطه مشخص شده به دست آوریم و آن ها را مساوی قرار دهیم تا به کمک تساوی، مقدار پارامتر را تعیین کنیم.

تست به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \frac{a|x|}{x} - f(x)$ در $x=0$ حد دارد؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۲

۴ برای این که تابع در $x=0$ دارای حد باشد، باید حد راست و حد چپ آن در این نقطه برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a(x)}{x} - f(0) \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{a(-x)}{x} - f(0) \right) = -a - f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{a(-x)}{x} - f(0) \right) = -a - f(0)$$

بنابراین از (۱) و (۲) داریم:

حد تابع دو ضابطه ای

برای محاسبه حد در توابع چند ضابطه ای به صورت $f(x) = \begin{cases} \bullet & x > a \\ \blacktriangle & x < a \end{cases}$ که در آن $\bullet$ و $\blacktriangle$ عبارت هایی بر حسب x هستند:

۱ اگر بخواهیم حد تابع را در نقطه ای غیر از نقطه مرزی a محاسبه کنیم، باید به سراغ ضابطه ای برویم که نقطه مورد نظر متعلق به بازه متناظر با آن باشد. ۲ اگر بخواهیم حد تابع را در $x=a$ [نقطه مرزی] محاسبه کنیم، باید حد چپ و راست تابع را به دست آوریم.

مثلاً برای محاسبه حد تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 2 \\ x^2 & x \leq 2 \end{cases}$ در نقطه مرزی $x=2$ حد

راست و چپ تابع را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

تابع در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 2-1 = 1$$

تست اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+6 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ کدام

تابع زیر در $x=1$ حد دارد؟

۱) $f+g$ ۲) $\frac{f}{g}$ ۳) $f-g$ ۴) $f \times g$

۳ حد راست و چپ همه توابع داده شده را به دست می آوریم:

$$1) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+1+x-2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+6+2x) = 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-2} = -\frac{2}{1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+6}{2x} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+1-(x-2)) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+6-2x) = 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((3x+1).(x-2)) = -\frac{2}{1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((x^2+6).(2x)) = 14 \end{cases}$$

رفع ابهام

اگر حد هر دو تابع f, g در $x = a$ صفر باشد، آن گاه حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ را نمی توان با جای گذاری $x = a$ پیدا کرد؛ چون با جای گذاری $x = a$ به عبارت بی معنی و غیرقابل محاسبه $\frac{0}{0}$ می رسیم. عبارت $\frac{0}{0}$ یکی از حالت هایی است که به آن مبهم می گویند.

در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ، صورت و مخرج دقیقاً عدد صفر نیستند، بلکه به سمت صفر نزدیک می شوند، بنابراین می توانیم عامل های صفر شونده در صورت و مخرج را مشخص و با هم ساده کنیم. به این عمل رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می گویند.

مثلاً برای محاسبه حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8}$ در $x = 2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

در توابع شامل جزء صحیح، اگر پس از حذف برکت، صورت یا مخرج دقیقاً صفر شود، حالت مبهم ایجاد نمی شود و به ترتیب، جواب صفر یا تعریف نشده می شود. به حد های زیر توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x-1]}{x-1} = \frac{[1^+-1]}{1^+-1} = \frac{[0^+]}{0^+} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x^2+2}{[x-2]-3} = \frac{6^2+2}{[6^- - 2] - 3} = \frac{38}{[4^-] - 3} = \frac{38}{3-3} = \frac{38}{0} = \text{تعریف نشده}$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟ (داخل - ۹۹)

$$1) \infty \quad 2) -1 \quad 3) \text{ صفر} \quad 4) 1$$

۳ وقتی $x \rightarrow (-2)^-$ مقدار $[x]$ برابر ۳- می شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x]+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3+3}{x+2} = \frac{0}{\text{حدی}} = 0$$

برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ می توانیم به کمک فاکتورگیری و تجزیه یا گویا کردن، عوامل صفرشونده مشترک در صورت و مخرج کسر را از بین ببریم و سپس حاصل حد را به دست آوریم.

برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ به کمک فاکتورگیری و تجزیه به مثال زیر توجه کنید:

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2 + 3(x-2)}{x^2 - x - 2}$ را به دست آورید.

۱) عامل صفرشونده را در صورت و مخرج کسر ایجاد کرده و از آن فاکتور می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)((x-2)+3)}{(x-2)(x+1)}$$

۲) عامل صفرشونده صورت و مخرج کسر را ساده می کنیم و حاصل را با کمک قوانین حد به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)+3}{x+1} = \frac{0+3}{2+1} = 1$$

تست اگر $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 4$ و $f(x) = \begin{cases} 2ax-3 & ; x < -2 \\ -x^2+1-a & ; x \geq -2 \end{cases}$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$1) 2 \quad 2) -2 \quad 3) -1 \quad 4) 1$$

۲ برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ از ضابطه بالا و برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ از ضابطه پایین استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (2ax-3) = -4a-3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-x^2+1-a) = -4+1-a = -3-a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 4 \Rightarrow \underbrace{(-4a-3) + (-3-a)}_{-5a-6} = 4 \Rightarrow a = -2$$

تست اگر حد تابع $f(x) = \begin{cases} (b+1)[x]+|x| & ; x > -1 \\ 3 & ; x = -1 \\ a[x]+2bx-1 & ; x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ برابر ۵ باشد، مقدار a کدام است؟

$$1) 7 \quad 2) -3 \quad 3) 2 \quad 4) -5$$

۳ چون حد تابع f در $x = -1$ برابر ۵ است، پس حد راست و حد چپ تابع نیز برابر ۵ هستند:

$$1) x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow [x] = -1, |x| = -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ((b+1)[x]+|x|) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-(b+1)-x)$$

$$= -(b+1) - (-1) = -b-1+1 = -b \Rightarrow -b = 5 \Rightarrow b = -5$$

$$2) x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow [x] = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (a[x]+2bx-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (-2a+2(-5)x-1)$$

$$= -2a-1+(-1)-1 = -2a+9 = 5 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2$$

در توابع چندضابطه ای به صورت $f(x) = \begin{cases} k & ; x = a \\ \Delta & ; x \neq a \end{cases}$ که در آن k عددی حقیقی و ثابت باشد، برای محاسبه حد تابع f در هر نقطه، از جمله خود نقطه $x = a$ باید حد Δ را در آن نقطه محاسبه کنیم؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \Delta$$

مثال در تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ x^2-1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} f(x)$ را به دست آورید.

برای محاسبه حد تابع در هر نقطه فقط از ضابطه مربوط به $x \notin \mathbb{Z}$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-1) = 2^2-1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} (x^2-1) = (\sqrt{5})^2-1 = 5-1 = 4$$

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{5-x}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{4}}} = -2$$

در محاسبه حد کسره‌های شامل رادیکال، اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود، نمی‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم؛ در این حدها باید ابتدا رادیکال را از بین ببریم و سپس حد را محاسبه کنیم.

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

$$\left(1, -\frac{1}{6}, 2, -\frac{1}{12}, 3, \frac{1}{6}, 4, \frac{1}{12}\right)$$

۲ با جای‌گذاری $x=2$ در کسر داده‌شده به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{3\sqrt[2]{x+6}}}{1} \\ &= -\frac{1}{3\sqrt[2]{8}} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

البته بعد از برداشتن قدرمطلق، می‌توانستیم صورت کسر را گویا کنیم و رفع ابهام انجام دهیم.

هم‌ارزی کم توان و برنولی

برای رفع ابهام حدهای $\frac{0}{0}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت‌های چند جمله‌ای یا رادیکالی (فاقد عدد ثابت) وجود دارد، وقتی که متغیر به سمت صفر میل می‌کند، می‌توانیم عبارت با کم‌ترین درجه را در صورت و مخرج انتخاب و بقیه عبارت‌ها را حذف کنیم. مثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{2x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{6x}}$ کدام است؟

$$\left(2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{3}\right)$$

۲ با جای‌گذاری عدد صفر در تابع به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. از آنجایی که x به سمت 0^+ میل می‌کند برای رفع ابهام می‌توانیم عبارت‌های کم‌توان صورت و مخرج کسر را انتخاب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{6x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{6x}} = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

طبق هم‌ارزی برنولی، برای محاسبه حدهایی که شامل عبارت توان‌دار به صورت $(1+u)^n$ هستند، اگر $u \rightarrow 0$ می‌توانیم به جای $(1+u)^n$ عبارت $(1+u)^n - 1 + nu$ قرار دهیم، یعنی:

$$(1+u)^n - 1 + nu$$

برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ به کمک گویا کردن کسره‌های شامل $a+\sqrt{b}$ یا $a+\sqrt[3]{b}$ به مثال زیر توجه کنید:

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-\sqrt{x+3}}{x-1}$ را به دست آورید.

۱) در کسره‌های شامل رادیکال با فرجه ۲، صورت و مخرج کسر را در مزدوج ضرب و در کسره‌های شامل رادیکال با فرجه ۳ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-\sqrt{x+3}}{x-1} \times \frac{2x+\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-x-3}{(x-1)(2x+\sqrt{x+3})}$$

۲) از عامل صفرشونده در صورت و مخرج کسر فاکتور گرفته و آن را ساده می‌کنیم و حاصل را با کمک قوانین محاسبه حد، به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(2x+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+3}{2x+\sqrt{x+3}} = \frac{4(1)+3}{2+2} = \frac{7}{4}$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3}$ کدام است؟

$$\left(1, -\frac{5}{12}, 2, -\frac{7}{12}, 3, -\frac{5}{24}, 4, -\frac{7}{24}\right)$$

۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3} &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3} \times \frac{x-\sqrt{x+12}}{x-\sqrt{x+12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-4)(x+3)}{x^2-(x+12)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-2} \\ &= \frac{-4}{(-4)(-3-3)} = \frac{-4}{24} \end{aligned}$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-[2x]}{x^2-x-2}$ کدام است؟

$$\left(1, \frac{2}{3}, 2, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}\right)$$

۱ وقتی $x \rightarrow 2^+$ یعنی $x > 2$ و در نتیجه $2x > 4$ است. پس در این شرایط $[2x] = 4$ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4}{x^2-x-2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{3}$$

قاعده هوییتال

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر پس از جای‌گذاری $x=a$ به ابهام $\frac{0}{0}$ برسیم، برای رفع ابهام می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم. طبق این قاعده به جای $\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از کسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x \rightarrow a$ حد بگیریم، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثلاثی

برای رفع ابهام کسره‌های $\frac{0}{0}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت مثلاثی وجود دارد، باید عامل صفرشونده در صورت و مخرج را به کمک اتحادهای جبری یا مثلاثی، تجزیه یا فاکتورگیری از بین ببریم.

مثلاً برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$ با جای‌گذاری $x = \frac{\pi}{6}$ در صورت و مخرج به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} = 1 + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

برای محاسبه حدهای مثلاثی، وقتی کمان آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند، می‌توانیم از هم‌ارزی مثلاثی استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلاثی وقتی $u \rightarrow 0$

$\sin u \sim u$	$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$	$\tan u \sim u$
$\sin^n u \sim u^n$	$\cos^n u \sim 1 - n \frac{u^2}{2}$	$\tan^n u \sim u^n$

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\tan x}$ را به دست آورید.

چون $2x \rightarrow 0^-$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌های مثلاثی استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2(1-\cos 2x)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{2} \sin x}{x} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌ها، همه عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، حاصل حد، قابل اطمینان نیست. برای حل این مسائل باید از فاکتورگیری، اتحادها و گویا کردن استفاده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ کدام است؟ (خارج-۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) 2π

۲) وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، مقدار $[x]$ برابر ۱ است، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

مثلاً برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^3 - 1}{x^2}$ می‌توانیم از هم‌ارزی برنولی استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^3 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

می‌توان از هم‌ارزی برنولی نتیجه گرفت اگر $u \rightarrow 0$ آن‌گاه هم‌ارزی $\sqrt[n]{1+u} \sim 1 + \frac{1}{n}u$ برقرار است.

یک مسئله خاص در رفع ابهام

اگر در محاسبه حد توابع کسری که در صورت و مخرج کسر، عبارت چندجمله‌ای یا رادیکالی وجود دارد، حاصل حد یک عدد حقیقی شود اما حد صورت یا مخرج کسر برابر با صفر باشد، آن‌گاه کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و نیاز به رفع ابهام دارد.

تست اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{4}$ باشد، آن‌گاه b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۲) صورت کسر به ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود، اما از آنجایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{1}{4}$ است، پس کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین $x=2$ ریشه مخرج کسر نیز است: $a(2)+b=0$ (۱)
از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

با جای‌گذاری a در (۱) داریم:

$$2\left(\frac{1}{4}\right) + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

تست اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{4}$ باشد، b کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۱) مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود، اما از آنجایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{3}{4}$ است، پس کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین $x=1$ ریشه صورت کسر نیز است:

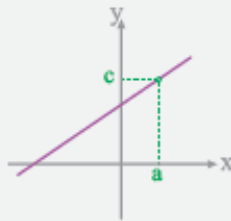
$$1) \sqrt{a+b}-2=0 \Rightarrow \sqrt{a+b}=2 \Rightarrow a+b=4$$

از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{3}{4}$ می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{a+b}}}{2}$$

$$= \frac{a}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2a = 24 \Rightarrow a = 12 \xrightarrow{(1)} 12 + b = 4 \Rightarrow b = -8$$

تست نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + b}$ است. مقدار $a - b + c$ کدام است؟



۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۴ با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار تابع f در سمت راست محور x ها دارای حفره است، پس $x = a$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است. از آنجایی که ریشه‌های صورت کسر $x = 1$ و $x = -3$ هستند، پس $a = 1$ بوده و مخرج کسر را نیز صفر می‌کند:

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

از طرفی داریم:

$$c = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

پس $a - b + c = 1 - (-1) + 4 = 6$ است.

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

۴ (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

نمودارهای حفره‌دار



در بعضی سؤالات، نمودار تابع کسری f داده می‌شود که در نقطه $x = a$ دارای حفره [نقطه توغالی]

است. در این سؤالات باید به دو مورد زیر توجه کرد:

۱ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است.

۲ حاصل حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است.

درس حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

مفهوم حد بی‌نهایت

اگر با نزدیک شدن x به a ، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش یا کاهش یابد، آن‌گاه می‌گوییم، حاصل حد به بی‌نهایت میل می‌کند و به صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نشان داده می‌شود. این گونه حدها را حد نامتناهی می‌نامند. توجه کنید $+\infty$ ، $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند؛ یعنی این حدها وجود ندارند.

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم. به طور مشابه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در شکل مقابل رسم شده است.

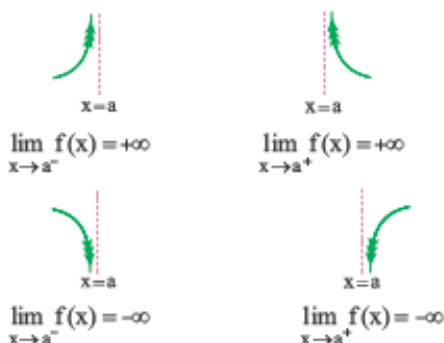


در جدول زیر، رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x = 0$ بررسی می‌کنیم؛ به صفر نزدیک می‌شویم. به صفر نزدیک می‌شویم.

x	...	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	...
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	...	100	10000	تعریف نشده	10000	100	...

بنابراین می‌توان گفت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ است.

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگتر کنیم، به شرطی که x با مقادیر بزرگتر از a را به قدر کافی به a نزدیک کرده باشیم. سایر حد‌های یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.



تست در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2-1}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (3)$$

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

چون تابع f برای $x \leq 0$ تعریف نشده است. پس $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وجود

ندارد. توجه کنید دامنه تابع، بازه $(0, +\infty)$ است. حال حاصل حد تابع را وقتی $x \rightarrow 0^+$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

تست مقدار $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء

داخل -۱۴۰۰) صحیح است. (۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $+\infty$

۱ وقتی $x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-$ ، یعنی $x < -\frac{1}{4}$ ، پس:

$$x^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} < 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x^2} < 12 \Rightarrow [\frac{3}{x^2}] = 11 \\ -\frac{2}{x^2} > -8 \Rightarrow [-\frac{2}{x^2}] = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x+6}{16x+8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر با عدد حقیقی و

مخالف صفر L و حاصل $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{\infty} = 0$$

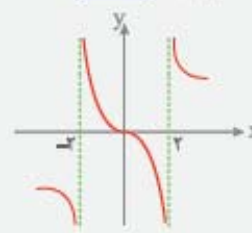
مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+3}{\tan x}$ را به دست آورید.

با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، واضح است که $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = -\infty$ است.

از طرفی $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+3) = \frac{\pi}{4} + 3$ بنابرین طبق قضیه فوق:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+3}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{4} + 3}{\infty} = 0$$

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty \quad (4)$$

۳ با توجه به نمودار، وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ شاخه منحنی به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$ است.

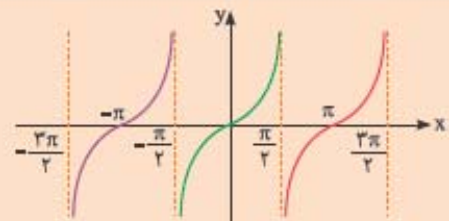
بررسی تابع تانژانت در $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$$



محاسبه حدود نامتناهی

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر با عدد حقیقی L و

مخالف صفر و حاصل $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ برابر با صفر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{0} = \infty$$

در حالی که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ است؛ برای مشخص کردن علامت ∞ ،

علامت‌های حد صورت و صفر مخارج [یعنی 0^+ یا 0^-] را بررسی می‌کنیم که به صورت جدول زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

(۲) اگر $L > 0$ و g در همسایگی محذوف a منفی باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L > 0}{0^-} = -\infty$$

(۱) اگر $L > 0$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L > 0}{0^+} = +\infty$$

(۴) اگر $L < 0$ و g در همسایگی محذوف a منفی باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L < 0}{0^-} = +\infty$$

(۳) اگر $L < 0$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L < 0}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

تست در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sqrt{2} \cos x}$ کدام بیان، درست است؟ (خارج - ۹۸)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) &= +\infty \quad (۲) & \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) &= -\infty \quad (۱) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) &= +\infty \quad (۴) & \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) &= -\infty \quad (۳) \end{aligned}$$

۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) با قرار دادن $x = \frac{2\pi}{3}$ در تابع f ، مخرج کسر صفر می‌شود، زیرا $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$(۱) \text{ و } (۲) \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{2} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$(۳) \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{2} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}^+} = +\infty$$

(۴) چون $x = \frac{2\pi}{3}$ ریشه ساده مخرج کسر است، پس ممکن نیست حد دوطرفه تابع فقط برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

تعیین مقدار پارامتر در حدود نامتناهی

اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، اما مشخص نباشد که x از

کدام جهت به a میل می‌کند، در این صورت، وقتی $x \rightarrow a$:

۱ حاصل حد مخرج برابر با صفر است.

۲ علامت حد مخرج همواره مثبت یا همواره منفی است.

(اگر مخرج کسر عبارتی درجه دوم باشد، نتیجه می‌گیریم که عبارت مربع کامل است.)

مثال اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x^2-2ax+b} = +\infty$ باشد، پارامترهای a ، b را به دست آورید.

وقتی $x \rightarrow 1$ ، صورت کسر یعنی $2x+1$ به سمت ۳ می‌رود. حال برای آن که حد کسر بی‌نهایت شود، باید مخرج کسر به سمت صفر برود. پس باید $x=1$ ریشه مخرج کسر باشد. از طرفی علامت بی‌نهایت مثبت است، پس با توجه به این که حد صورت کسر مثبت است، حد مخرج کسر باید همواره مثبت باشد. پس $x=1$ ریشه مضاعف مخرج کسر است، نتیجه می‌گیریم مخرج کسر به صورت $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ خواهد بود. در این صورت خواهیم داشت:

$$-2 = -2a \Rightarrow a = 1 \text{ و } b = 1$$

قضایای حدود نامتناهی

اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر عدد حقیقی و مخالف صفر L و حاصل $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ نامتناهی باشد، آن‌گاه:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$L + \infty = +\infty$	$L - \infty = -\infty$	$(L)(+\infty) = +\infty$
	$-\infty$	$L - \infty = -\infty$	$L - (-\infty) = +\infty$	$(L)(-\infty) = -\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$L + \infty = +\infty$	$L - \infty = -\infty$	$(L)(+\infty) = -\infty$
	$-\infty$	$L - \infty = -\infty$	$L - (-\infty) = +\infty$	$(L)(-\infty) = +\infty$

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2 - \frac{1}{|x|})$ را به دست آورید.

از آن جایی که $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ است، با توجه

به جدول فوق $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2 - \frac{1}{|x|}) = -\infty$ است.

تست اگر $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \frac{1}{9-x^2}$ کدام می‌تواند باشد؟

$$(۱) 10x + 3 \quad (۲) 10 - x \quad (۳) 10 - 3x \quad (۴) 10 - x$$

۴ وقتی $x \rightarrow 3^+$ ، مخرج کسر یعنی عبارت $9 - x^2$ به سمت ۰ میل می‌کند. از طرفی چون حاصل حد برابر $+\infty$ است، مقدار تابع $f(x)$ در همسایگی راست ۳، منفی است؛ پس $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ عددی منفی خواهد بود. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$(۱) \lim_{x \rightarrow 3^+} (10x + 3) = 10 \cdot (3) + 3 = 33$$

$$(۲) \lim_{x \rightarrow 3^+} (10 - x) = 10 - (3) = 7$$

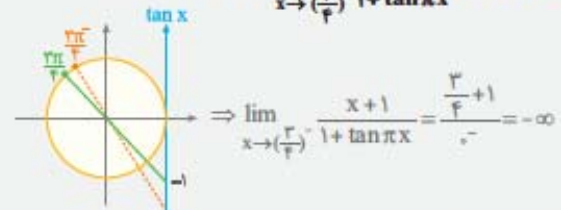
$$(۳) \lim_{x \rightarrow 3^+} (10 - 3x) = 10 - 3(3) = 1$$

$$(۴) \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 10) = 3(3) - 10 = -1$$

حدهای نامتناهی مثلثاتی

در سوالاتی که حاصل حد یک کسر شامل عبارت‌های مثلثاتی نامتناهی خواسته می‌شود، برای این که تعیین کنیم حاصل $+\infty$ می‌شود یا $-\infty$ می‌توانیم از دایره مثلثاتی استفاده کنیم.

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x+1}{1 + \tan \pi x}$ را به دست آورید.



تست نمودار تابع $f(x) = \frac{a}{x^2+bx+c}$ به صورت زیر است. مقدار a کدام است؟



۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر ۴ (۴) -۱

۱ در اطراف $x=1$ ، شاخه‌های منحنی تابع f ، به سمت $+\infty$ میل می‌کنند، پس $x=1$ ریشه مضاعف مخرج است. بنابراین مخرج کسر، به صورت $(x-1)^2$ است و خواهیم داشت:

$$x^2+bx+c = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow b = -2, c = 1$$

از طرفی منحنی از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{a}{0+b(0)+c} = 1 \Rightarrow \frac{a}{1} = 1 \Rightarrow a = 1$$

مفهوم حد در بی‌نهایت

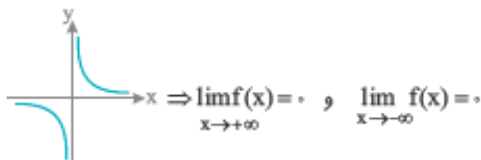
فرض کنید تابع f در بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به مقدار دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود، یعنی وقتی حد تابع در $+\infty$ برابر L می‌شود، نمودار تابع در $+\infty$ به خط افقی $y=L$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.



فرض کنید تابع f در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به مقدار دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x به قدر کافی کوچک اختیار شود، یعنی وقتی حد تابع در $-\infty$ برابر L می‌شود، نمودار تابع در $-\infty$ به خط افقی $y=L$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.



مثلاً با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، داریم:



تست اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{2x^2+ax+b} = -\infty$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر ۴ (۴) -۱

۲ وقتی $x \rightarrow 2$ حاصل حد مقداری نامتناهی است. پس $x=2$ ریشه مضاعف مخرج کسر است. از طرفی با نزدیک شدن x به عدد ۲ صورت کسر عددی منفی و حاصل حد $-\infty$ شده است. پس $x=2$ باید ریشه مضاعف مخرج کسر باشد. پس مخرج کسر شامل عبارت $(x-2)^2$ است. حال با توجه به این که ضریب x^2 برابر ۲ می‌باشد، مخرج کسر به صورت $2(x-2)^2$ خواهد بود:

$$2x^2+ax+b = 2(x-2)^2 = 2(x^2-4x+4) = 2x^2-8x+8$$

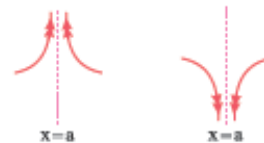
پس $a = -8$ و $b = 8$ و در نتیجه $a+b = 0$ است.

تعیین مقدار پارامتر در سؤالات نموداری

در توابع کسری، اگر نمودار تابع f را داشته باشیم، برای مشخص کردن مقادیر پارامترهای ضابطه f ، باید به دو مورد زیر توجه کنیم:

۱ اگر با میل کردن x به سمت a ، شاخه‌های منحنی به سمت مثبت یا منفی بی‌نهایت بروند، نقطه $x=a$ ریشه مضاعف مخرج کسر خواهد بود.

۲ طول نقطه توخالی در نمودار، ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است. اگر با میل کردن x به سمت a ، هر دو شاخه منحنی به سمت مثبت بی‌نهایت یا منفی بی‌نهایت بروند، می‌گوییم تابع f در $x=a$ انصال مضاعف دارد.



تست نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+c}$ به صورت زیر است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴ چون شاخه‌های منحنی در اطراف $x=0$ به سمت بی‌نهایت می‌روند، پس $x=0$ ریشه مضاعف مخرج کسر است:

$$x^2+b(0)+c=0 \Rightarrow c=0$$

از طرفی $x=2$ طول نقطه توخالی است، پس $x=2$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است:

$$2+a=0 \Rightarrow a=-2$$

$$2^2+b(2)+0=0 \Rightarrow 2b=-4 \Rightarrow b=-2$$

بنابراین $a+b+c = (-2) + (-2) + 0 = -4$ است.

● فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد. در این صورت:

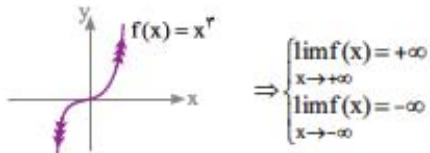
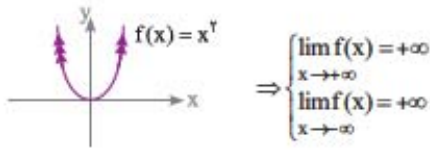
۱ رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از

هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که x به مقدار کافی کوچک و منفی اختیار شود.

۲ رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از

هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که x به مقدار کافی کوچک و منفی اختیار شود.

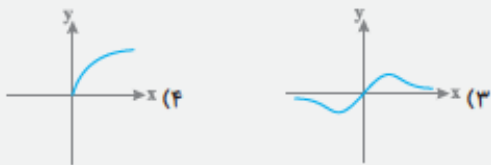
مثلاً با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^3$ و $f(x) = x^2$ خواهیم داشت:



تذکره رابطه‌هایی مانند $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ را حد

نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. در این حالت‌ها حد وجود ندارد، زیرا $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

تست حد کدامیک از توابع زیر در بی‌نهایت، نامتناهی است؟



۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

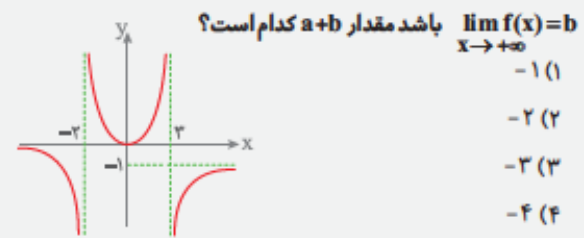
(۱) حد تابع در بی‌نهایت برابر ۱ است.

(۲) وقتی $x \rightarrow +\infty$ حاصل حد تابع برابر صفر و وقتی $x \rightarrow -\infty$ حاصل حد تابع برابر ۱- است.

(۳) حد تابع در بی‌نهایت برابر صفر است.

(۴) وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، حد تابع برابر $+\infty$ می‌شود.

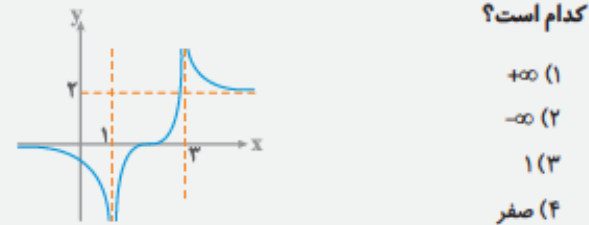
تست نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و



۳ با توجه به نمودار، وقتی $x \rightarrow (-2)^-$ شاخه منحنی به سمت $-\infty$ میل می‌کند، پس $a = -2$ است. از طرفی وقتی $x \rightarrow +\infty$ حاصل حد برابر ۱- می‌شود، پس $b = -1$ است. بنابراین:

$$a+b = (-2) + (-1) = -3$$

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$



۴ با توجه به نمودار، وقتی $x \rightarrow 1$ نتیجه می‌گیریم $f(x) \rightarrow -\infty$ ؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

قضایای محاسبه حد در بی‌نهایت

اگر n عدد طبیعی باشد، قضایای زیر برای محاسبه حد در بی‌نهایت برقرارند:

۱ برای n های زوج:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^n = +\infty$$

۲ برای n های فرد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

۳ اگر a عدد حقیقی باشد، برای تمام مقادیر n :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

● فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. در این صورت:

۱ رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از

هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

۲ رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از

هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

۳ سه حالت برای n در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $n < 3$ باشد، آنگاه جمله پرتوان در صورت کسر برابر x^3 است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n + x^2 - 5}{x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$$

ب) اگر $n = 3$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

پ) اگر $n > 3$ باشد، جمله پرتوان صورت کسر برابر $2x^n$ است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n + x^2 - 5}{x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n}{x^3} = \frac{n}{3} + \infty$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x}{x^n + x^3}$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱) ۲) ۳) ۴) بی‌شمار
۳ درجه عبارت پرتوان صورت کسر برابر ۳ است. حال با توجه به مقدار n حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$۱) n < 3: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x}{x^n + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$۲) n = 3: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x}{x^3 + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{2x^3} = 1$$

$$۳) n > 3: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x}{x^n + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^n} = \frac{n}{3} + \infty$$

برای محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و سپس عبارت را بدون قدرمطلق بنویسیم. مثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{3x - \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - (-x)} = \frac{1}{4}$$

برای محاسبه حد توابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت، اگر پس از انتخاب جملات پرتوان، همه عبارت‌ها با هم ساده شوند، عبارت به دست آمده قابل اطمینان نیست. در این مسائل باید ابتدا عبارت را با کمک فاکتورگیری یا اتحادها ساده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2 - (x-1)^2}{5x - 4}$ را به دست آورید.

جملات پرتوان صورت و مخارج را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2 - (x-1)^2}{5x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2}{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{5x}$$

چون با انتخاب جملات پرتوان در صورت کسر، عبارت‌های باقی‌مانده با یک‌دیگر ساده می‌شوند، جواب به دست آمده قابل اطمینان نیست، پس ابتدا با اتحاد مربع دو جمله‌ای، هر یک از پرانتزهای صورت کسر را بازمی‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2 - (x-1)^2}{5x - 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1)}{5x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 3}{5x - 4} \xrightarrow{\text{انتخاب پرتوان‌ها}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{5x} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

ریزه‌کاری‌هایی در محاسبه حد در بی‌نهایت

برای این‌که بتوانیم حد توابع گویا را در بی‌نهایت سریع‌تر محاسبه کنیم، می‌توانیم از قضیه پرتوان استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

کافیست در صورت و مخارج فقط جمله پرتوان (جمله‌ای که بیشترین توان را دارد) را نگه داریم و بقیه جمله‌ها را حذف کنیم. به عبارت دیگر، باید

$$\text{حاصل } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ را به دست آوریم که با توجه به مقدار } n, m, \text{ با}$$

سه حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر درجه صورت و مخارج کسر یکسان باشند، حاصل حد برابر نسبت ضرایب آن‌ها است:

$$n = m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x^2 - 7}{3x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

۲ اگر درجه مخارج کسر بیشتر باشد، حاصل حد برابر صفر است:

$$n < m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2}{x^2 - x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1} = 5$$

۳ اگر درجه صورت کسر بیشتر باشد، حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ است:

$$n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^2 - (x+3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)^2}$ را حساب کنید.

با انتخاب جمله پرتوان در صورت و مخارج کسر داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^2 - (x+3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)^2 - (x)^2}{(\sqrt{x})(\sqrt{x})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^2}{\sqrt{x}(x\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \end{aligned}$$

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n + x^2 - 5}{x^3 + x^2 + 1}$ برابر چه تعداد از عبارت‌های

زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱	ب) ۳	پ) $+\infty$	۴) صفر
۱) ۱	۲) ۲	۳) ۳	۴) صفر

ترکیب حد $\frac{0}{0}$ و حد در بی نهایت

در بعضی سوالات پارامتری حاصل حد را وقتی $x \rightarrow \infty$ می دهند، سپس حاصل همان حد را در $x \rightarrow a$ می خواهند که معمولاً از نوع مبهم $\frac{0}{0}$ است. برای حل این گونه سوالات ابتدا به کمک قضیه پرتوان، پارامترها را می یابیم، سپس تابع را بازنویسی و حد تابع را در $x \rightarrow a$ حساب می کنیم.

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آن گاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۲ با توجه به قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + |2x|}{2x}$$

$$\xrightarrow{|2x|=2x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{a+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

با قرار دادن $x = -1$ درون کسر به ابهام $\frac{0}{0}$ می رسیم، پس:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{\Delta x}{\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 - \frac{\Delta}{2 \times 3}}{2}$$

$$= \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ باشد، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ کدام است؟ (کنکور مجدد - ۱۴۰۱)

(۱) $5/0$ (۲) 1 (۳) $1/5$ (۴) 2

۳ چون $x \rightarrow -\infty$ پس جملات پرتوان صورت و مخبر کسر را انتخاب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-1)x}{x} = a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 12}}}{1}$$

$$= 2 + \frac{-2}{\sqrt{16}} = \frac{3}{2}$$

تست مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$ کدام است؟ (خارج - ۱۴۰۰)

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) 1 (۳) صفر (۴) -1

۴ در صورت و مخبر کسر، جملات پرتوان را انتخاب می کنیم و داریم:

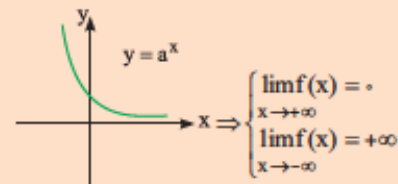
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4} + \sqrt{x^2} - x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

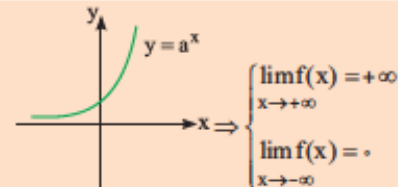
حد توابع نمایی در بی نهایت

می دانیم در یک تابع نمایی، اگر پایه عددی بین 0 تا 1 باشد، این تابع اکیداً نزولی و اگر پایه عددی بزرگتر از 1 باشد، این تابع اکیداً صعودی است. بنابراین با توجه به نمودار توابع نمایی داریم:

$$0 < a < 1$$



$$a > 1$$



مثال در تابع نمایی $f(x) = (\Delta m - 2)^x$ رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ برقرار است. حدود m را به دست آورید.

چون در تابع نمایی $f(x) = (\Delta m - 2)^x$ رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ برقرار است، پس تابع f اکیداً نزولی است، بنابراین پایه عددی بین 0 و 1 است.

اگر تابع f به صورت مجموع چند عبارت نمایی به فرم a^{x+k} باشد، حاصل حد تابع f وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر حاصل حد عبارت نمایی با پایه بزرگتر و وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر حاصل حد عبارت نمایی با پایه کوچکتر است.

مثال اگر $f(x) = \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 2^x + 3 \times 3^x}{2^x + 3^x} = 3$$

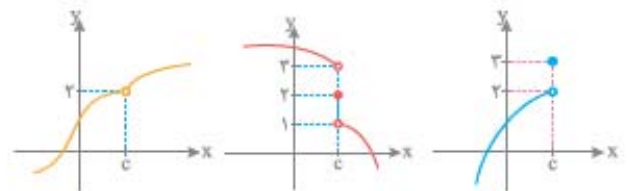
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \times 2^x}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \times 2^x}{2^x} = 2$$

مفهوم پیوستگی

تابع f را در نقطه $x=a$ از دامنه‌اش پیوسته می‌گوییم، هر گاه حد این تابع در $x=a$ موجود و برابر $f(a)$ باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

توابع زیر در نقطه $x=c$ ناپیوسته‌اند و علت ناپیوستگی برای هر کدام مشخص شده است:



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 2$$

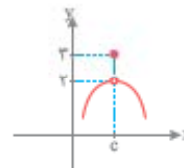
وجود ندارد، $f(c)$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = 1$$

وجود ندارد، $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$

$$f(c) = 2$$

$$f(c) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 2$$

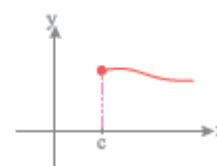
$$f(c) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 2$$

$$f(c) = 1$$



اگر $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ یعنی حد راست تابع

با مقدار تابع در $x=c$ برابر باشد، تابع f را از طرف راست پیوسته می‌نامیم.



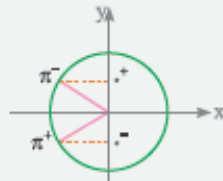
اگر $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ یعنی حد چپ تابع

با مقدار تابع در $x=c$ برابر باشد، تابع f را از طرف چپ پیوسته می‌نامیم.

تست تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{1 + [\sin x]}$ از نظر پیوستگی در $x = \pi$ چگونه است؟

- (۱) از راست پیوسته است. (۲) از چپ پیوسته است. (۳) پیوسته است. (۴) حد دارد ولی ناپیوسته است.

۲ تابع f در $x = \pi$ فقط از چپ پیوسته است، چون:



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{1 + [\sin x]} &= \frac{1}{1 + [\sin \pi^-]} = \frac{1}{1 + [0^+]} = \frac{1}{1+0} = 1 \\ \Rightarrow f(\pi) &= \frac{1}{1 + [\sin \pi]} = \frac{1}{1+0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{1 + [\sin x]} &= \frac{1}{1 + [\sin \pi^+]} = \frac{1}{1 + [0^-]} = \frac{1}{1-0} = 1 \end{aligned}$$

تست در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ چه تعداد از

عبارت‌های زیر صحیح است؟

(الف) در $x=1$ پیوسته است.

(ب) در $x=3$ پیوستگی چپ دارد.

(پ) در بازه $[-1, 3]$ پیوسته است.

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) صفر

۱ ابتدا دامنه تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq 3$$

تابع f در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ پیوسته است. پس (الف) درست است. در $x=2$ پیوستگی چپ و در $x=3$ پیوستگی راست دارد. پس (ب) نادرست است. در بازه $[-1, 3]$ نیز ناپیوسته است. پس (پ) نادرست است.

یافتن مقدار پارامتر برای پیوسته بودن

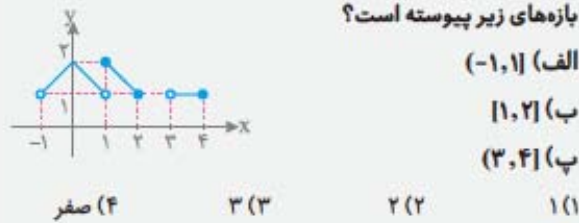
در بعضی سوالات، ضابطه یک تابع داده می‌شود به طوری که در آن یک یا چند پارامتر وجود دارد و از ما می‌خواهند که مقدار پارامترها را به گونه‌ای تعیین کنیم که تابع در یک نقطه مشخص یا یک بازه، پیوسته باشد. در این سوالات باید با توجه به تعریف پیوستگی تابع، مقدار پارامترها را بیابیم.

مثلاً برای این که تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 3 \\ 3x+a & x > 3 \end{cases}$ در تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید در $x=3$ پیوسته باشد. پس:

$$\begin{aligned} f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x+a) = 9+a \end{aligned} \Rightarrow 9+a=1 \Rightarrow a=-8$$

تذکره اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع در چه تعداد از



۲ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

(الف) چون تابع f در $x=1$ از چپ پیوسته نیست، پس در بازه $(-1, 1]$ پیوسته نیست.

(ب) تابع f در $x=1$ پیوستگی راست، در $x=2$ پیوستگی چپ دارد.

(پ) تابع f در $x=4$ از چپ پیوسته است، پس در بازه $(3, 4]$ پیوسته است.

چند نکته درباره پیوستگی توابع به شکل $[f(x)]$

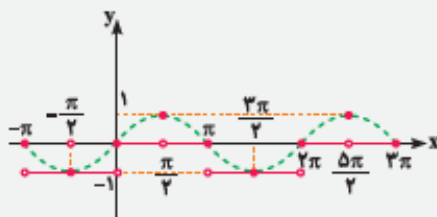
۱ در تمامی نقاطی مانند x که به ازای آن عبارت درون براکت مقداری صحیح شود، یعنی $f(x) \in \mathbb{Z}$ ، تابع $[f(x)]$ ناپیوسته خواهد بود مگر آن که x طول نقطه میخیم نسبی تابع باشد.

۲ اگر f تابعی صعودی باشد، آنگاه $[f(x)]$ در نقاطی که ناپیوسته است، پیوستگی راست دارد.

۳ اگر f تابعی نزولی باشد، آنگاه $[f(x)]$ در نقاطی که ناپیوسته است، پیوستگی چپ دارد.

مثال پیوستگی تابع $y = [\sin x]$ را در نقاط $x = \pi$ ، $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = 0$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ بررسی کنید.

با توجه به نمودار زیر، تابع $y = [\sin x]$ فقط در $x = \frac{3\pi}{2}$ که طول نقطه میخیم نسبی تابع است، پیوسته می‌باشد. همچنین واضح است که تابع در نقاطی مانند $x = 0$ و $x = 2\pi$ که در همسایگی آن‌ها رفتار صعودی دارد، از راست پیوسته و در نقاطی مانند $x = \pi$ که در همسایگی آن رفتار نزولی دارد، از چپ پیوسته است.



تست به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

- (۱) $1/5$ (۲) 1 (۳) -1 (۴) $-1/5$

۴ ابتدا حد تابع f را در $x = \frac{\pi}{2}$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin \frac{\pi}{2} + 1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

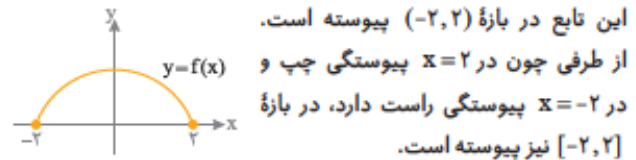
برای این که تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر $f(\frac{\pi}{2})$ باشد، پس $a = \frac{3}{2}$ است.

پیوستگی روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه از بازه (a, b) پیوسته، در نقطه $x = a$ پیوستگی راست و در نقطه $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

مثلاً در تابع f که نمودار آن به صورت زیر است، داریم:



تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه از بازه (a, b) پیوسته و در نقطه $x = a$ پیوسته از راست باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه از بازه (a, b) پیوسته و در نقطه $x = b$ پیوسته از چپ باشد.

برای بررسی پیوستگی تابع $y = [x]$ در بازه $[1, 3]$ با توجه به نمودار داریم:

۱ تابع در $x = 1$ فقط پیوستگی راست دارد.

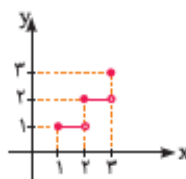
۲ تابع در بازه $(1, 2)$ پیوسته است.

۳ تابع در بازه $x = 2$ حد ندارد، زیرا حد چپ و راست وجود دارند اما برابر نیستند؛ پس

۴ تابع در $(2, 3)$ پیوسته است.

۵ تابع در $x = 3$ حد چپ دارد، ولی پیوستگی چپ ندارد.

بنابراین می‌توان گفت تابع در بازه $[1, 3]$ دارای دو نقطه ناپیوستگی به طول‌های $x = 2$ و $x = 3$ است.



مشتق

ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیاز این فصل مهم، توان و عبارت جبری، تابع و حد و پیوستگی است و کاملاً واضح است که خود، پیش‌نیاز فصل کاربرد مشتق است. البته دانستن مشتق در خیلی از فصل‌های دیگر کاربرد دارد که در تابع و حد و پیوستگی پررنگ‌تر از سایرین است.

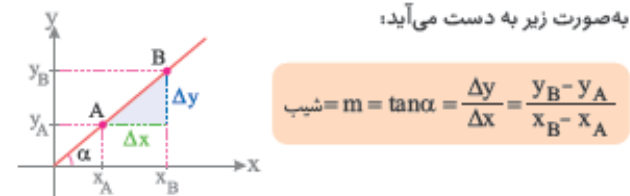
توصیه: سعی کنید با حل تست‌های زیاد بر روی روابط اولیه مشتق‌گیری، تعریف حدی مشتق و همچنین مفهوم خط مماس مسلط شوید. در سال‌های اخیر اکثر تست‌ها از موضوع‌های مشتق تابع مرکب، مشتق چپ و راست، معادله خط مماس و آهنگ تغییر طرح شده‌اند پس به این موضوع‌ها توجه ویژه‌ای کنید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۲	۲	۱	۱	۱	۲	۱	۲

درس مفهوم هندسی مشتق و خط مماس بر نمودار

شیب خط و خط مماس بر نمودار

شیب خط برابر با نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی است و به صورت زیر به دست می‌آید:

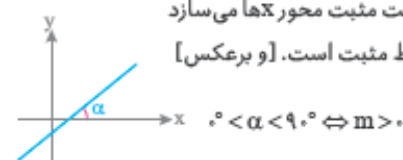


مثلاً شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(6, 11)$ و $B(8, -3)$ برابر است با:

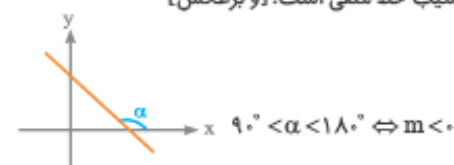
$$m = \frac{-3 - 11}{8 - 6} = \frac{-14}{2} = -7$$

علامت شیب خط

۱ اگر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ‌ها می‌سازد حاده باشد، آنگاه شیب خط مثبت است. [و برعکس]



۲ اگر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ‌ها می‌سازد منفرجه باشد، آنگاه شیب خط منفی است. [و برعکس]



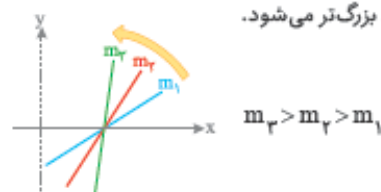
تذکر اگر خط، موازی محور x ‌ها باشد، آنگاه شیب آن برابر صفر و اگر خط موازی محور y ‌ها باشد، آنگاه شیب آن تعریف نمی‌شود.



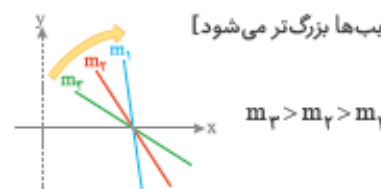
مقایسه شیب خط‌ها

برای مقایسه شیب خط‌ها به دو حالت زیر توجه کنید:

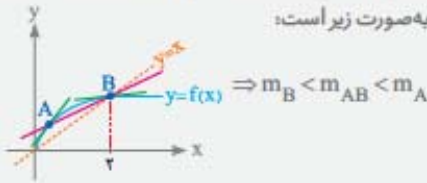
۱ اگر شیب خط مثبت باشد، هرچه زاویه حاده خط با جهت مثبت محور x ‌ها بیش‌تر باشد، شیب خط بزرگ‌تر می‌شود.



۲ اگر شیب خط منفی باشد، هرچه زاویه منفرجه خط با جهت مثبت محور x ‌ها کم‌تر باشد، خط‌ها به خط عمودی نزدیک‌تر شده، شیب‌ها کوچک‌تر می‌شوند. [اندازه شیب‌ها بزرگ‌تر می‌شود]



با توجه به نمودار و خطوط رسم شده، شیب نمودار در نقطه‌های A, B و شیب خط AB به صورت زیر است:



می‌خواهیم مقدار عددی شیب خط مماس را به دست بیاوریم. به سؤال زیر دقت کنید:



مثال شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ را با استفاده از تعریف شیب خط مماس به دست آورید.

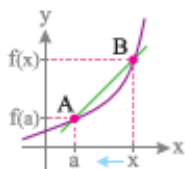
$$m_{\text{مماس}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x) - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

با جای گذاری $x = 1$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم؛ بنابراین آن را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 0$$

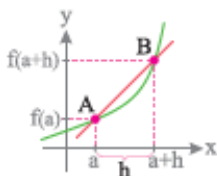
تعریف مشتق

دو نقطه A و B مطابق شکل روی نمودار تابع f قرار دارند. می‌دانیم اگر نقطه B را به قدر کافی به A نزدیک کنیم، شیب خط قاطع AB برابر با شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه A می‌شود و مقدار آن برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است. مقدار این حد را [اگر موجود و متناهی باشد] مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:



$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگر $x - a$ را برابر h در نظر بگیریم، آنگاه $x = a + h$ خواهد بود. در این صورت وقتی x به سمت a میل کند، مقدار h به سمت صفر میل می‌کند و تعریف مشتق تابع f در نقطه a به صورت زیر در می‌آید:



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

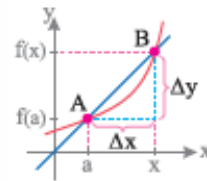
مثال مشتق تابع $f(x) = x^2$ در نقطه $x = 3$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$$

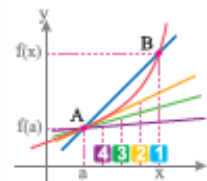
خط مماس بر نمودار

خط گذرنده از دو نقطه A و B را خط قاطع برای نمودار تابع f می‌نامند و شیب آن برابر است با:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

در شکل مقابل اگر نقطه B را روی نمودار تابع f ، به نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر کنیم، طول نقطه B یعنی x به ترتیب از روی نقاط (1) ، (2) ، (3) ، (4) و ... عبور کرده و به a نزدیک می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت: نقاط A و B تقریباً بر هم منطبق خواهند شد. پس وقتی نقطه B به قدر کافی به نقطه A نزدیک شود، شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B برابر است با:

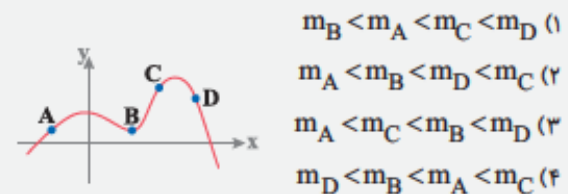


$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

این خط را خط مماس در نقطه A می‌نامند.

حالا که با مفهوم خط مماس و شیب آن آشنا شدیم می‌توانیم آنها را مقایسه کنیم.

تست با توجه به نمودار تابع f ، کدام رابطه میان شیب نقاط مشخص شده برقرار است؟ (کتاب دوسی)



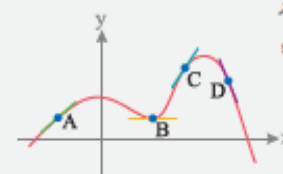
$$m_B < m_A < m_C < m_D \quad (1)$$

$$m_A < m_B < m_D < m_C \quad (2)$$

$$m_A < m_C < m_B < m_D \quad (3)$$

$$m_D < m_B < m_A < m_C \quad (4)$$

۴ خط مماس بر نمودار را در نقاط نام گذاری شده رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار شیب خط مماس در نقطه D منفی و در نقطه B صفر است.



از طرفی شیب خط مماس بر نمودار

در نقطه C بیش‌تر از نقطه A است؛

بنابراین:

$$m_D < m_B < m_A < m_C$$

تست با توجه به نمودار تابع f کدام یک از مقادیر زیر بزرگتر است؟

(کتاب دوسی)

$$(1) \text{ شیب خط } y = 2$$

$$(2) \text{ شیب نمودار در نقطه } B$$

$$(3) \text{ شیب خط } AB$$

$$(4) \text{ شیب نمودار در نقطه } A$$

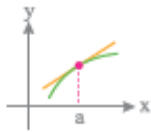


۴ چون خط $y = 2$ موازی محور x ها است، پس شیب آن برابر صفر است. (حذف (1))

ارتباط علامت شیب خط مماس بر نمودار و مشتق

با توجه به مفهوم مشتق:

۱ اگر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ مثبت باشد، آنگاه $f'(a)$ مثبت است و برعکس.



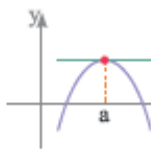
$$m_a > 0 \Leftrightarrow f'(a) > 0$$

۲ اگر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ منفی باشد، آنگاه $f'(a)$ منفی است و برعکس.



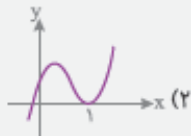
$$m_a < 0 \Leftrightarrow f'(a) < 0$$

۳ اگر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ برابر صفر باشد، [یعنی $f'(a)$ برابر صفر باشد] آنگاه خط مماس بر منحنی f ، موازی محور x ها است.



$$m_a = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$$

تست در کدام نمودار $f'(0) = -\frac{3}{4}$ و $f'(1) = 0$ است؟



۳ $f'(0) = -\frac{3}{4}$ است؛ بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=0$ منفی می‌باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرستند.

از طرفی چون $f'(1) = 0$ است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در $x=1$ نیز موازی محور x ها می‌باشد؛ بنابراین گزینه (۴) نیز نادرست است.

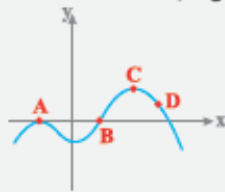
تست با توجه به نمودار تابع f چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟ (کتاب درسی)

الف) در نقطه A مقدار تابع و مقدار مشتق صفر است.

ب) در نقطه B مقدار تابع برابر صفر و مقدار مشتق مثبت است.

پ) در نقطه C مقدار تابع مثبت و مقدار مشتق صفر است.

ت) در نقطه D مقدار تابع و مقدار مشتق مثبت است.



۱ (۱)

۲ (۲)

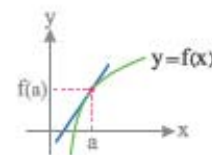
۳ (۳)

۴ صفر

۱ موارد (الف)، (ب) و (پ) درست هستند اما در نقطه D مقدار تابع مثبت است ولی چون شیب خط مماس بر نمودار در این نقطه منفی است پس مقدار مشتق منفی است.

تعبیر هندسی مشتق

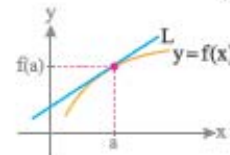
از نظر هندسی، مشتق تابع f در نقطه $x=a$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه است؛ یعنی:



$$f'(a) = \text{شیب خط مماس در } a$$

اگر خط L در نقطه $x=a$ بر نمودار تابع f مماس باشد، آنگاه:

۱ عرض نقطه به طول $x=a$ برابر با $f(a)$ است.



۲ شیب خط L برابر با $f'(a)$ است.

تست در شکل مقابل حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟



۳ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

۳ حد داده شده، همان مشتق تابع f در $x=1$ یعنی $f'(1)$ است. از طرفی



برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=1$ است؛ بنابراین:

$$f'(1) = \text{شیب خط مماس} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

تست مطابق شکل، خط L به معادله $3y + 2x = 4$ در نقطه $x=1$ بر

نمودار تابع f مماس است. مقدار $f(1) - f'(1)$ کدام است؟



۱ صفر

۲ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

۳ معادله خط L را به صورت $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ می‌نویسیم. عرض

نقطه به طول $x=1$ برابر $y = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ است؛ پس $f(1) = \frac{2}{3}$.

از طرفی شیب خط L برابر $-\frac{2}{3}$ است، پس $f'(1) = -\frac{2}{3}$ داریم؛

$$f(1) - f'(1) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

تست اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3x - 6} = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{2h}$

کدام است؟

(۱) -2 (۲) 2

(۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱ راه اول: در مخرج حد داده شده، از عدد ۳ فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3(x-2)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 4 \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{2h} = \frac{1}{2} \times \left(- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-f'(2)) = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

۲ راه دوم: حدهای داده شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ هستند؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3x - 6} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3} f'(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{2h} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(2-h)}{2} = \frac{-f'(2)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

تست اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2)}{h} = 9$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}$

کدام است؟

(۱) $-1/5$ (۲) $-5/1$

(۳) $1/5$ (۴) $5/1$

۱ در حد داده شده، ضریب h را در صورت و مخرج کسر یکسان می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2)}{h} = -3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2)}{-3h} = 9$$

$$\Rightarrow -3f'(2) = 9 \Rightarrow f'(2) = -3$$

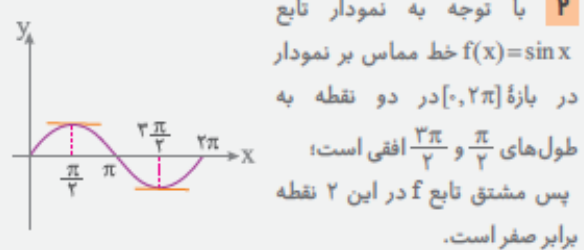
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \frac{1}{2} \times f'(2) = \frac{1}{2} \times (-3) = -\frac{3}{2} = -1.5$$

تست مشتق تابع $f(x) = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه برابر صفر است؟

(۱) 1 (۲) 2

(۳) 3 (۴) 4



تعریف مشتق با ظاهری متفاوت!

در بعضی از سؤالات، رابطه تعریف مشتق دستخوش تغییراتی در ظاهر خود می‌شود. در این سؤالات باید به کمک اتحاد و تجزیه، فاکتورگیری و... عبارت مربوط به تعریف مشتق را ایجاد کنیم.

مثلاً، اگر $f'(3) = 5$ باشد، برای محاسبه حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم تا بتوانیم تعریف مشتق تابع f در $x=3$ را در آن ایجاد کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \frac{1}{3+3} \times f'(3) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

وقتی مشتق تابع به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف می‌شود، باید

ضریب متغیر h در صورت و مخرج یکسان باشد. مثلاً اگر در صورت کسر به جای h ، عبارت fh وجود داشته باشد، باید در مخرج کسر نیز fh موجود باشد.

مثلاً، برای به دست آوردن حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+\delta h) - f(1)}{h}$ ابتدا باید

ضریب h را در صورت و مخرج کسر یکسان کنیم؛ بنابراین صورت و مخرج کسر را در δ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+\delta h) - f(1)}{h} = \delta \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+\delta h) - f(1)}{\delta h}$$

حال وقتی $h \rightarrow 0$ میل می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت $\delta h \rightarrow 0$ میل می‌کند؛ بنابراین حاصل حد داده شده برابر است با:

$$\delta \times \lim_{\delta h \rightarrow 0} \frac{f(1+\delta h) - f(1)}{\delta h} = \delta f'(1)$$

نکته از آن جایی که در این تست‌ها، با حدهایی روبه‌رو هستیم که ابهام $\frac{0}{0}$ دارند، می‌توانیم با کمک قاعده هوییتال نیز حاصل حد را به دست آوریم.

درس تابع مشتق و قوانین محاسبه مشتق

تابع مشتق

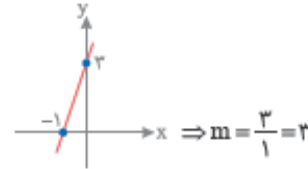
اگر x عضوی از دامنه تابع $f(x)$ باشد، تابع مشتق $f'(x)$ در نقطه به طول x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

برای به دست آوردن ضابطه تابع مشتق، از دستور بالا استفاده می‌کنیم.

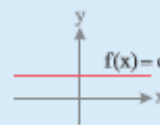
• اگر f یک تابع خطی باشد، آن‌گاه خط مماس بر نمودار f در تمام نقاط منطبق بر آن خواهد بود. پس شیب خط مماس در تمام نقاط با شیب تابع خطی f برابر است؛ یعنی مشتق تابع خطی $f(x) = mx + b$ در تمام نقاط برابر مقدار m است.

مثلاً، اگر نمودار تابع خطی f به صورت مقابل باشد، شیب این خط در تمام نقاط برابر ۳ است؛ پس:



$$\Rightarrow \dots = f'(-5) = f'(-4) = f'(-\frac{5}{2}) = \dots = f'(0) = f'(1) = \dots = 3$$

تذکر واضح است شیب خط مماس بر تابع



ثابت $f(x) = c$ در تمام نقاط برابر صفر است؛ بنابراین مشتق تابع ثابت $f(x) = c$ در تمام نقاط برابر با صفر خواهد بود.

• برای محاسبه مشتق تابع $y = x^n$ ، توان n را به صورت ضریب پشت x می‌نویسیم و یک واحد از توان آن کم می‌کنیم:

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3, y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

• اگر a عددی حقیقی باشد، برای به دست آوردن مشتق تابع $y = af(x)$ ضریب a را در مشتق تابع f ضرب می‌کنیم:

$$y = af(x) \Rightarrow y' = af'(x)$$

$$y = 4x^2 \Rightarrow y' = 4 \times 2x = 8x, y = -2x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y' = -5x^{\frac{3}{2}}$$

• مشتق تابع رادیکالی $y = \sqrt{ax+b}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = \sqrt{ax+b} \Rightarrow y' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y = \sqrt{1-5x} \Rightarrow y' = \frac{-5}{2\sqrt{1-5x}}$$

• مشتق تابع رادیکالی $y = \sqrt[3]{ax+b}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = \sqrt[3]{ax+b} \Rightarrow y' = \frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y = \sqrt[3]{1-5x} \Rightarrow y' = \frac{-5}{3\sqrt[3]{(1-5x)^2}}$$

تست شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+a}$ در نقطه $x=1$

برابر $\frac{1}{3}$ است. مقدار a کدام است؟

$$1/5 \quad (4) \quad 1/25 \quad (3) \quad 0.75 \quad (2) \quad 0.5 \quad (1)$$

۳ چون شیب خط مماس بر نمودار در $x=1$ برابر $\frac{1}{3}$ است، پس

$$f'(1) = \frac{1}{3} \text{ است و داریم:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} \xrightarrow{f'(1)=\frac{1}{3}} \frac{1}{2\sqrt{1+a}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{1+a} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1+a = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4} = 1.25$$

تست شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-3x-5}$ در نقطه‌ای

به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad -\frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

۳ مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{-3x-5}$ را در $x=1$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{-3}{3\sqrt[3]{(-3x-5)^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{64}} = -\frac{1}{4}$$

مشتق مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم دو تابع

• برای محاسبه مشتق مجموع یا تفاضل دو تابع، از تک تک تابع‌ها مشتق می‌گیریم:

$$y = (f - g)(x) \Rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

$$y = (f + g)(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

$$y = x^2 + x \Rightarrow y' = 2x + 1$$

$$y = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + x^2 \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2x$$

تست اگر $f(1)=6, f'(1)=2, g(1)=4, g'(1)=2$ باشد حاصل $(f \cdot g)'(1)$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰
- ۴ با توجه به صورت سؤال $f(1)=6, f'(1)=2, g(1)=4, g'(1)=2$ پس:
- $(f \cdot g)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 2 \times 4 + 2 \times 6 = 8 + 12 = 20$

تست مشتق تابع $f(x) = \sqrt{3x}(x^2 - 7)$ در $x=3$ کدام است؟

- ۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵
- ۲ از $f(x) = \sqrt{3x}(x^2 - 7)$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=3$ می‌گذاریم:
- $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(x^2 - 7) + 2x\sqrt{3x}$
- $\Rightarrow f'(3) = \frac{3}{2\sqrt{9}}(9 - 7) + 6\sqrt{9} = \frac{1}{2} \times 2 + 6 \times 3 = 1 + 18 = 19$

تست مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 3}$ در $x=4$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$
- ۲ از تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 3}$ مشتق می‌گیریم و به جای x عدد ۴ را قرار می‌دهیم:
- $f'(x) = \frac{(2x - 3)(2x - 3) - (2)(x^2 - 3x + 1)}{(2x - 3)^2}$
- $\Rightarrow f'(4) = \frac{(5)(5) - (2)(5)}{5^2} = \frac{25 - 10}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

تست مشتق تابع $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ در $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -۳ ۴) -۴
- ۴ مشتق تابع $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ را به دست می‌آوریم:
- $f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(x - \sqrt{x}) - (1 - \frac{1}{2\sqrt{x}})(1 + \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x})^2}$
- به ازای $x = \frac{1}{4}$ حاصل $\sqrt{x}$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:
- $f'(\frac{1}{4}) = \frac{(1)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}} = -4$

تست مشتق تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 2x}$ در $x=1$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۱
- ۴ از تابع f مشتق می‌گیریم و در آن $x=1$ جای گذاری می‌کنیم:
- $f'(x) = \frac{(\frac{1}{3\sqrt[2]{x}})(x^2 + 2x) - (2x^2 + 2)(\sqrt[3]{x} + 1)}{(x^2 + 2x)^2}$
- $\Rightarrow f'(1) = \frac{\frac{1}{3} \times 3 - 5 \times 2}{(3)^2} = -\frac{9}{9} = -1$

تست اگر $f(x) = x^2 + x^{-2} + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
- ۲ حد خواسته شده برابر مشتق تابع f در $x=1$ است، پس:
- $f(x) = x^2 + x^{-2} + 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - 2x^{-3} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\Rightarrow f'(1) = 2(1) - 2(1)^{-3} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{1}} = 2 - 2 + 1 = 1$

• مشتق تابع $y = f(x) \cdot g(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

مشتق اولی مشتق دومی

$y = (f \cdot g)(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

خود اولی خود دومی

اولی مشتق دومی

$y = (2x^2 - 1)(3\sqrt{x} - 2)$

$\Rightarrow y' = (6x) \times (3\sqrt{x} - 2) + (\frac{3}{2\sqrt{x}}) \times (2x^2 - 1)$

دومی اولی

$y = (4x^2 - 1)(3x + 5) \Rightarrow y' = (8x) \times (3x + 5) + (3) \times (4x^2 - 1)$

مشتق اولی مشتق دومی

• مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ با شرط $g(x) \neq 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

صورت مشتق مخرج مخرج مشتق صورت

$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

مربع مخرج

مشتق صورت مخرج مشتق صورت

$y = \frac{3x^2 + 4}{2x - 5} \Rightarrow y' = \frac{(6x)(2x - 5) - (2)(3x^2 + 4)}{(2x - 5)^2}$

مربع مخرج

$y = \frac{-x + 2}{x^2 - 4x} \Rightarrow y' = \frac{(-1)(x^2 - 4x) - (2x^2 - 4)(-x + 2)}{(x^2 - 4x)^2}$

نتایج قاعده مشتق تقسیم

۱ مشتق تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

مشتق تابع $y = \frac{1}{2x - 1}$ برابر است با:

$y' = \frac{-2}{(2x - 1)^2}$

۲ مشتق تابع هموگرافیک با استفاده از قاعده مشتق در تقسیم برابر است با:

$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

مشتق تابع $y = \frac{x - 1}{3x + 2}$ برابر است با:

$y' = \frac{(1)(2) - (3)(-1)}{(3x + 2)^2} = \frac{5}{(3x + 2)^2}$

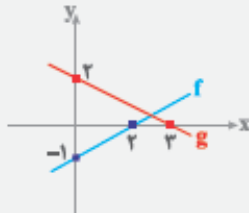
یعنی تابع $f(x)$ به صورت زیر بوده است.

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)$$

$$f'(2) = \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{4}$$

تست نمودار تابع‌های خطی f و g به صورت مقابل است. مقدار

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) \text{ کدام است؟}$$



۲ با توجه به شکل داده شده شیب خط f برابر $\frac{1}{4}$ و شیب خط g برابر $-\frac{3}{4}$ است، پس $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$ و $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ بوده و داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{4}x - 1}{-\frac{3}{4}x + 2} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(\frac{1}{4} \times 2) - (-1 \times -\frac{3}{4})}{(-\frac{3}{4} \times 2 + 2)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{1 - \frac{3}{4}}{(-\frac{3}{2} + 2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

عامل صفر شونده

اگر تابع f از ضرب چند عبارت تشکیل شده باشد، برای محاسبه مشتق تابع f در $x=a$ یعنی $f'(a)$ ، در صورتی که قسمتی از تابع به ازای $x=a$ صفر شود، می‌توانیم فقط از قسمتی که صفر می‌شود مشتق بگیریم و سپس با جای‌گذاری a در x ، مقدار $f'(a)$ را به دست آوریم.

مثال مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{5x-6}}{x^3-6x}$ را در $x=2$ به دست آورید.

چون $(x-2)$ در نقطه $x=2$ صفر می‌شود، می‌توانیم فقط از $(x-2)$ مشتق بگیریم و سپس $x=2$ را در عبارت به دست آمده جای‌گذاری کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-2) \times \sqrt{5x-6}}{x^3-6x} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = (1) \times \frac{\sqrt{5x-6}}{x^3-6x}$$

عامل صفر شونده

$$\Rightarrow f'(2) = (1) \times \frac{\sqrt{5(2)-6}}{2^3-6(2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

تست مشتق تابع $f(x) = (x^2-2)(x-4)(x^2-6)(x-8)$ به ازای $x=4$ کدام است؟

$$-560 \quad (4) \quad -280 \quad (3) \quad 560 \quad (2) \quad 280 \quad (1)$$

۴ عبارت $(x-4)$ عامل صفر شونده است، پس:

$$f(x) = (x^2-2)(x-4)(x^2-6)(x-8)$$

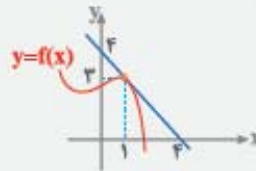
$$\xrightarrow{x=4} f'(x) = (x^2-2) \times 1 \times (x^2-6)(x-8)$$

$$\Rightarrow f'(4) = (16-2) \times 1 \times (16-6)(4-8) = 14 \times 10 \times -4 = -560$$

تذکر ممکن است به جای ضابطه تابع، نمودار آن یا بخشی از آن را بدهند معمولاً از نمودار تابع می‌توان مقدار تابع در $x=a$ و شیب خط مماس در آن نقطه را به دست آورد، به سوالات زیر توجه کنید.

تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق

$$y = (\sqrt{x} + 1)f(x) \text{ در } x=1 \text{ کدام است؟}$$



$$-0.75 \quad (1)$$

$$-0.5 \quad (2)$$

$$-0.7 \quad (3)$$

$$-1 \quad (4)$$

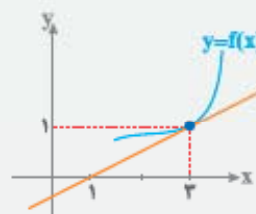
۲ از تابع $y = (\sqrt{x} + 1)f(x)$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=1$ می‌گذاریم:

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)f(x) + f'(x)(\sqrt{x} + 1) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{2}f(1) + 2f'(1)$$

با توجه به نمودار $f(1)=3$ است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار f در $x=1$ برابر $-\frac{4}{3}$ است، پس $f'(1)=-\frac{4}{3}$ و داریم:

$$y' = \frac{1}{2}f(1) + 2f'(1) = \frac{1}{2} \times 3 + 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{6}$$

تست با توجه به شکل مقابل مشتق تابع $y = \frac{f(x)+x}{2x}$ در $x=3$ کدام است؟



$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1}{12} \quad (2)$$

$$\frac{1}{24} \quad (3)$$

$$\frac{1}{36} \quad (4)$$

۲ با توجه به نمودار $f(3)=1$ و شیب خط مماس بر نمودار f در $x=3$ برابر $\frac{1}{4}$ است، پس $f'(3)=\frac{1}{4}$ بوده و داریم:

$$y = \frac{f(x)+x}{2x} \Rightarrow y' = \frac{(f'(x)+1)2x - 2(f(x)+x)}{(2x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3} y' = \frac{(f'(3)+1) \times 6 - 2(f(3)+3)}{6^2}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4}+1) \times 6 - 2 \times (1+3)}{36} = \frac{\frac{5}{4} \times 6 - 8}{36} = \frac{\frac{15}{2} - 8}{36} = \frac{\frac{1}{2}}{36} = \frac{1}{72}$$

حالا که بحث نمودار شد، ممکن است مجبور شویم ضابطه تابع را با توجه به نمودار آن بنویسیم و سپس از آن مشتق بگیریم.

مثال اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد $f'(2)$ را به دست آورید.



$$f(x) = a(x-1)(x-4)$$

$$f(0) = a(-1)(-4) = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)$$

تست مشتق تابع $f(x) = (x+1)(x^2-1)\sqrt{x^2-3x+1}$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۴ صفر

۴ عبارت‌های $(x+1)$ و (x^2-1) به ازای $x = -1$ برابر صفر می‌شوند، پس ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x+1)(x^2-1)\sqrt{x^2-3x+1}$$

$$(x+1)(x-1)$$

$$= (x+1)^2(x-1)\sqrt{x^2-3x+1}$$

حال با توجه به این‌که تابع f دارای عامل صفرشونده $(x+1)$ با مرتبه ۲ است، پس مقدار f' در $x = -1$ برابر صفر است.

ساده کردن قبل از مشتق‌گیری

اگر ضابطه تابع f قبل از مشتق‌گیری ساده شود، بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم.

مثال مشتق تابع $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ را در $x = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

برای محاسبه مشتق تابع $f(x)$ در $x = \frac{1}{2}$ ابتدا ضابطه تابع را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم. سپس از عبارت حاصل مشتق گرفته و $x = \frac{1}{2}$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

تست مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ در $x = 4$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۳ صورت کسر را با استفاده از اتحاد جاق و لاغر باز می‌کنیم؛ سپس از عبارت حاصل مشتق گرفته و $x = 4$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = x^2-x+1 \Rightarrow f'(x) = 2x-1$$

$$\Rightarrow f'(4) = 8-1 = 7$$

تست مشتق تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۳ با توجه به اتحاد مزدوج، تساوی $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ برقرار است. پس ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x}-1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$$

تست اگر $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x+1}}$ باشد، حاصل $f'(1) \times f'(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $-\frac{9}{2}$

۳ ابتدا تابع f را به صورت $f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{\sqrt{x+1}}$ می‌نویسیم. عامل $(x-1)$ در $x=1$ و عامل $(x-4)$ در $x=4$ عامل‌های صفرشونده هستند، پس:

$$۱) x=1, f'(x) = \frac{(1)(x-4)}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-3}{2}$$

$$۲) x=4, f'(x) = \frac{(x-1)(1)}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(4) = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{بنابراین } f'(1) \times f'(4) = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$$

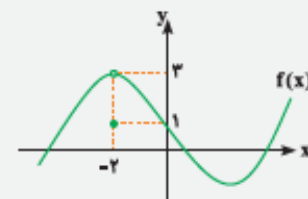
اگر $f(a)$ موجود و نمودار تابع f در $x=a$ توخالی باشد، برای محاسبه مشتق تابع $g(x) = (x-a)f(x)$ در نقطه $x=a$ باید از تعریف مشتق استفاده کنیم. مثلاً اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، برای محاسبه مشتق $g(x) = (x-1)f(x)$ در $x=1$ داریم:



$$\Rightarrow g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

مثال با توجه به نمودار تابع f مقدار مشتق تابع $g(x) = (x^2-4)f(x)$ را در $x = -2$ محاسبه کنید.



$$g'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2-4)f(x) - 0}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x-2)f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) \times \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4 \times 3 = -12$$

اگر توان عامل صفر شونده، عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، مشتق اول آن تابع در ریشه عامل صفر شونده برابر صفر است.

مثال مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-4)^2\sqrt{x+1}}{x}$ را در $x = 4$ به دست آورید.

چون تابع f دارای عامل صفر شونده $(x-4)$ با مرتبه ۲ است، پس مقدار f' در $x = 4$ برابر صفر است.

تست اگر $f(x) = \sqrt{2x^2 + x} + x$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x} - x}$ باشد، حاصل $f'(x)g(x) - g'(x)f(x)$ کدام است؟

$$\frac{11}{4} \quad (4) \quad \frac{9}{4} \quad (3) \quad \frac{5}{2} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (1)$$

۳ عبارت خواسته شده برابر صورت کسر مشتق تابع $\frac{f}{g}$ است، پس:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sqrt{2x^2 + x} + x}{\frac{1}{\sqrt{2x^2 + x} - x}} = (\sqrt{2x^2 + x} + x)(\sqrt{2x^2 + x} - x) \\ &= (2x^2 + x - x^2) = x^2 + x \Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \\ &= 2x + 1 - \frac{x}{x^2 + x} \Rightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \\ &= (2x + 1) \times (g(x))^2 = 9 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 + x} - x}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ یعنی $y' = f'(x)$ را مشتق اول تابع f می‌نامیم. حال اگر تابع $f'(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق آن را با نماد $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را مشتق دوم تابع f می‌نامیم.

$$y = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y' = 2x + 3 \Rightarrow y'' = 2$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$$

تست اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ باشد، $f''(1)$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4) \quad -\frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{2} \quad (1)$$

۳ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم تا به f' برسیم و سپس از f' مشتق می‌گیریم تا f'' به دست آید:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) &= \frac{1-x}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-2}{(x+1)^2} \\ \Rightarrow f''(1) &= \frac{-2}{2^2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

تست اگر $f(x) = \sqrt{3x-2}$ باشد، $f''(2)$ کدام است؟

$$\frac{9}{32} \quad (4) \quad -\frac{9}{32} \quad (3) \quad \frac{9}{8} \quad (2) \quad -\frac{9}{8} \quad (1)$$

۳ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{3x-2}$ برابر $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ است، پس:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{3x-2})^2} \\ \Rightarrow f''(2) &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{4})^2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

تست اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x(x-3)} + x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-3x}}$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

$$\frac{5}{6} \quad (4) \quad \frac{2}{5} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

۲ در صورت کسر از $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3}$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x} \cdot (x-3) + x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-3x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} (\sqrt{x-3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x^2-3x}} \\ &= \sqrt{x-3} + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Rightarrow f'(4) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

در بعضی از سؤالات، مشتق عبارتی را می‌پرسند که شکل اولیه تابع به طور مستقیم داده نشده و بنابراین باید تشخیص دهیم که عبارت داده شده مشتق چه تابعی است. برای مثال به جای این که پرسیده شود مشتق $(f \cdot g)(x)$ کدام است، می‌گویند حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ کدام است. مهم‌ترین شکل طرح این گونه سؤالات به صورت‌های زیر است:

۱ اگر حاصل عبارت $f'(x) + g'(x)$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(f+g)(x)$ را به دست آوریم.

۲ اگر حاصل عبارت $f'(x) - g'(x)$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(f-g)(x)$ را به دست آوریم.

۳ اگر حاصل عبارت $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(f \cdot g)(x)$ را به دست آوریم.

۴ اگر حاصل عبارت $\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را به دست آوریم.

مثال اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ باشید، حاصل

$$f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$$

حاصل عبارت خواسته شده همان مشتق تابع $f \cdot g$ در $x=2$ است؛ پس:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x}) = x^2 - x \Rightarrow f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \\ &= 2x - 1 \xrightarrow{x=2} f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 3 \end{aligned}$$

تست اگر $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{-5}{x-2}$ حاصل $f'(x) + g'(x)$ کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱ می‌دانیم $f'(x) + g'(x) = (f+g)'(x)$ است. پس می‌توانیم ابتدا تابع $(f+g)(x)$ را به دست آوریم و سپس از آن مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{-5}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= x+2 \Rightarrow f'(x) + g'(x) = 1 \end{aligned}$$

اگر u تابعی برحسب x باشد و $y=f(u)$ آنگاه:

$$y' = u'(x) \times f'(u)$$

مثلاً، مشتق تابع $y=f(3x)$ برابر است با:

و مشتق تابع $y=f(x^2+1)$ برابر است با:

تست اگر $f(x^2+1)=2x^3-4x^2+5$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

$$1) 1 \quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) 4$$

۲ از طرفین تساوی داده شده مشتق می گیریم:

$$f(x^2+1)=2x^3-4x^2+5 \Rightarrow 2xf'(x^2+1)=6x^2-8x$$

حال برای به دست آوردن $f'(5)$ کافیست $x=2$ را جای گذاری کنیم:

$$\Rightarrow 4f'(5)=6(2)^2-8(2) \Rightarrow 4f'(5)=8 \Rightarrow f'(5)=2$$

تست اگر مشتق تابع $f(\sqrt[3]{3x+2})$ در $x=2$ برابر $\frac{1}{3}$ باشد، مشتق

$f(x+x^2)$ در $x=1$ کدام است؟

$$1) \frac{2}{3} \quad 2) 2 \quad 3) \frac{7}{3} \quad 4) 4$$

۴ از تابع $y=f(\sqrt[3]{3x+2})$ مشتق می گیریم و در آن $x=2$ قرار می دهیم:

$$y' = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}} \times f'(\sqrt[3]{3x+2}) \xrightarrow{x=2} y'(2) = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} f'(\sqrt[3]{8})$$

$$= \frac{1}{4} f'(2) = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

حال از تابع $y=f(x+x^2)$ مشتق می گیریم و در آن $x=1$ می گذاریم:

$$y' = (1+2x)f'(x+x^2) \xrightarrow{x=1} y' = 3f'(2) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

مشتق تابع مرکب در توابع معروف

با توجه به قاعده مشتق برای تابع مرکب، اگر در توابع، به جای x ، تابعی از x مانند u باشد، آنگاه فرمول های مشتق برحسب u در u' ضرب می شوند:

$$y' = nu'u^{n-1} \quad \text{۱} \text{ مشتق تابع } y = u^n$$

$$y = (2x^2-1)^5 \Rightarrow y' = 4(2x^2-1)^4(2x) = 8x(2x^2-1)^4$$

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{۲} \text{ مشتق تابع } y = \sqrt{u}$$

$$y = \sqrt{2x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$$

$$y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{۳} \text{ مشتق تابع } y = \sqrt[3]{u}$$

$$y = \sqrt[3]{2x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$$

$$y' = \frac{nu'u^{n-m}}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}} \quad \text{در حالت کلی، مشتق تابع } y = \sqrt[n]{u^m} \text{ برابر است با:}$$

تست اگر $f(x) = \frac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2-x+1}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(4+h)-f'(4)}{h}$ کدام است؟

$$1) \frac{11}{32} \quad 2) \frac{15}{32} \quad 3) \frac{11}{16} \quad 4) \frac{15}{16}$$

۱ حاصل حد داده شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(4+h)-f'(4)}{h} = f''(4)$$

پس مشتق دوم تابع را می خواهیم، ابتدا ضابطه داده شده را ساده می کنیم و سپس از آن دو بار مشتق می گیریم:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)\sqrt{x}}{(x^2-x+1)} = (x+1)(\sqrt{x}) = x\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{x=4} f''(4) = \frac{3}{4}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{8}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

مشتق تابع مرکب

مشتق تابع fog به صورت زیر به دست می آید:

$$y=(fog)(x)=f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x).f'(g(x))$$

مثال اگر $g(2)=3$ و $g'(2)=-5$ و $f'(3)=6$ باشد، مقدار $(fog)'(2)$ را به دست آورید.

$$(fog)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = (-5)f'(3) = (-5)(6) = -30$$

تست اگر $f(x) = \sqrt{3x+1}$ و $g(x) = \frac{2x}{x-1}$ ، مشتق تابع $(gof)(x)$ در $x=1$ کدام است؟

$$1) \frac{3}{2} \quad 2) -\frac{3}{2} \quad 3) \frac{1}{2} \quad 4) -\frac{1}{2}$$

۲ مشتق تابع $(gof)(x)$ برابر است با:

$$(gof)'(x) = f'(x)g'(f(x))$$

از آن جایی که $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ و $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ داریم:

$$(gof)'(1) = f'(1)g'(f(1)) = \frac{3}{2}g'(2) = \frac{3}{2}(\frac{-2}{(2-1)^2}) = -\frac{3}{2}$$

تست اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ باشد، $(fof)'(1)$ کدام است؟

$$1) \frac{1}{9} \quad 2) \frac{5}{9} \quad 3) \frac{7}{9} \quad 4) 1$$

۱ با توجه به مشتق تابع fof:

$$(fof)'(x) = f'(x).f'(f(x)) \xrightarrow{x=1} (fof)'(1) = f'(1).f'(f(1))$$

با توجه به این که $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ و $f'(x) = \frac{4-1}{(x+2)^2}$ است، پس:

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow (fof)'(1) = \frac{1}{3} \times f'(1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

مثال مشتق تابع $y = \frac{3\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 2}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

$$y = \frac{3\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 2} \Rightarrow y' = \frac{(3 \times 2) - (-4 \times 1)}{(\sqrt{x} + 2)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=4} y' = \frac{10}{(\sqrt{4} + 2)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{10}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

معادله خط مماس

برای نوشتن معادله خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(x_0, y_0)$ واقع بر آن، ابتدا از ضابطه f مشتق می‌گیریم و با قرار دادن x_0 در تابع مشتق، شیب خط مماس را به دست می‌آوریم. سپس با داشتن شیب خط مماس و مختصات نقطه تماس، معادله خط مماس را از رابطه زیر می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال ۱ معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر آن را به دست آورید.

مختصات نقطه تماس و شیب خط مماس را محاسبه می‌کنیم و معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \xrightarrow{x=2} f(2) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow A(2, 5) \\ f'(x) = 2x \xrightarrow{x=2} m = 2(2) = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y - 5 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 3$$

مثال ۲ معادله خطی را بنویسید که به موازات نیمساز ربع اول و سوم بر منحنی $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ مماس می‌شود.

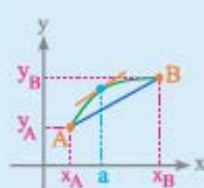
شیب خط مماس بر منحنی f که موازی خط $y = x$ است، برابر ۱ می‌باشد؛ بنابراین:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 1 \xrightarrow{f'(x)=1} -2x + 3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

پس مختصات نقطه تماس برابر $A(1, 3)$ بوده و معادله خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = 1 \times (x - 1) \Rightarrow y = x + 2$$

تذکر اگر شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای با طول $x = a$ روی



نمودار موازی با خط واصل دو نقطه از منحنی باشد، شیب خط مماس بر منحنی با شیب خط واصل برابر است؛ بنابراین $f'(a) = m_{AB}$ است.

مثال مشتق تابع $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ به ازای $x = 9$ را به دست آورید.

$$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2 \times (1)}{3 \sqrt[3]{(x-1)^{3-2}}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x-1}}$$

$$\xrightarrow{x=9} \frac{2}{3 \sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3 \times 2} = \frac{1}{3}$$

تست اگر $f(x) = (x + \frac{2}{x})^3$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$$-45 \quad (4) \quad -36 \quad (3) \quad -27 \quad (2) \quad -18 \quad (1)$$

۲ حد خواسته شده برابر $f'(1)$ است، پس از تابع $f(x) = (x + \frac{2}{x})^3$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 3 \times (1 - \frac{2}{x^2}) \times (x + \frac{2}{x})^2$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3 \times (1 - 2) \times (1 + 2)^2 = -27$$

تست مشتق تابع $f(x) = (\frac{3x+1}{x^2+1})^2$ در $x = 1$ کدام است؟

$$-16 \quad (4) \quad -8 \quad (3) \quad 16 \quad (2) \quad 8 \quad (1)$$

۴ از تابع $f(x) = (\frac{3x+1}{x^2+1})^4$ مشتق می‌گیریم و در آن $x = 1$ می‌گذاریم:

$$f'(x) = 4 \times \frac{3 \times (x^2+1) - (3x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \times (\frac{3x+1}{x^2+1})^3$$

$$\Rightarrow f'(1) = 4 \times \frac{3 \times 2 - 2 \times 4}{(2)^2} \times (\frac{4}{2})^3 = 4 \times (-\frac{2}{4}) \times 8 = -16$$

تست مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^2}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4) \quad -\frac{1}{3} \quad (3) \quad -\frac{13}{3} \quad (2) \quad -\frac{11}{3} \quad (1)$$

۲ می‌دانیم مشتق تابع $y = \sqrt[n]{u^m}$ به صورت $y' = \frac{mu'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$ است، پس:

$$f(x) = \sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^{3-2}}} \times \frac{-13}{(2x-3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{8}} \times \frac{-13}{(2(2)-3)^2} = \frac{2}{3 \times 2} \times -13 = -\frac{13}{3}$$

مشتق تابع به صورت $y = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{ad - bc}{(cf(x) + d)^2} \times f'(x)$$

تست خط به معادله $y = -3x - 4$ بر نمودار تابع $f(x) = x^2 - x - 3$ مماس است. طول نقطه تماس کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

۲ شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر -3 است؛ پس در نقطه تماس مشتق تابع برابر -3 است؛

$$f(x) = x^2 - x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \xrightarrow{f'(x) = -3} 2x - 1 = -3 \Rightarrow x = -1$$

مثال در نقطه‌ای با کدام طول مثبت خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^3 - 4x$ با خط واصل دو نقطه به طول‌های -1 و 2 واقع بر نمودار موازی است؟

مختصات نقاط ابتدا و انتهای خط واصل به صورت $A(-1, 3)$ و $B(2, 0)$ بوده و شیب پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند؛ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{0 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

حال در نقطه‌ای که خط مماس بر نمودار، موازی پاره‌خط AB است، مشتق تابع f برابر -1 است؛ پس:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \xrightarrow{f'(x) = -1} 3x^2 - 4 = -1 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

بنابراین در نقطه با طول 1 ، شیب خط مماس بر نمودار برابر با شیب پاره‌خط AB است.

درس مشتق چپ و راست و مشتق پذیری



تذکر برای این‌که $f'_+(a)$ موجود باشد، تابع f باید در $x = a$ از راست پیوسته باشد و برای این‌که $f'_-(a)$ موجود باشد، تابع f باید در $x = a$ از چپ پیوسته باشد.

تابع f در $x = a$ مشتق پذیر است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ تابع در $x = a$ پیوسته باشد؛

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

۲ مشتق چپ و مشتق راست در $x = a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند؛

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

تست در تابع $f(x) = \begin{cases} 4x+1; & x \geq 2 \\ x^2+5; & x < 2 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲ حد خواسته شده برابر $f'(2)$ است. چون تابع f در $x=2$ پیوسته است، مشتق راست و چپ آن را در $x=2$ به دست می‌آوریم؛

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1; & x \geq 2 \\ x^2+5; & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4; & x \geq 2 \\ 2x; & x < 2 \end{cases}$$

بنابراین $f'_-(2) = 2 \times 2 = 4$ و $f'_+(2) = 4$ است و در نتیجه؛ $f'(2) = 4$

مشتق راست و مشتق چپ

اگر حد راست عبارت کسری $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در نقطه a تعریف شده و موجود باشد، می‌گوییم تابع f در $x=a$ دارای مشتق راست است. مشتق راست تابع f در $x=a$ با نماد $f'_+(a)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر خواهد بود:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

از دیدگاه هندسی مشتق راست تابع f در $x=a$ ، نشان‌دهنده شیب نیم‌خطی است که در سمت راست نقطه‌ای به طول a بر منحنی تابع f مماس شود. [نیم‌مماس راست].



اگر حد چپ عبارت کسری $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در نقطه a تعریف شده و موجود باشد، می‌گوییم تابع f در $x=a$ دارای مشتق چپ است. مشتق چپ تابع f در $x=a$ با نماد $f'_-(a)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر خواهد بود:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

از دیدگاه هندسی مشتق چپ تابع f در $x=a$ ، نشان‌دهنده شیب نیم‌خطی است که در سمت چپ نقطه‌ای به طول a بر منحنی تابع f مماس شود. [نیم‌مماس چپ].

مثال مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ به دست آورید.

باید مشتق چپ و راست تابع را در $x = 1$ به دست آوریم؛
 $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f(x) = |x^2 - 1| = x^2 - 1$
 $\Rightarrow f'_+(x) = 2x \Rightarrow f'_+(1) = 2$
 $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow f(x) = |x^2 - 1| = -x^2 + 1$
 $\Rightarrow f'_-(x) = -2x \Rightarrow f'_-(1) = -2$
 $\Rightarrow f'(1)$ وجود ندارد.

تست در تابع با ضابطه $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

۲ ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم؛

$$f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3x + |x - 1|$$

حال برای محاسبه مشتق راست و چپ تابع در $x = 1$ علامت عبارت داخل قدرمطلق را مشخص می‌کنیم؛

$$x > 1: f(x) = 3x + |x - 1| = 3x + x - 1 = 4x - 1 \Rightarrow f'_+(x) = 4$$

$$x < 1: f(x) = 3x + |x - 1| = 3x - (x - 1) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow f'_-(x) = 2 \Rightarrow f'_-(1) = 2$$

$$\Rightarrow f'_+(1) + 3f'_-(1) = 4 + 3 \times 2 = 10$$

برای محاسبه مشتق توابع شامل برکت در $x = a$ ابتدا باید برکت را حذف کنیم و سپس مشتق بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم؛
۱ اگر $x = a$ عبارت داخل برکت را صحیح نکند، مقدار برکت را به ازای $x = a$ مشخص کرده و برکت را حذف می‌کنیم؛ سپس از عبارت حاصل مشتق می‌گیریم.

مثال مشتق تابع $f(x) = x^2 + [4x + 1]$ را در $x = \frac{1}{3}$ به دست آورید؛

در اطراف $x = \frac{1}{3}$ داریم؛

$$[4x + 1] = [4(\frac{1}{3}) + 1] = [\frac{4}{3} + 1] = [\frac{7}{3}] = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

تست اگر $f(x) = [x^2]x + [x]$ باشد، $f'(\frac{\sqrt{5}}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ در اطراف $x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ داریم؛

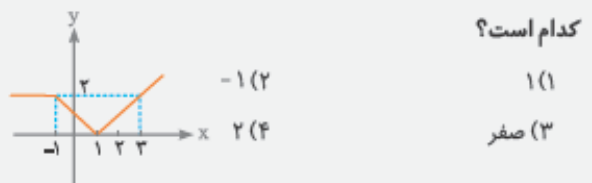
$$[x^2] = [\frac{5}{16}] = 1$$

$$[\frac{\sqrt{5}}{4}] = 1$$

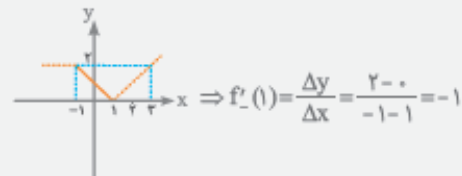
$$\Rightarrow f(x) = x + 1$$

$$f'(x) = 1$$

تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟



۲ حاصل حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع f در $x = 1$ است که نشان دهنده شیب نیم خطی است که از سمت چپ بر نمودار تابع f در $x = 1$ مماس شده است. با توجه به شکل، شیب این نیم مماس برابر است با؛



محاسبه مشتق توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح

برای محاسبه مشتق توابع شامل قدر مطلق در $x = a$ ابتدا باید قدر مطلق را حذف کنیم و سپس مشتق بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم؛

۱ اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدر مطلق نباشد، علامت عبارت داخل قدر مطلق را به ازای $x = a$ مشخص کرده و قدر مطلق را حذف می‌کنیم؛ سپس از عبارت حاصل مشتق می‌گیریم.

مثال مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 3|$ را در $x = 2$ به دست آورید.

چون به ازای $x = 2$ عبارت $x^2 - 1$ مثبت و عبارت $x - 3$ منفی است؛ پس در اطراف $x = 2$ داریم؛

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x - 3| = (x^2 - 1) - (x - 3) = x^2 - x + 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

تست در تابع با ضابطه $f(x) = |\Delta - x\sqrt{x}|$ ، مقدار $f'(1) + f'(4)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) -۳ ۴) $-\frac{3}{4}$

۲ علامت عبارت داخل قدرمطلق در اطراف ۴ منفی و در اطراف ۱ مثبت است، پس؛

$$x = 4: f(x) = -\Delta + x\sqrt{x} = -\Delta + x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(4) = 3$$

$$x = 1: f(x) = \Delta - x\sqrt{x} = \Delta - x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین $f'(4) + f'(1) = 3 + (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ است.

۲ اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدر مطلق باشد، مشتق چپ و راست تابع را در $x = a$ به دست می‌آوریم.

مشتق توابع چند ضابطه‌ای

در بعضی از سؤالات، تابعی چند ضابطه‌ای شامل یک یا چند پارامتر داده می‌شود و از ما می‌خواهند پارامترها را طوری تعیین کنیم که تابع در نقاط ذکرشده مشتق پذیر شود. در این سؤالات باید:

۱. تابع در نقاط موردنظر پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{یادآوری شرط پیوستگی؛}$$

۲. مشتق چپ و مشتق راست تابع در آن نقاط برابر باشند.

$$f'_-(a) = f'_+(a)$$

مثال تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1; & x \geq 1 \\ x+a; & x < 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار a را به دست آورید.

از آن جایی که هر یک از ضابطه‌ها در بازه خود پیوسته و مشتق پذیرند، باید

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+1) = a+1 \quad \text{تابع در } x=1 \text{ پیوسته باشد؛}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+a) = 1+a$$

از آن جایی که $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ پس تابع در $x=1$ پیوسته است. هم چنین باید مشتق چپ و راست تابع در $x=1$ برابر باشند؛

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a=1$$

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x+a; & x \leq 1 \\ b\sqrt{x}; & x > 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. a کدام است؟

$$1) (1) \quad 2) (2) \quad 3) (3) \quad 4) (4)$$

۲. برای این که تابع f در $x=1$ مشتق پذیر باشد، باید:

۱. تابع در $x=1$ پیوسته باشد؛

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow b=1+a$$

۲. مشتق چپ و راست برابر باشند؛

$$f'(x) = \begin{cases} 1; & x \leq 1 \\ b \times \frac{1}{2\sqrt{x}}; & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = 1 \\ f'_+(1) = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{2} = 1$$

$$\Rightarrow b=2 \Rightarrow a=1$$

تست تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2-2x|; & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2+ax+b; & x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است. $a+b$ کدام است؟ (داخل ۹۸)

$$1) (1) \quad 2) (2) \quad 3) (3) \quad 4) (4)$$

۱. برای این که مشتق تابع f در $x=2$ موجود باشد، باید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x^2-2x| = 0 \quad \text{تابع در } x=2 \text{ پیوسته باشد؛}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2}x^2+ax+b \right) = 2+2a+b = f(2)$$

$$\Rightarrow 2+2a+b=0$$

۲. اگر $x=a$ عبارت داخل براکت را صحیح کند، باید مشتق چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست آوریم. (البته به شرطی که تابع در $x=a$ پیوستگی چپ و راست داشته باشد، مثلاً اگر تابع پیوستگی چپ ندارد، اصلاً مشتق چپ هم ندارد)

تست اگر $f(x) = x^2[x] + |x-2|$ باشد، مقدار $f'_+(2)$ کدام است؟

$$1) (4) \quad 2) (2) \quad 3) (3) \quad 4) (4)$$

۳. چون تابع f در $x=2$ از سمت راست پیوسته است، مجاز به محاسبه مشتق راست تابع f در $x=2$ هستیم. ضابطه تابع $f(x) = x^2[x] + |x-2|$ را وقتی $x \rightarrow 2^+$ به دست می‌آوریم؛

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow [x] = 2, |x-2| = x-2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + x - 2 \Rightarrow f'_+(2) = 4 \times 2 + 1 = 9$$

تست اگر $f(x) = |x^2-3| + [x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{3})$ کدام است؟

$$1) (2+\sqrt{3}) \quad 2) (2\sqrt{3}+3) \quad 3) (3-\sqrt{3}) \quad 4) (3-2\sqrt{3})$$

۲. ضابطه $f(x) = |x^2-3| + [x^2]x$ را وقتی $x > \sqrt{3}$ است را به دست می‌آوریم؛

$$x > \sqrt{3} \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow [x^2] = 3, |x^2-3| = x^2-3 \Rightarrow f(x) = (x^2-3) + 3x \Rightarrow f'(x) = 2x+3 \Rightarrow f'_+(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+3$$

تذکره برای به دست آوردن مشتق توابع شامل قدر مطلق یا جزء صحیح در $x=a$ می‌توانیم از تعریف مشتق نیز استفاده کنیم.

تذکره ۲ در درس دوم، معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $x=a$ را به صورت $y-y_0 = m(x-x_0)$ نوشتیم، حالا اگر جای m مشتق راست را قرار دهیم به معادله نیم مماس راست، اگر جای m مشتق چپ تابع را قرار دهیم به نیم مماس چپ در نقطه $x=a$ می‌رسیم.

تست معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = |x-2| + 2|x-3|$ در $x=2$ کدام است؟

$$1) (y=x-4; x \geq 4) \quad 2) (y=-x+4; x \geq 4) \quad 3) (y=x-4; x \geq 2) \quad 4) (y=-x+4; x \geq 2)$$

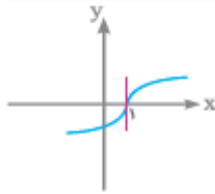
۴. شیب نیم مماس راست تابع f در $x=2$ برابر $f'_+(2)$ است، پس:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| + 2|x-3| - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) + 2(3-x) - 2}{x-2} = -1$$

حال با توجه به این که مقدار تابع در $x=2$ برابر ۲ است، پس معادله نیم مماس راست برابر است با:

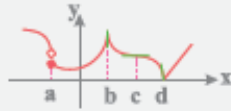
$$y-2 = -1 \times (x-2) \Rightarrow y = -x+4; x \geq 2$$

تذکر تنها حالتی که تابع f در $x=a$ خط مماس دارد ولی مشتق ندارد، مماس قائم است.



مثلاً مطابق شکل روبه‌رو، تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در $x=1$ مماس قائم دارد؛ اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تست اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع کدام است؟



۱ (۱)	۲ (۲)
۳ (۳)	۴ (۴)

۳ همهٔ نقاط مشخص‌شده را بررسی می‌کنیم. تابع f :

- (۱) در $x=a$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.
- (۲) در $x=b$ مشتق‌چپ و راست هر دو نامتناهی اند (نقطهٔ بازگشتی)، پس مشتق‌ناپذیر است.
- (۳) در $x=c$ شیب خط مماس موازی محور x ها است، پس $f'(c)=0$ است.
- (۴) در $x=d$ مشتق‌چپ و راست موجود و متناهی اما نابرابرند (نقطهٔ گوشه). در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

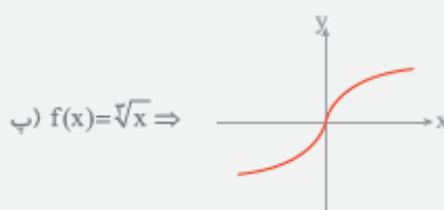
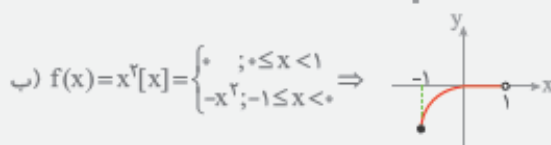
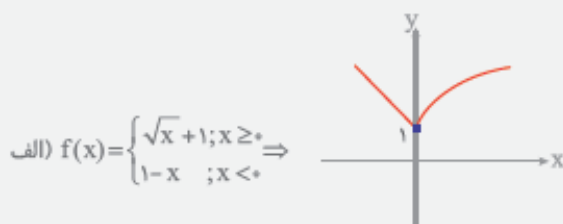
تست چه تعداد از توابع زیر در $x=0$ دارای نقطهٔ گوشه‌ای هستند؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & ; x \geq 0 \\ 1-x & ; x < 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (\text{پ}) \quad f(x) = x^2 [x] \quad (\text{ب})$$

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴) صفر
-------	-------	-------	-----------

۱ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:



در تابع (الف) شیب نیم‌مماس چپ و راست در $x=0$ متفاوت است. در تابع (ب) خط مماس در $x=0$ افقی و در تابع (پ) خط مماس در $x=0$ قائم است.

(۲) مشتق چپ و راست برابر باشند؛

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) = \overline{x(x-2)} = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'_-(2) = -2$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{y} x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = x + a \Rightarrow f'_+(2) = 2 + a$$

$$\Rightarrow 2 + a = -2 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow 2 + 2(-4) + b = 0$$

$$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

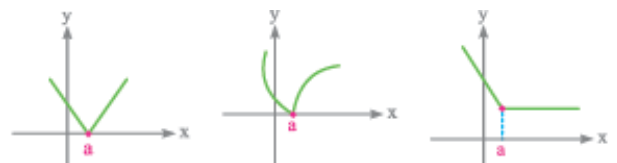
نقاط مشتق‌ناپذیر

نقاط مشتق‌ناپذیر به چهار دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند:

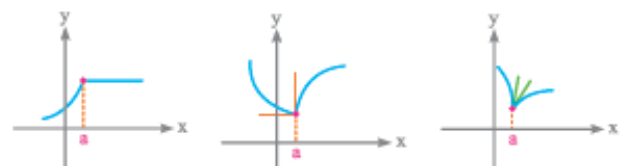
۱ تابع در $x=a$ ناپیوسته باشد.



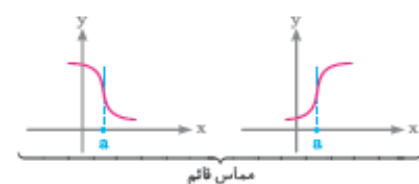
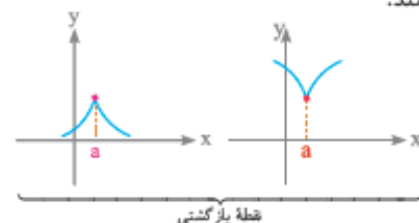
۲ تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست هر دو موجود و متناهی باشد، اما مقدار آن‌ها با هم برابر نباشد. به چنین نقطه‌ای، نقطهٔ گوشه‌ای می‌گویند.



۳ تابع در $x=a$ پیوسته باشد و از مشتق چپ و راست، یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد. به این نقطه نیز، نقطهٔ گوشه‌ای می‌گویند.



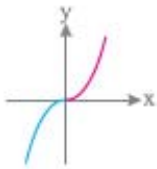
۴ تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست، در a هر دو نامتناهی باشند.



• توابع گویا در تمام نقاط به جز ریشه‌های مخرج پیوسته و مشتق پذیر هستند.
تابع $y = \frac{2x+3}{x-1}$ فقط در ریشه مخرج یعنی $x=1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است و تابع $y = \frac{2x+3}{x^2+1}$ در تمام نقاط مشتق پذیر است؛ زیرا مخرج آن ریشه ندارد.

• برای بررسی مشتق پذیری توابع شامل قدر مطلق، می‌توانیم از رسم شکل و نکات زیر استفاده کنیم:

مثلاً برای بررسی نقاط مشتق ناپذیر تابع $y = x|x|$ ، ابتدا ضابطه آن را به صورت $y = \begin{cases} x^2; & x \geq 0 \\ -x^2; & x < 0 \end{cases}$ می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، تابع در تمام نقاط مشتق پذیر است.

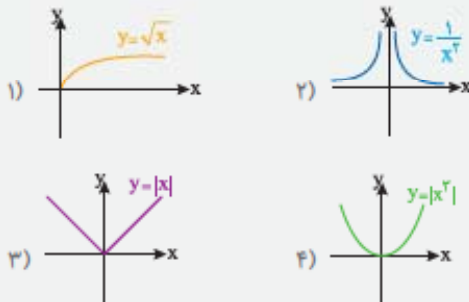


تست کدام تابع در $x=0$ مشتق پذیر است؟

$$y = \frac{1}{x^2} \quad (2) \quad y = \sqrt{x} \quad (1)$$

$$y = |x^2| \quad (4) \quad y = |x| \quad (3)$$

۴ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:



تابع $y = \sqrt{x}$ در $x=0$ فقط پیوستگی راست دارد، پس در این نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. تابع $y = \frac{1}{x^2}$ نیز به دلیل ناپیوستگی در $x=0$ مشتق ناپذیر است. مشتق تابع $y = |x|$ در راست و چپ نقطه $x=0$ وجود دارد اما باهم برابر نیست، پس این تابع نیز در $x=0$ مشتق ناپذیر است.

برای بررسی نقاط مشتق ناپذیر در توابع قدر مطلق از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

۱ در تابع $y = |f(x)|$ اگر $x=a$ ریشه ساده $f(x)$ باشد، تابع در $x=a$ دارای نقطه گوشه‌ای است و مشتق پذیر نیست.

تابع $y = |x^2 - x|$ در $x=0$ و $x=1$ مشتق پذیر نیست.

۲ در تابع $y = |f(x)|$ اگر $x=a$ ریشه مشترک $f(x)$ و $g(x)$ باشد، تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

تابع $y = |x^2 - x|$ در $x=0$ مشتق پذیر است اما در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

اگر نمودار تابع f را داشته باشیم و شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x=a$ نامتناهی [بی‌نهایت] باشد، برای مشخص کردن علامت ∞ می‌توانیم ابتدا چند خط قاطع در اطراف $x=a$ رسم و سپس این خط‌های قاطع را به خط مماس نزدیک کنیم. اگر شیب این خط‌های قاطع مثبت باشد، شیب خط مماس برابر $+\infty$ و اگر شیب این خط‌های قاطع منفی باشد، شیب این خط مماس برابر $-\infty$ خواهد بود.

مثلاً اگر قسمتی از نمودار تابع f به صورت زیر باشد. با توجه به این که شیب نیم مماس چپ در $x=1$ نامتناهی است، برای مشخص کردن علامت ∞ چند خط قاطع مطابق شکل رسم کرده‌ایم.

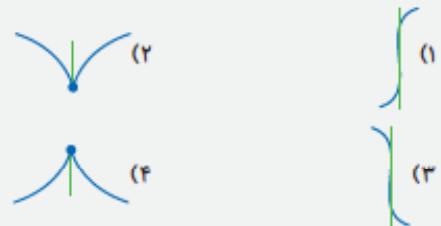
از آنجایی که شیب این خط‌ها مثبت است، پس شیب نیم مماس چپ در $x=1$ برابر $+\infty$ خواهد بود.



تست اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

نمودار تابع f در اطراف $x=a$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۴ از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ است، وقتی از سمت چپ به نقطه $x=a$ نزدیک می‌شویم، شیب خط‌های قاطع مثبت بوده و به $+\infty$ نزدیک می‌شوند؛



از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ است، بنابراین وقتی از سمت راست به نقطه $x=a$ نزدیک می‌شویم، شیب خط‌های قاطع منفی بوده و به $-\infty$ نزدیک می‌شوند؛



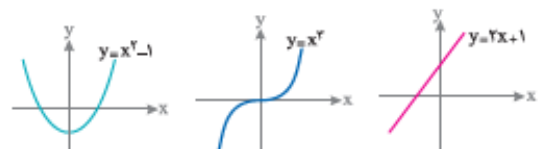
بنابراین نمودار تابع f در اطراف $x=a$ به صورت زیر است:



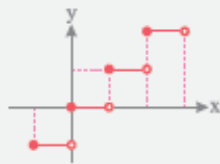
نقاط مشتق ناپذیری توابع معروف

• توابع چند جمله‌ای در تمام نقاط پیوسته و مشتق پذیر هستند.

توابع چند جمله‌ای زیر در تمام نقاط مشتق پذیرند:



مثال نقاط مشتق ناپذیری تابع $y = [x]$ را مشخص کنید.



برای پیدا کردن نقاط مشتق ناپذیر تابع $y = [x]$ ، ابتدا آن را رسم می‌کنیم. طبق نمودار، این تابع در نقاط صحیح ناپیوسته بوده و مشتق پذیر نیست.

تست اگر تابع $f(x) = (ax^2 + bx + 3)[2x]$ فقط در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} & (1) \\ -\frac{3}{4} & (2) \\ \frac{9}{4} & (3) \\ -\frac{9}{4} & (4) \end{array}$$

۴ چون تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است، پس عبارت $ax^2 + bx + 3$ به صورت $a(x-2)^2$ است؛

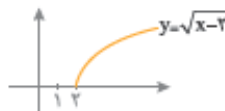
$$a(x-2)^2 = a(x^2 - 4x + 4) = ax^2 - 4ax + 4a$$

با مقایسه این دو عبارت نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 1) \quad 4a &= 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \\ 2) \quad b &= -4a \Rightarrow b = -4 \times \frac{3}{4} = -3 \end{aligned}$$

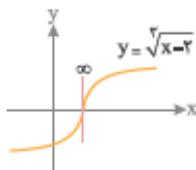
• توابع رادیکالی به صورت $y = \sqrt[n]{ax+b}$ در ریشه عبارت زیر رادیکال مشتق پذیر نیستند؛ زیرا:

۱ اگر فرجه رادیکال زوج باشد، تابع در ریشه عبارت زیر رادیکال ناپیوسته است.



تابع $y = \sqrt{x-2}$ در ریشه عبارت زیر رادیکال یعنی $x = 2$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.

۲ اگر فرجه رادیکال فرد باشد، تابع در ریشه عبارت زیر رادیکال پیوسته است، اما شیب خط مماس بر نمودار در این نقطه، نامتناهی است.



تابع $y = \sqrt[3]{x-2}$ در $x = 2$ مشتق ندارد؛ چون شیب خط مماس در این نقطه نامتناهی است.

تست خطهای $x = 1$ و $x = 3$ برای تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ مماس قائم هستند. مقدار $a \times b$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 8 & (1) & -8 & (2) \\ 12 & (3) & -12 & (4) \end{array}$$

۴ چون خطهای $x = 1$ و $x = 3$ برای تابع f مماس قائم هستند، پس عبارت زیر رادیکال در این دو نقطه صفر می‌شود:

$$\begin{cases} x=1: (1)^2 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \\ x=3: (3)^2 + 3a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 3$$

بنابراین $a \times b = -12$ است.

تست در نقطه مشتق ناپذیر تابع $f(x) = x|x-4|$ اختلاف مشتق چپ و راست چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} 4 & (1) & 16 & (2) \\ 8 & (3) & 12 & (4) \end{array}$$

۳ چون $x = 4$ ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در $x = 4$ مشتق ناپذیر است. حال برای محاسبه $f'_+(4)$ و $f'_-(4)$ داریم:

$$1) \quad x < 4 \Rightarrow |x-4| = -(x-4) \Rightarrow f(x) = -x(x-4) = -x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'_-(4) = -8 + 4 = -4$$

$$2) \quad x > 4 \Rightarrow |x-4| = x-4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'_+(4) = 8 - 4 = 4$$

پس اختلاف مشتق چپ و راست در $x = 4$ برابر $8 - (-4) = 12$ است.

تست به ازای چند مقدار a تابع $f(x) = |x^2 + ax - 4|$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است؟

$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ 2 & (2) \end{array}$$

۳ هیچ مقدار a **۴** هر مقدار a

۴ می‌دانیم تابع $y = |u(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده $u(x)$ دارای نقطه گوشه‌ای بوده و مشتق ناپذیر است. پس برای این که تابع f در تمام نقاط مشتق پذیر باشد، دلتای معادله $x^2 + ax - 4 = 0$ باید کمتر یا مساوی صفر باشد:

$$\Delta = a^2 - 4(1)(-4) = a^2 + 16 > 0$$

پس جواب هیچ مقدار a است، چون همواره $\Delta > 0$ است.

تست است. مقدار a کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -2 & (1) & -6 & (2) \\ 2 & (3) & 6 & (4) \end{array}$$

۲ ابتدا از $|x-3|$ فاکتور می‌گیریم:

$$f(x) = 2x|x-3| + a|x-3| = (2x+a)|x-3|$$

چون تابع در $x = 3$ مشتق پذیر است، پس $x = 3$ ریشه عبارت $2x + a$ است، پس:

$$2(3) + a = 0 \Rightarrow a = -6$$

• برای بررسی نقاط مشتق ناپذیر توابع شامل برکت، می‌توانیم از رسم شکل و نکات زیر استفاده کنیم:

۱ تابع $f(x) = (x-a)[x]$ در نقطه صحیح $x = a$ پیوسته است، اما مشتق پذیر نیست.

برای مثال، تابع $y = (x-1)[x]$ در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

۲ تابع $f(x) = (x-a)^2[x]$ در نقطه صحیح $x = a$ پیوسته و مشتق پذیر است.

برای مثال، تابع $y = (x-1)^2[x]$ در $x = 1$ مشتق پذیر است.

۳ هر یک از ضابطه‌ها در بازه‌های خود پیوسته و مشتق پذیرند. پس باید مشتق پذیری تابع f را در نقطه مرزی $x=2$ و $x=0$ بررسی کنیم؛
(۱) تابع f در $x=2$ و $x=0$ پیوسته است؛

$$x=0: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x) = 0 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2) = 0 \end{cases}$$

$$x=2: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6x - 4) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = 8 = f(2) \end{cases}$$

(۲) مشتق چپ و راست تابع f را در $x=2$ و $x=0$ به دست می‌آوریم؛

$$x < 0: f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'_-(0) = 0$$

$$0 \leq x \leq 2: f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = 2 \\ f'_-(2) = 6 \end{cases}$$

$$x > 2: f(x) = 6x - 4 \Rightarrow f'(x) = 6 \Rightarrow f'_+(2) = 6$$

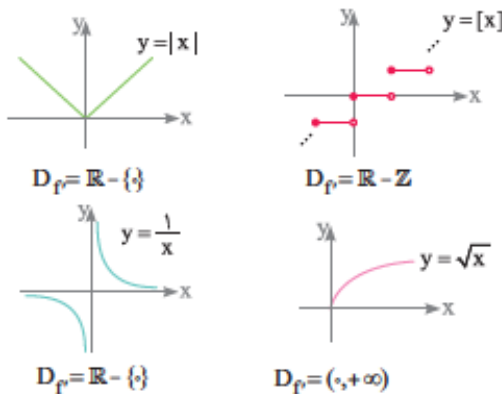
پس تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست اما در $x=2$ مشتق پذیر است؛

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & ; x < 0 \\ x^2 + 2x & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 6x - 4 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x & ; x < 0 \\ 2x + 2 & ; 0 < x < 2 \\ 6 & ; x > 2 \end{cases}$$

دامنه تابع مشتق

دامنه تابع مشتق، مجموعه طول نقاطی از تابع f است که تابع در آن نقاط مشتق پذیر باشد؛ پس:

$$D_f = D_f - \{ \text{طول نقاط مشتق ناپذیر تابع } f \}$$



برای به دست آوردن تابع مشتق در توابعی که ممکن است در بعضی نقاط مشتق ناپذیر باشند، مانند توابع چند ضابطه‌ای، توابع شامل جزء صحیح و...، ابتدا باید نقاط مشتق ناپذیر تابع را مشخص کنیم، سپس از تابع مشتق بگیریم و نقاط مشتق ناپذیر را از دامنه تابع f' حذف کنیم. مثلاً، تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست؛ پس باید $x=0$ را از دامنه تابع مشتق حذف کنیم؛

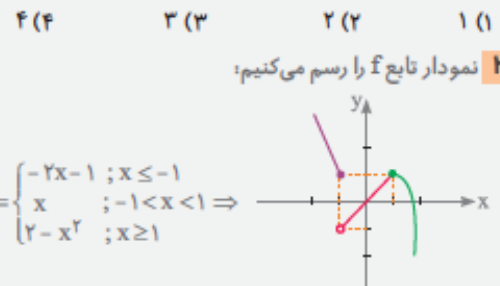
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$$

برای بررسی مشتق توابع چند ضابطه‌ای، باید مشتق پذیری را در هر یک از ضابطه‌ها و همچنین نقاط مرزی بررسی کنیم؛ در صورتی که نمودار هر یک از ضابطه‌ها قابل رسم باشد، بهترین راهکار برای بررسی مشتق پذیری، رسم شکل است.

مثلاً برای بررسی مشتق پذیری تابع $y = \begin{cases} 3-x & ; x \geq 1 \\ |x| & ; x < 1 \end{cases}$ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، تابع در $x=0$ پیوسته است، اما چون شیب نیم‌مماس چپ و راست در این نقطه برابر نیست، تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست. همچنین تابع در $x=1$ ناپیوسته است؛ پس در این نقطه مشتق پذیر نیست.

تست تابع $f(x) = \begin{cases} -2x-1 & ; x \leq -1 \\ x & ; -1 < x < 1 \\ 2-x^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟



با توجه به نمودار، تابع f در $x=-1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. در نقطه $x=1$ نیز شیب نیم‌مماس چپ و راست یکسان نیست؛ بنابراین تابع در دو نقطه به طول‌های -1 و 1 مشتق ناپذیر است.

۴ در مواردی که امکان رسم نبود، نقاط مشتق ناپذیر هر ضابطه را با توجه دامنه آن، جداگانه به دست می‌آوریم. سپس پیوستگی و مشتق پذیری نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم.

تست ضابطه تابع مشتق $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & ; x < 0 \\ x^2 + 2x & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 6x - 4 & ; x > 2 \end{cases}$ کدام است؟

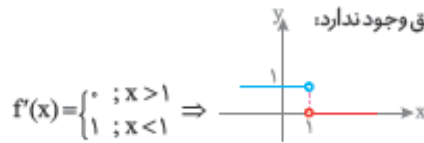
$$f'(x) = \begin{cases} 4x & ; x \leq 0 \\ 2x + 2 & ; 0 < x < 2 \\ 6 & ; x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & ; x < 0 \\ 2x + 2 & ; 0 < x < 2 \\ 6 & ; x > 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & ; x < 0 \\ 2x + 2 & ; 0 < x \leq 2 \\ 6 & ; x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & ; x < 0 \\ 2x + 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ 6 & ; x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

چون تابع در $x=1$ ناپیوسته است، پس در این نقطه مشتق ناپذیر بوده و نقطه $x=1$ دامنه تابع مشتق وجود ندارد:



تذکر در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، نمودار تابع f' بالای محور x ‌ها قرار دارد و در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، نمودار تابع f' در پایین محور x ‌ها قرار دارد. توجه کنید در نقاطی که خط مماس بر نمودار f افقی است، نمودار f' محور x ‌ها را قطع می‌کند. در جدول زیر، ارتباط بین نمودار توابع معروف با نمودار تابع مشتق آن‌ها بیان شده است:

$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
$f'(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$
$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
$f'(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$

در این بخش با سه نوع سؤال مواجه هستیم:
1 رسم نمودار f' با داشتن نمودار f .

تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار f' کدام می‌تواند باشد؟

(1)

(2)

(3)

(4)

تست اگر $f(x) = |x^2 - 2x|$ دامنه تابع مشتق کدام است؟

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\} \quad (2)$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \quad (1)$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 2\} \quad (4)$$

$$D_{f'} = \{0, 2\} \quad (3)$$

4 چون $x=2$ و $x=0$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق هستند، پس تابع f در این دو نقطه مشتق‌پذیر نیست، پس دامنه تابع مشتق برابر است با:
 $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

تست دامنه تابع مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$ کدام است؟

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \quad (2)$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\} \quad (1)$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad (4)$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad (3)$$

4 می‌دانیم توابع رادیکالی با فرجه 3 در ریشه‌های عبارت زیر رادیکال دارای مماس قائم هستند و در این نقاط مشتق ندارند. بنابراین ریشه‌های عبارت زیر رادیکال را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

تست ضابطه تابع مشتق $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & ; x \geq 1 \\ 3x^2 + x & ; x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 6x+1 & ; x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 1 \\ 6x+1 & ; x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x+1 & ; x \geq 1 \\ 2x+1 & ; x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x+1 & ; x > 1 \\ 2x+1 & ; x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

1 هر یک از ضابطه‌ها در بازه‌های خود پیوسته و مشتق‌پذیرند؛ پس باید مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه مرزی $x=1$ بررسی کنیم؛
 (1) حد چپ و راست تابع در $x=1$ برابر نیستند؛

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + x) = 4$$

پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست؛ یعنی $D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$ است و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & ; x \geq 1 \\ 3x^2 + x & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 1 \\ 6x+1 & ; x < 1 \end{cases}$$

نمودار تابع مشتق

برای رسم نمودار تابع مشتق f' به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

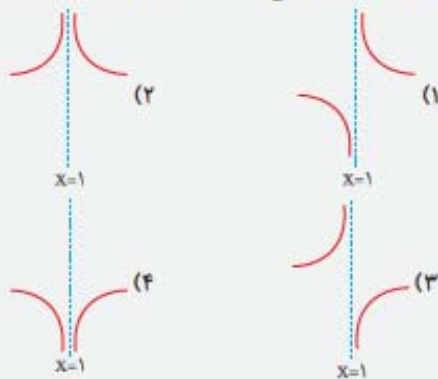
- ابتدا نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f را پیدا می‌کنیم تا دامنه تابع مشتق مشخص شود.
- از تابع f مشتق می‌گیریم و نمودار تابع f' را در دامنه به دست آمده رسم می‌کنیم.



مثلاً اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \geq 1 \\ x & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، برای رسم نمودار تابع f' ، ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم تا نقاط مشتق‌ناپذیر آن مشخص شود:

۳ رسم نمودار f' با داشتن ضابطه f .

تست نمودار مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ در اطراف $x=1$ کدام است؟



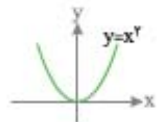
۲ نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ به صورت زیر است:



با توجه به این که شیب خطهای قاطع مثبت است، پس شیب مماس قائم در $x=1$ برابر $+\infty$ بوده و نمودار مشتق آن در اطراف $x=1$ به صورت مقابل است:

مشتق پذیری روی یک بازه

• تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هر گاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.



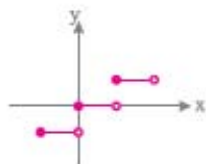
مثلاً، تابع $y = x^2$ در بازه $(-1, 1)$ مشتق پذیر است؛ زیرا در هر نقطه این بازه مشتق موجود و مقدار آن از رابطه $f'(x) = 2x$ به دست می آید.

• تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هر گاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد. مثلاً، تابع $y = x^2$ در بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است؛ زیرا در هر نقطه متعلق به بازه $(-1, 1)$ مشتق پذیر و در $x=1$ مشتق چپ و در $x=-1$ مشتق راست دارد.



• تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هر گاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد. به طور مشابه، تابع f روی بازه $(a, b]$ مشتق پذیر است، هر گاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

مثلاً، تابع $y = [x]$ در بازه $(0, 1)$ مشتق پذیر است؛ زیرا در هر عدد حقیقی متعلق به بازه $(0, 1)$ مشتق پذیر و در $x=0$ مشتق راست دارد.



۴ در بازه هایی که تابع f صعودی است، نمودار تابع f' بالای محور x ها و در بازه هایی که تابع f نزولی است، نمودار تابع f' در پایین محور x ها قرار دارد.

(۱) نمودار تابع f در بازه $(-\infty, 2]$ صعودی است؛ پس تابع f' در این بازه مثبت است؛ یعنی نمودار آن بالای محور x ها قرار دارد.

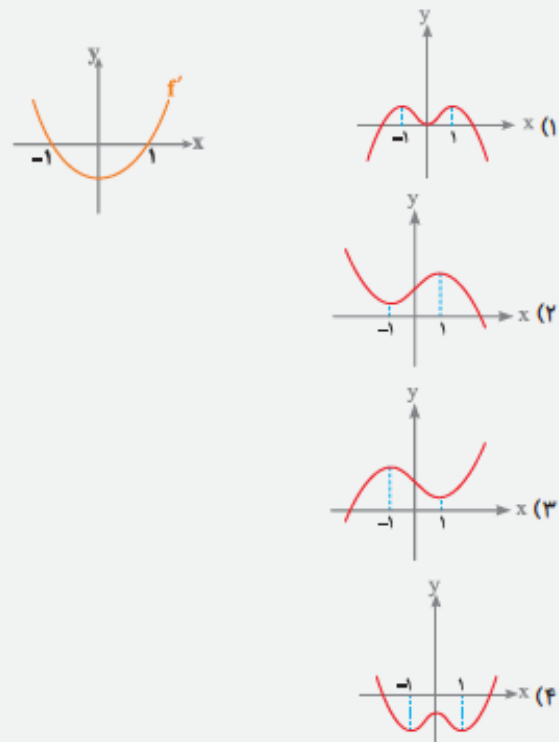
(۲) تابع در بازه $(2, +\infty)$ نزولی است؛ پس تابع f' در این بازه منفی است؛ یعنی نمودار آن پایین محور x ها قرار دارد.

(۳) توجه کنید که خط مماس بر نمودار تابع f در $x=2$ موازی محور x هاست؛ پس $f'(2) = 0$ می باشد؛ بنابراین نمودار تابع f' محور x ها را در نقطه ای با طول ۲ قطع می کند.

پس نمودار گزینه (۴) می تواند مربوط به تابع f' باشد.

۲ رسم نمودار f با داشتن نمودار f' .

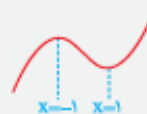
تست نمودار تابع f' به صورت مقابل است. کدام نمودار برای f قابل قبول است؟



۳ نمودار f' در نقاط $x=1$ و $x=-1$ با محور x ها برخورد می کند، پس خط مماس بر نمودار f در این دو نقطه افقی است.

از طرفی نمودار f' در بازه های $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ در بالای محور x ها

است، پس نمودار تابع f در این بازه ها صعودی است. در بازه $(-1, 1)$ نیز نمودار f' پایین محور x ها است، پس در این بازه نمودار f نزولی است.



تست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & ; x > 1 \end{cases}$ روی کدام یک از بازه‌های زیر

مشتق پذیر نیست؟

- (۱) $[-2, 1]$ (۲) $(1, +\infty)$
(۳) $[1, 2]$ (۴) $[-1, 0]$

۳ با توجه به نمودار تابع f ، این تابع در $x=1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است؛ پس در بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست.



تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع در کدام بازه

مشتق پذیر است؟



- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $[1, 3]$
(۳) $[2, 4]$ (۴) $[-2, 0]$

۲ تابع در نقطه $x=-1$ مشتق ناپذیر است، چون شیب نیم‌مماس چپ و راست نابرابر دارد.

تابع در نقطه $x=0$ مشتق ناپذیر است، چون در این نقطه ناپیوسته است.
تابع در نقطه $x=2$ مشتق ناپذیر است، چون ناپیوسته است.
بنابراین تنها گزینه (۲) صحیح است که شامل این نقاط نیست.

آهنگ تغییر

درس

مفاهیم این درس مشابه سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای در فصل اول فیزیک دوازدهم است.

آهنگ متوسط

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برابر است با نسبت تغییرات

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

تابع به متغیر که برابر است با:

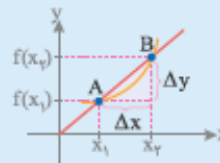
هنگامی که متغیر x از x_1 به x_2 تغییر می‌کند، مقدار $x_2 - x_1$ را نمو متغیر x می‌نامند و آن را با Δx یا h نشان می‌دهند؛ بنابراین آهنگ متوسط تغییر

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

تابع عبارت است از:

تذکر از نظر هندسی، آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برابر

شیب خطی است که دو نقطه با طول‌های x_1 و x_2 از نمودار تابع f را به هم وصل می‌کند.



مثال اگر $f(x) = \sqrt{x} + 1$ باشد.

(الف) آهنگ متوسط تابع در بازه $[1, 8]$ را محاسبه کنید.

(ب) آهنگ متوسط در $x = 8$ با $\Delta x = 19$ را محاسبه کنید.

$$\frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{(\sqrt{8} + 1) - (\sqrt{1} + 1)}{8 - 1} = \frac{3 - 2}{7} = \frac{1}{7} \quad (\text{الف})$$

(ب) می‌دانیم آهنگ متوسط تابع در x_1 با Δx به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{f(8 + 19) - f(8)}{19} = \frac{f(27) - f(8)}{19} = \frac{4 - 3}{19} = \frac{1}{19}$$

آهنگ لحظه‌ای

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = a$ برابر است با مقدار مشتق تابع f در $x = a$ ؛

$$x = a \quad \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x = a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

مثلاً، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 16$ برابر است با $f'(16)$ که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=16} f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

تذکر از نظر هندسی، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = a$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ است؛

$$x = a \quad \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر } f \text{ در } x = a = f'(a) = \tan \alpha$$



تست اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = 1$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع

$f(x)$ در $x=2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۳ می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=2$ برابر است با:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

اگر حد را به صورت زیر تفکیک کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 2} = 1$$

$$\Rightarrow f'(2) \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow f'(2) = 4$$

تذکر در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، آهنگ متوسط تغییر

در بازه $[x_1, x_2]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در وسط این بازه، یعنی نقطه‌ای به طول $\frac{x_1 + x_2}{2}$ برابر است. به عبارت دیگر در تابع درجه دوم f داریم:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

مثلاً، در تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ آهنگ متوسط تغییر در بازه $[1, 7]$ ، با

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{1+7}{2} = 4$ برابر است.

تست در تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ آهنگ متوسط تغییر در بازه

$[3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}]$ کدام است؟

- ۱) ۱ (۲) صفر (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $-\sqrt{5}$

۲ چون تابع $f(x)$ درجه دوم است، به جای اینکه آهنگ متوسط در بازه داده شده را محاسبه کنیم، آهنگ تغییر لحظه‌ای را در نقطه وسط بازه به دست می‌آوریم.

$$\frac{(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})}{2} = 3$$

$$f'(x) = -2x + 6 \xrightarrow{x=3} f'(3) = -2(3) + 6 = 0$$

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی

متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ای به طول $x = a$ است. a کدام است؟

- ۱) $11/75$ (۲) $12/25$ (۳) $12/5$ (۴) $13/5$

۲ آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 4$ به $x = 25$ برابر است با:

$$\frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = a$ برابر است با مقدار مشتق تابع در $x = a$ ؛ پس:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{49}{4} = \frac{24/5}{2} = 12/5$$

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ آهنگ متوسط

تغییر تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x = \frac{3}{4}$

چقدر کمتر است؟ (خارج - ۹۸)

- ۱) $0/03$ (۲) $0/04$ (۳) $0/05$ (۴) $0/06$

۲ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[0, 4]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1}) - (\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1})}{4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{9} + \frac{1}{5}) - (\sqrt{1} + 1)}{4} = \frac{(2 + \frac{1}{5}) - (2)}{4} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{4} \\ &= \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$ ؛ پس:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$+ \frac{(-)(x+1) - (1)(1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{3}{4} \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2(\frac{3}{4})+1}} - \frac{1}{(\frac{3}{4}+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25-8}{50} = \frac{17}{50} \end{aligned}$$

بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\frac{17}{50} - \frac{3}{10} = \frac{17-15}{50} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25} = 0/04$$

تست آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط تابع $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$ در بازه $[0, 2]$ در چند نقطه برابر هستند؟

- ۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲ ابتدا آهنگ تغییرات متوسط f را در بازه $[0, 2]$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

حال نقاطی از تابع که آهنگ لحظه‌ای در آن‌ها برابر صفر است را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x+1) - (x^2+2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} - 1 \notin [0, 2] & \times \\ x = \sqrt{3} - 1 & \checkmark \end{cases}$$

مسائل کاربردی آهنگ تغییر

برخی از مسائل مربوط به آهنگ تغییر به صورت کاربردی مطرح می‌شوند. در این مسائل نیز آهنگ لحظه‌ای و همچنین آهنگ متوسط تغییر از روابط گفته شده در درسنامه‌های قبلی به دست می‌آید. چند نمونه مشهور از این مسائل به صورت زیر است:

۱ مسائلی که راجع به سرعت یک متحرک مطرح می‌شوند.

تست با افزودن مقداری سم به یک تشت رشد باکتری، برای مدتی جمعیت هم‌چنان افزایش می‌یابد، اما این افزایش متوقف می‌شود و جمعیت شروع به افت می‌کند. میزان جمعیت این باکتری‌ها برحسب t از رابطه $m(t) = 10^3 t - 10^4 t^2 + 10^6$ به دست می‌آید. رشد جمعیت در کدام لحظه متوقف می‌شود؟

$$t = 1/5 \quad (1) \quad t = 2/5 \quad (2) \quad t = 4/3 \quad (3) \quad t = 5/4 \quad (4)$$

۴ باید از تابع $m(t)$ مشتق بگیریم و آن را صفر بگذاریم:
 $m(t) = 10^3 t - 10^4 t^2 + 10^6 \Rightarrow m'(t) = 10^3 - 2 \times 10^4 t = 0$
 $2 \times 10^4 t = 10^3 \Rightarrow t = 1/20 \Rightarrow t = 5/1000 \Rightarrow t = 1/200$

۳ مسائلی که راجع به جرم یا حجم یک کمیت مطرح می‌شوند.

مثال جرم یک توده باکتری پس از t ساعت از رابطه $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ به دست می‌آید. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ رابه دست آورید. باید $m'(4)$ را به دست آوریم:

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \xrightarrow{t=4} m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 6(4)^2 = \frac{1}{4} + 96 = 96\frac{1}{4}$$

تست حجم یک بالن کروی در حال باد شدن از رابطه $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید. با تغییر شعاع بالن از $2m$ به $3m$ ، حجم بالن تقریباً چقدر زیاد می‌شود؟

$$\frac{47\pi}{3} \quad (1) \quad \frac{58\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{39\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{76\pi}{3} \quad (4)$$

۴ آهنگ متوسط تغییر حجم بالن در بازه 2 تا 3 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{V(3) - V(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3 - \frac{4}{3}\pi(2)^3}{1} = \frac{4}{3}\pi(3^3 - 2^3) = \frac{4}{3}\pi(27 - 8) = \frac{4}{3}\pi \times 19 = \frac{76\pi}{3}$$

۳ در برخی مسائل، تابعی که می‌خواهیم آهنگ متوسط و یا آهنگ لحظه‌ای تغییر آن را محاسبه می‌کنیم به ما داده نشده است. پس باید ابتدا تابع مورد نظر را بسازیم. به تست زیر دقت کنید:

تست اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد، در لحظه‌ای که آهنگ لحظه‌ای مساحت این مستطیل برابر 30 می‌باشد، محیط مستطیل کدام است؟

$$15 \quad (1) \quad 20 \quad (2) \quad 40 \quad (3) \quad 60 \quad (4)$$

۳ باتوجه به این‌که طول مستطیل (y) سه برابر عرض آن (x) است، پس تابع مساحت و محیط آن به صورت زیر می‌باشد:

$$P = 2(x + y) \xrightarrow{y=3x} P(x) = 2(3x + x) = 8x$$

$$S = xy \xrightarrow{y=3x} S(x) = 3x^2$$

باتوجه به این‌که $S'(x) = 30$ است داریم:

$$S'(x) = 6x \Rightarrow 30 = 6x \Rightarrow x = 5$$

حال محیط مستطیل را در لحظه‌ای که عرض آن برابر 5 است، به دست می‌آوریم:

$$P(x) = 8x \Rightarrow P(5) = 8 \times 5 = 40$$

مثال معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، به صورت $h(t) = -5t^2 + 20t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟

لحظه‌ای که گلوله به سطح زمین می‌رسد، $h(t) = 0$ خواهد بود؛ پس:

$$h(t) = -5t^2 + 20t \xrightarrow{h(t)=0} -5t^2 + 20t = 0 \Rightarrow -5t(t - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases}$$

(لحظه پرتاب) غیر قابل قبول

سرعت جسم در لحظه برخورد با زمین، همان مقدار مشتق تابع مکان - زمان در لحظه $t = 4$ است؛ پس:

$$h'(t) = -10t + 20 \xrightarrow{t=4} h'(4) = -10(4) + 20 = -40 \frac{m}{s}$$

تست یک دینامیت، سنگی را منفجر می‌کند و تکه‌ای از آن سنگ را

با سرعت 50 متر بر ثانیه به سمت بالا می‌فرستد. این تکه سنگ پس از t ثانیه به ارتفاع $h(t) = 50t - 5t^2$ می‌رسد. سرعت سنگ هنگامی که در ارتفاع 80 متر از سطح زمین قرار دارد و روبه بالا می‌رود، چقدر است؟

$$25 \quad (1) \quad 30 \quad (2) \quad 35 \quad (3) \quad 40 \quad (4)$$

۲ برای یافتن سرعت سنگ، هنگامی که ارتفاع آن $80m$ است، ابتدا باید مقدار t را در آن موقعیت پیدا کنیم:

$$h(t) = 50t - 5t^2 = 80 \Rightarrow 5t^2 - 50t + 80 = 0 \Rightarrow 5(t - 2)(t - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases}$$

یعنی سنگ 2 ثانیه پس از انفجار و 8 ثانیه پس از انفجار در ارتفاع $80m$ قرار دارد. چون سرعت سنگ را هنگامی که رو به بالا می‌رود می‌خواهیم، پس سرعت آن را در $t = 2$ به دست می‌آوریم:

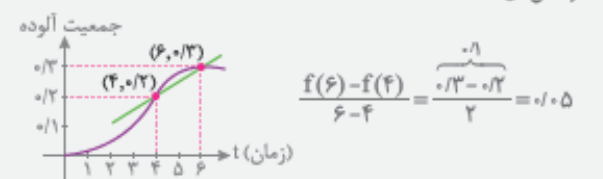
$$h(t) = 50t - 5t^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} v(t) = 50 - 10t$$

$$\Rightarrow v(2) = 50 - 20 = 30 \frac{m}{s}$$

۲ مسائلی که راجع به رشد یک کمیت، مانند رشد جمعیت یک شهر، رشد باکتری‌ها در یک محیط و ... مطرح می‌شوند.

مثال نمودار روبه‌رو جمعیت آلوده به یک ویروس را برحسب زمان (هفته) نشان می‌دهد. آهنگ متوسط رشد جمعیت آلوده از هفته چهارم تا هفته ششم را محاسبه کنید.

آهنگ متوسط رشد از هفته چهارم تا هفته ششم همان شیب خط واصل آن‌ها است:



کاربرد مشتق

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: واضح است که مشتق پیش‌نیاز این فصل است اما از اهمیت معادله و نامعادله و همچنین تسلط بر نمودار تابع درجه دوم در این فصل غافل نشوید که تسلط بر آن بسیار تعیین‌کننده و مهم است. بخش‌هایی از این فصل به کمی دانش هندسه هم نیاز دارد.

توصیه: برای اغلب سؤالات بهینه‌سازی باید بلد باشید تابع بسازید. ممکن است تابع شما از جنس طول، زمان، مساحت و یا حجم باشد که دانش شما در هندسه را هم می‌طلبد. بهترین راه برای تقویت توانایی حل مسائل بهینه‌سازی، حل چند باره سؤال‌های متنوع است. معمولاً زمانی توانایی حل سؤالی از این مبحث را در جلسه کنکور دارید که مشابه آن را قبلاً تمرین کرده باشید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۲	۲	۲	۱	۱	۲	۱	صفر

درس نقاط بحرانی و اکسترم‌های تابع

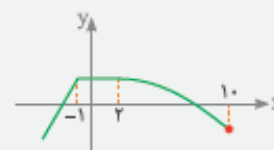
ارتباط یکنوایی با مشتق

می‌دانیم مشتق یک تابع، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع است. بنابراین می‌توان با تحلیل آن به نتایج زیر رسید.

برای بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق‌پذیر f در بازه (a, b) ، مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

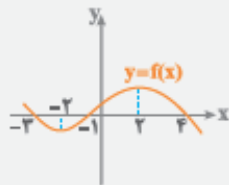
- اگر $f'(x) > 0$ باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر f مثبت و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است.
- اگر $f'(x) < 0$ باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر f منفی و در نتیجه تابع f اکیداً نزولی است.
- اگر در برخی نقاط، $f'(x) = 0$ باشد، خط مماس بر نمودار f موازی محور x ها است.

مثال نمودار تابع f به صورت زیر است. علامت مشتق تابع را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.



در این نمودار مشتق در بازه $(-\infty, -1)$ مثبت، در بازه $(-1, 0)$ برابر صفر و در بازه $(0, 1)$ منفی است.

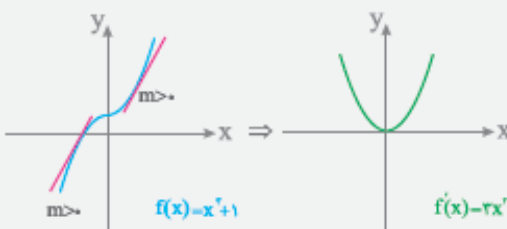
تست با توجه به نمودار تابع f ، علامت f' در کدام بازه مثبت است؟



- (۱) $(-\infty, -3)$
- (۲) $(-3, -1)$
- (۳) $(-2, 2)$
- (۴) $(-1, 4)$

۳ با توجه به نمودار، چون تابع f در بازه $(-2, 2)$ اکیداً صعودی است، پس در این بازه f' مثبت است.

مثال نمودار تابع $f(x) = x^3 + 1$ و مشتق آن به صورت زیر است:



پس اگر ضابطه تابع را داشتیم برای بررسی وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق‌پذیر f در بازه (a, b) باید مشتق تابع را به دست آوریم؛ سپس جدول تعیین علامت را برای تابع f' رسم کنیم. در بازه‌هایی که $f'(x)$ مثبت باشد، تابع f اکیداً صعودی و در بازه‌هایی که $f'(x)$ منفی باشد، تابع f اکیداً نزولی است.

مثال وضعیت یکنوایی تابع $f(x) = x^3$ را بررسی کنید.

با تحلیل نمودار این تابع می‌بینیم که چون $f'(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ برابر صفر است. پس تابع f اکیداً صعودی است.



در تحلیل ضابطه مشتق تابع هم به نتیجه‌ای مشابه می‌رسیم می‌دانیم $f'(x) = 3x^2$.

جدول تعیین علامت مشتق این تابع به شکل زیر است:

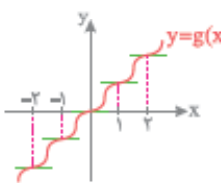
$f'(x) = 0$	x	$+$	$-$	$+$
$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$	f'	$+$	$-$	$+$

در $\mathbb{R}$ ، $f'(x) \geq 0$ و چون فقط در یک نقطه $f'(x) = 0$ شده است تابع اکیداً صعودی است.

برای درک بهتر، نمودارهای زیر را هم ببینید.



از آنجایی که $f'(x)$ در بازه $(2, 4)$ برابر صفر است، پس تابع f صعودی است.



چون $g'(x)$ فقط در نقاط صحیح برابر صفر است، پس تابع g اکیداً صعودی است.

تست در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x \leq 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases}$ اکیداً

صعودی است؟

- (1) $(1, +\infty)$
(2) $(0, +\infty)$
(3) $(-\infty, 1)$

(4) این تابع بازه اکیداً صعودی ندارد.

۳ ابتدا تابع چندضابطه‌ای داده شده را

رسم می‌کنیم.



بازه $(-\infty, 1)$ را در نظر بگیرید، در این بازه مشتق فقط در یک نقطه $(x = 0)$ برابر صفر شده پس این تابع در $(-\infty, 1)$ اکیداً صعودی است.

نکته با داشتن مشتق توابع پیوسته، می‌توان به بازه‌های صعودی یا نزولی تابع رسید و نمودار تقریبی برای آن رسم کرد.

مثال وضعیت یکنوایی تابع $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ را در دامنه‌اش

بررسی کنید.

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = 4x - 8$$

سپس جدول تعیین علامت را برای $f'(x)$ رسم می‌کنیم.

$$f'(x) = 0$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	2
f'	$-$ $+$

پس این تابع در بازه $(-\infty, 2)$ ، $f'(x) < 0$ است. پس تابع اکیداً نزولی است و در $(2, +\infty)$ ، $f'(x) > 0$ است پس تابع اکیداً صعودی است.

تست بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ در آن نزولی است،

کدام است؟

- (1) $(-4, 0)$ (2) $(0, 4)$ (3) $(2, 8)$ (4) $(6, 15)$

۲ باید جدول تعیین علامت f' را رسم کنیم:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$+$	$-$	$+$	

با توجه به جدول تعیین علامت مشتق، تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(4, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(0, 4)$ اکیداً نزولی است.

تست تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ در کدام بازه نزولی است؟

- (1) $(0, +\infty)$ (2) $(-2, 6)$
(3) $(-\infty, 0)$ (4) $\mathbb{R} - (-2, 6)$

۱ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x$$

سپس جدول تعیین علامت را برای $f'(x)$ رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = 0$$

$$-4x^3 + 24x^2 - 36x = 0 \Rightarrow -4x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow -4x(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

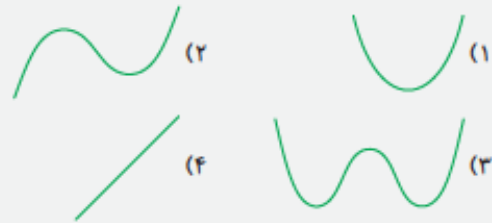
x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$-$	
f	$+$	$-$	$-$	

با توجه به جدول تعیین علامت، تابع در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی است. با توجه به گزینه‌ها، جواب گزینه (۱) است.

تحلیل $f'(x) \geq 0$ ، $f'(x) \leq 0$

اگر در یک بازه $f'(x) \geq 0$ ، در صورتی که مشتق تابع f در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً صعودی و اگر مشتق تابع f در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f صعودی است. به همین ترتیب اگر در یک بازه $f'(x) \leq 0$ ، در صورتی که مشتق تابع f در یک یا چند نقطه برابر با صفر باشد، تابع f اکیداً نزولی و اگر مشتق تابع f در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f نزولی است.

تست اگر $f(x) = 3x^2 - 3$ باشد، نمودار تابع $f(x)$ به کدام شکل است؟



۲ ابتدا f' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	-1	+	1
f'	+	-	+

پس f در $(-\infty, -1)$ ، اکیداً صعودی و در $(-1, +1)$ اکیداً نزولی و در $(1, +\infty)$ نیز اکیداً صعودی است.

همین‌طور مقدار مشتق تابع در $x = -1$ و $x = 1$ برابر صفر شده است، بنابراین در این نقاط خط مماس بر نمودار تابع f افقی خواهد بود. در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (۲) این شرایط را دارد.

یکنوایی توابع درجه سوم

مشتق تابع درجه سوم f ، یک تابع درجه دوم به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

۱ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ نزولی باشد، باید $f'(x) \leq 0$ باشد، یعنی در تابع $f'(x)$ باید $a < 0$ و $\Delta_f \leq 0$ باشد.

مثلاً تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 12x$ همواره نزولی است، زیرا:

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 12 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب} = -1 < 0 \\ \Delta = (4)^2 - 4(-1)(-12) = -32 \leq 0 \end{cases}$$

۲ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ صعودی باشد، باید $f'(x) \geq 0$ باشد، یعنی در تابع $f'(x)$ باید $a > 0$ و $\Delta_f \leq 0$ باشد.

مثلاً تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ همواره صعودی است، زیرا:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب} = 3 > 0 \\ \Delta = (-6)^2 - 4(3)(4) = -12 \leq 0 \end{cases}$$

۳ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ فقط در بازه (a, b) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، باید $x = a$ و $x = b$ ریشه‌های $f'(x)$ باشند. یعنی جدول تعیین علامت مشتق تابع به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

x	a	b
f'	-	+

 یا

x	a	b
f'	+	-

تست تابع با ضابطه $f(x) = mx^3 + 2x^2 + \frac{m}{3}x - 1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-\infty, -2]$ (۳) $[-2, 0]$ (۴) $[2, +\infty)$

۴ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 3mx^2 + 4x + \frac{m}{3}$$

برای این‌که تابع f همواره صعودی باشد، باید مشتق آن بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، بنابراین در تابع $f'(x)$ باید $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد:

$$1) a > 0 \Rightarrow 3m > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$2) \Delta = 4^2 - 4(3m)(\frac{m}{3}) \leq 0 \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow m \geq 2 \text{ یا } m \leq -2$$

از اشتراک جواب‌ها، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m به صورت $[2, +\infty)$ است.

تست تابع با ضابطه $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 1$ فقط در بازه $(-1, 2)$ صعودی است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۶ (۴) -۶

۱ چون $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 1$ فقط در بازه $(-1, 2)$ صعودی است، پس علامت $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$ فقط در این بازه مثبت است. بنابراین همان‌طور که در درسنامه گفته شد، $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های f' هستند، یعنی:

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \Rightarrow -3 - 2a + b = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow -12 + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 6 \Rightarrow a \times b = 9$$

یکنوایی توابع کسری

مشابه توابع چندجمله‌ای، برای تحلیل یکنوایی این توابع، از آن‌ها مشتق گرفته و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

تست نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ در بازه $(-\infty, a)$ نزولی است. بیش‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۱ (۳) $1 - \sqrt{2}$ (۴) $1 + \sqrt{2}$

۳ ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

اکنون با محاسبه ریشه‌های مشتق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

با توجه به جدول تعیین علامت، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ نزولی است و بیش‌ترین مقدار a برابر $1 - \sqrt{2}$ است.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
f'	-	+	-	+
f	↘	↗	↘	↗

نقاط بحرانی تابع

نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ $f'(c)$ برابر با صفر باشد. ۲ $f'(c)$ موجود نباشد.

توصیف تمام حالت‌های ممکن برای نقاط بحرانی به صورت جدول زیر است:

انواع نقاط بحرانی

مشتق برابر صفر است



خط مماس افقی است

مشتق ندارد



مماس یا
نیم مماس‌های عمودی



مشتق چپ و راست
نا برابر



ناپیوستگی

توجه توجه کنید نقاط ابتدا و انتهای دامنه، بحرانی محسوب می‌شوند.

مثلاً در تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ ، دامنه به صورت $[-1, 1]$ تعریف می‌شود، پس $x = -1$ و $x = 1$ نقطه بحرانی است.

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. تعداد نقاط بحرانی تابع f کدام است؟



- ۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۴ دامنه تابع f به صورت $[a, e) \cup (e, f]$ است. حال تک تک نقاط مشخص شده در نمودار که عضو دامنه هستند را بررسی می‌کنیم: چون $x=a$ و $x=f$ نقاط ابتدا و انتهای دامنه هستند، پس این نقطه‌ها بحرانی‌اند.

خط مماس در $x=b$ قائم است، پس این نقطه بحرانی است.

خط مماس بر نمودار در $x=c$ افقی است، پس مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است و این نقطه بحرانی است.

تابع در $x=d$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است، پس این نقطه نیز بحرانی است.

بنابراین این تابع دارای ۵ نقطه بحرانی است.

تابع کسری f ، در بازه‌ای که شامل ریشه مخرج کسر است، غیر یکنوا است.

مثلاً در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ، ریشه مخرج می‌باشد و تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست، ولی مشتق این تابع $(f'(x) = -\frac{1}{x^2})$ در بقیه نقاط دامنه یعنی $\mathbb{R} - \{0\}$ ، موجود و همواره مقداری منفی است.



تست تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

- ۱) $(-2, 0)$ ۲) $(-\infty, -2)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $\mathbb{R}$

۲ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 \times (1-x^2) - (-2x)(x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} > 0$$

صورت و مخرج کسر، عبارت‌های همواره مثبت‌اند، بنابراین مشتق تابع همواره مثبت است. تابع در هر بازه‌ای که فاقد ریشه مخرج باشد، صعودی است.

$$(1-x^2)^2 = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تنها گزینه‌ای که فاقد $x = 1$ و $x = -1$ است، گزینه (۲) است.

یکنوایی توابع چندضابطه‌ای

در این توابع، به جز بررسی یکنوایی هر ضابطه به طور جداگانه در دامنه خودش، باید نگاه ویژه‌ای به نقاط مرزی داشته باشید. اگر این توابع در نقطه مرزی ناپیوسته باشند، حتماً آن‌ها را رسم کنید.

تست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; x \geq 0 \\ 3x+1 & ; x < 0 \end{cases}$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

- ۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-3, 2)$ ۳) $(-2, 3)$ ۴) $(2, 3)$

۴ واضح است که در $x=0$ تابع $f(x)$ ناپیوسته است (حد چپ و راست برابر نمی‌باشند). پس این تابع را رسم می‌کنیم.



نمودار این تابع در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است و جواب باید بازه‌ای باشد که شامل $x=0$ نباشد، که تنها گزینه موجود «۴» است. توجه کنید هر دو ضابطه در دامنه آن‌ها مثبت بود و اگر به نقطه مرزی توجه نمی‌کردیم گزینه نادرست، یعنی $\mathbb{R}$ را انتخاب می‌کردیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x > 0 \\ 3 & ; x < 0 \end{cases}$$

در ادامه، نقاط بحرانی توابع معروف را بررسی می‌کنیم:

۱ توابع چند جمله‌ای در تمام نقاط مشتق پذیر هستند، پس نقاط بحرانی آن‌ها فقط جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ می‌باشند.

مثلاً تابع $f(x) = x(2x - 3)$ دارای یک نقطه بحرانی است، چون:

$$f(x) = 2x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

تست تابع با ضابطه $f(x) = 4x^2 - x^4$ در بازه $[-1, 2]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۳ ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 8x - 4x^3$$

اکنون مشتق تابع f را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(2 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

چون $x = -\sqrt{2}$ در بازه $[-1, 2]$ وجود ندارد، پس قابل قبول نیست.

همچنین می‌دانیم نقاط ابتدا و انتهای بازه جزء نقاط بحرانی محسوب می‌شوند. بنابراین مجموعه طول نقاط بحرانی تابع برابر $\{-1, 0, \sqrt{2}, 2\}$ است.

تست اگر مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ صورت $\{1, 3\}$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳ چون $x = 1$ و $x = 3$ طول نقاط بحرانی تابع f هستند، پس $f'(1) = 0$ و $f'(3) = 0$ است، پس:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) f'(1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ 2) f'(3) = 0 \Rightarrow 27 - 6a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 6, b = 9 \Rightarrow b - a = 3$$

۲ می‌دانیم در توابع گویا، ریشه‌های مخرب کسر جزو نقاط مشتق‌ناپذیر هستند. اما چون این نقاط در دامنه تابع وجود ندارند، پس بحرانی محسوب نمی‌شوند. در نتیجه نقاط بحرانی توابع گویا، فقط از حل معادله $f'(x) = 0$ به دست می‌آیند.

مثلاً تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$ دارای یک نقطه بحرانی است، چون:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

و تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ نقطه بحرانی ندارد، زیرا مشتق تابع همواره بزرگتر از صفر است:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

تست تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ در بازه $[-\frac{1}{4}, 2]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴ چون $x = -\frac{1}{4}$ و $x = 2$ نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند، پس این دو نقطه بحرانی محسوب می‌شوند؛ درضمن چون این تابع کسری است، پس طول نقاط بحرانی به شرطی که در دامنه باشند، ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ هستند، بنابراین داریم:

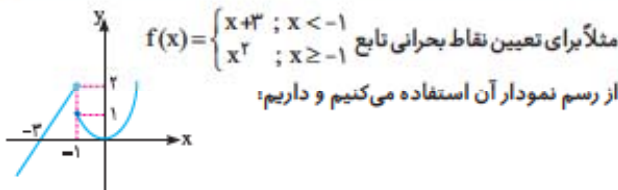
$$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (1)(x^2 + 1)}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

با توجه به بازه $[-\frac{1}{4}, 2]$ ، فقط نقطه $x = 1$ عضو این بازه است پس این تابع دارای ۳ نقطه بحرانی با طول‌های $x = -\frac{1}{4}$ ، $x = 1$ و $x = 2$ است.

۳ برای تعیین نقاط بحرانی توابع چندضابطه‌ای، باید ابتدا نقاط بحرانی هر یک از ضابطه‌ها را مشخص کنیم. سپس پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقاط مرزی بررسی و وضعیت بحرانی بودن آن را تعیین کنیم.

تذکر در صورتی که رسم نمودار هر یک از ضابطه‌ها ساده باشد، بهترین راهکار برای تعیین نقاط بحرانی رسم شکل است.



مشتق تابع f در $x = -1$ وجود ندارد و در $x = 0$ برابر صفر است. پس تابع f دارای ۲ نقطه بحرانی به طول‌های $x = -1$ و $x = 0$ است.

تست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x; & x < 0 \\ x^3 - 6x; & x \geq 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳ از هر یک از ضابطه‌ها مشتق می‌گیریم و آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x < 0: f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \xrightarrow{f'(x)=0} x = -1$$

$$x \geq 0: f(x) = x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6 \xrightarrow{f'(x)=0} x = \sqrt{2}$$

در ضمن در نقطه مرزی $x = 0$ تابع پیوسته است، پس باید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را محاسبه کنیم. از آنجایی که $f'_-(0) = 2$ و $f'_+(0) = -6$ است، پس تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست؛ بنابراین ۳ نقطه با طول‌های $-\sqrt{2}$ ، 0 ، $\sqrt{2}$ نقاط بحرانی تابع f محسوب می‌شوند.

۲ برای مشخص کردن نقاط بحرانی توابع شامل قدرمطلق یک راهکار این است که تابع را به‌ازای ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسیم. سپس نقاط بحرانی هر ضابطه را در دامنه و همچنین در نقاط مرزی مشخص کنیم.

تست نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه

رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۳ ابتدا ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

سپس مشتق عبارت بدون قدر مطلق را محاسبه می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$y' = (x^2 + x - 2) + (2x + 1)(x - 1) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

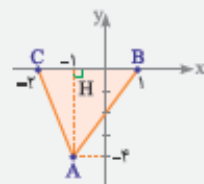
با محاسبه عرض نقاط بحرانی داریم:

پس $A(-1, -4)$ ، $B(1, 0)$ و $C(-2, 0)$

سه رأس مثلث هستند، برای محاسبه

مساحت می‌نویسیم:

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$



۵ برای مشخص کردن نقاط بحرانی توابع شامل جزء صحیح یک راهکار رسم نمودار تابع است.

مثال نقاط بحرانی تابع $f(x) = x - [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ به دست آورید.

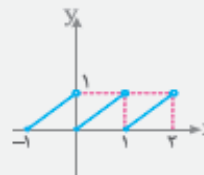
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، چون $x = -1$

ابتدای دامنه است، پس یکی از نقاط

بحرانی است. از طرفی چون در $x = 0$ و

$x = 1$ تابع ناپیوسته است، پس این دو

نقطه نیز بحرانی هستند.



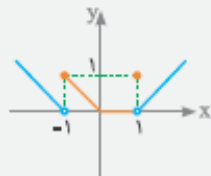
تست تابع $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| \leq 1 \\ |x|-1 & ; |x| > 1 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی مشتق ناپذیر دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۳ ابتدا ضابطه $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| \leq 1 \\ |x|-1 & ; |x| > 1 \end{cases}$ را ساده می‌کنیم یعنی آن

را به شکل تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & ; x < -1 \\ -x & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ x-1 & ; x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به نمودار، ۳ نقطه به طول‌های $x = -1, x = 0, x = 1$

مشتق ناپذیر و بحرانی‌اند. [توجه کنید مشتق در بازه $(0, 1)$ برابر صفر است،

پس همه نقاط این بازه بحرانی و مشتق‌پذیر اند، اما در این سوال نقاط بحرانی

مشتق ناپذیر مدنظر است.]

اگر تابع داده شده قابل رسم باشد، بهترین راهکار برای تعیین نقاط بحرانی، رسم شکل است.

مثلاً برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^2 - 2|x|$ ابتدا آن را در $x = 0$ به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

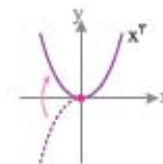
$$f(x) = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



نمودار تابع f دارای ۳ نقطه بحرانی به طول‌های $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$ است.

برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x^3|$ از رسم شکل استفاده می‌کنیم.

این تابع دارای یک نقطه بحرانی به طول $x = 0$ است، چون در این نقطه f' برابر صفر است.



نکته طول نقاط بحرانی در توابع به فرم $y = |f(x)|$ از حل معادلات $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ به دست می‌آیند.

مثلاً برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی تابع $y = |x^2 - 4x|$ می‌توانیم معادلات زیر را حل کنیم:

$$y = |x^2 - 4x| \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

نکته در تابع $y = g(x)|f(x)|$ اگر $x = a$ ریشه $f(x)$ باشد، آن‌گاه $x = a$ طول نقطه بحرانی است و برای پیدا کردن سایر نقاط بحرانی مشتق با حذف قدر مطلق، مشتق تابع $y = g(x)f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

تست مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^2|x-2|$ کدام است؟

$$\{0, 2\} \quad (1) \quad \{0, \frac{4}{3}, 2\} \quad (2)$$

$$\{1, \frac{4}{3}\} \quad (4) \quad \{0, 1, 2\} \quad (3)$$

۲ چون $x = 2$ ریشه ساده داخل قدر مطلق است، پس $x = 2$ یکی از نقاط بحرانی است.

حال مشتق $y = x^2(x-2)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y' = 2x(x-2) + x^2$$

$$3x^2 - 4x = x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

پس مجموعه طول نقاط بحرانی این تابع به صورت $\{0, \frac{4}{3}, 2\}$ است.

۷ توان‌های کسری:

چون توان‌های کسری به شکل رادیکال قابل نمایش هستند پس در هر نقطه از دامنه که پایه صفر شود نقطه بحرانی داریم. برای محاسبه سایر نقاط بحرانی، ریشه صورت و مخرج مشتق تابع را به دست می‌آوریم. توجه کنید که ریشه‌ها در دامنه تابع باشند.

تست مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \times \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

- (۱) $\{-2, 2\}$ (۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
 (۳) $\{-2, 0, 2\}$ (۴) $\{-7, 0, 1\}$

۳ می‌دانیم $f(x) = (x^2 - 28) \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}}$ است. پس:

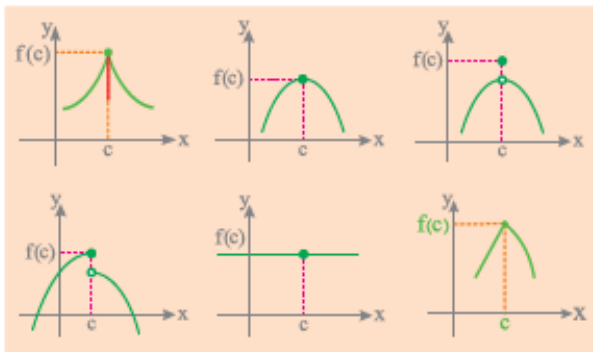
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1 - 28) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(-27) = -\frac{9}{x^{\frac{2}{3}}}$$

ریشه‌های صورت کسر f' برابر $x = \pm 2$ و ریشه مخرج کسر $x = 0$ است. در $x = 0$ مشتق مخرج صفر می‌شود، پس مشتق وجود ندارد، توجه کنید که $x = 0$ در دامنه تابع وجود دارد پس همگی عضو دامنه f هستند. بنابراین مجموعه طول نقاط بحرانی به صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

اکسترم‌های نسبی تابع

۱ ماکزیمم نسبی:

اگر در تابع f ، عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط اطرافش بالاتر (یا مساوی) باشد، یعنی مقدار تابع در این نقطه، از مقادیر نقاط همسایگی آن بیشتر (یا مساوی) باشد، آن‌گاه تابع در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد. به بیان ریاضی تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود. مثلاً توابع زیر در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارند:

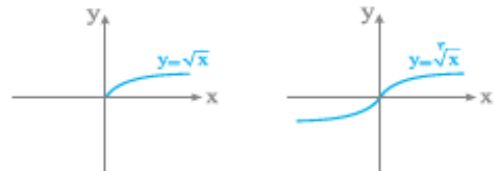


۲ مینیمم نسبی:

اگر در تابع f ، عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط اطرافش پایین‌تر (یا مساوی) باشد، یعنی مقدار تابع در این نقطه، از مقادیر نقاط همسایگی آن کمتر (یا مساوی) باشد، آن‌گاه تابع در این نقطه مینیمم نسبی دارد. به بیان ریاضی تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

۶ در تابع رادیکالی $y = \sqrt[n]{f(x)}$ جواب‌های معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی هستند؛ یعنی برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی تابع‌های رادیکالی، باید عبارت زیر رادیکال و همچنین مشتق عبارت زیر رادیکال را برابر صفر بگذاریم. [نیزه جواب‌های معادله $f(x) = 0$ در توابع رادیکالی با فرم زوج، طول نقاط ابتدا و انتهای بازه دامنه هستند و در توابع رادیکالی با فرم فرد، شیب فقط مماس یا نیم مماس، نامتناهی است.]

مثلاً در دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ نقطه $x = 0$ بحرانی است:



در $x = 0$ شیب خط مماس نامتناهی است.

مثال ۱ تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - 8}$ دارای چند نقطه بحرانی است؟

عبارت زیر رادیکال و همچنین مشتق عبارت زیر رادیکال را برابر صفر می‌گذاریم:

$$1) x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$2) 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

مثال ۲ تابع $y = \sqrt{x^2 - x}$ دارای چند نقطه بحرانی است؟

عبارت زیر رادیکال و همچنین مشتق عبارت زیر رادیکال را برابر صفر می‌گذاریم:

$$1) x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$2) 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin D_f$$

چون $x = \frac{1}{2}$ در دامنه تابع نیست، پس تابع دارای دو نقطه بحرانی است.

تذکر برای پیدا کردن تعداد نقطه بحرانی توابعی به شکل $y = g(x)\sqrt[n]{f(x)}$ ، همچنان جواب‌های معادله $f(x) = 0$ نقاط بحرانی هستند، اما در حل معادله $y' = 0$ حتماً به دامنه تابع توجه کنید.

مثال تابع $y = x\sqrt{x^2 - 2x}$ دارای چند نقطه بحرانی است؟

عبارت زیر رادیکال را برابر صفر می‌گذاریم.

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 0$$

سپس مشتق y را محاسبه می‌کنیم.

$$y' = \sqrt{x^2 - 2x} + \frac{x(2x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \frac{-x(2x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x}} \Rightarrow 2x^2 - 4x = -x(2x - 2)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x = 0$$

$$2x(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

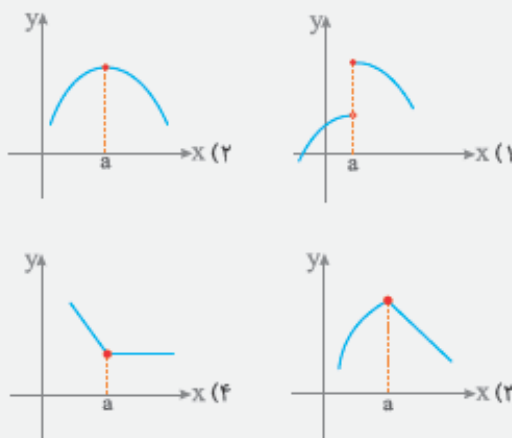
با توجه به اینکه دامنه این تابع $(0, 2) \cap \mathbb{R}$ است. پس $x = \frac{3}{2}$ در دامنه نیست و این تابع ۲ نقطه بحرانی دارد.

نکته توجه داشته باشید هر نقطه بحرانی، لزوماً نقطه اکسترم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

مثلاً مشتق تابع $y = x^3$ در $x = 0$ برابر صفر است. پس $x = 0$ طول نقطه بحرانی تابع است. اما از آنجایی که تابع $y = x^3$ اکیداً صعودی است، پس نمی‌تواند مینیم یا ماکزیم نسبی داشته باشد و در نتیجه $x = 0$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع نیست.



تست کدام نمودار مربوط به تابعی است که در نقطه ماکزیم نسبی، پیوسته و مشتق ناپذیر است؟



۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

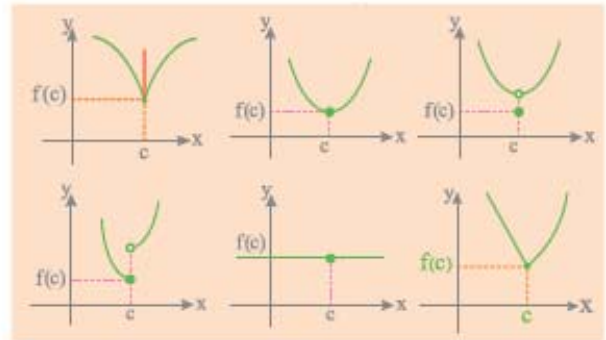
- (۱) نمودار تابع در نقطه ماکزیم نسبی ناپیوسته است.
- (۲) نمودار تابع در نقطه ماکزیم نسبی پیوسته و مشتق پذیر است.
- (۳) نمودار تابع در نقطه ماکزیم نسبی پیوسته و مشتق ناپذیر است.
- (۴) نمودار تابع در $x = a$ دارای مینیم نسبی است.

تشخیص اکسترم نسبی (آزمون مشتق اول)

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد به طوری که f در $x = c$ پیوسته و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد. در این صورت برای تعیین نوع اکسترم نسبی تابع f ، ضابطه $f'(x)$ را به دست آورده و برای آن جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم. با عبور از روی c از چپ به راست جدول تعیین علامت:

- ۱ اگر علامت f' از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطه ماکزیم نسبی تابع f است.
- ۲ اگر علامت f' از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطه مینیم نسبی تابع f است.
- ۳ اگر علامت f' تغییر نکند، آن‌گاه $x = c$ ماکزیم یا مینیم نسبی ندارد.

مثلاً توابع زیر در $x = c$ مینیم نسبی دارند:

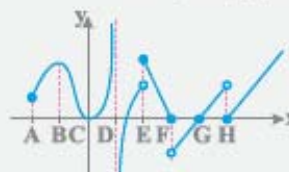


تذکره ۱ نقاط ماکزیم و مینیم یک تابع را نقاط اکسترم آن تابع هم می‌گوییم.

تذکره ۲ نقاط ابتدا و انتهای دامنه نمی‌توانند اکسترم نسبی باشند، زیرا تابع در یک طرف از همسایگی آن‌ها تعریف نشده است.

تذکره ۳ نقاط واقع بر تابع ثابت هم ماکزیم نسبی هستند و هم مینیم نسبی.

تست نمودار تابع f به شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



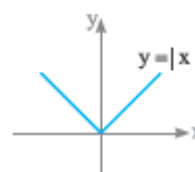
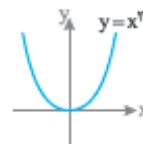
- (۱) مجموعه نقاط ماکزیم نسبی تابع $\{B, E\}$ است.
- (۲) نقطه G اکسترم نسبی نیست.
- (۳) نقطه‌ای به طول A اکسترم نسبی نیست.
- (۴) مجموعه نقاط مینیم نسبی تابع $\{C, E, H\}$ است.

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- (۱) چون عرض نقاط B و E نسبت به عرض نقاط اطراف آن‌ها بزرگ‌تر است، پس این نقاط ماکزیم نسبی‌اند.
- (۲) عرض نقاط قبل از G کوچک‌تر از عرض نقطه G و عرض نقاط بعد از G بزرگ‌تر از عرض نقطه G است. پس این نقطه اکسترم نسبی نیست.
- (۳) ابتدا و انتهای بازه، اکسترم نسبی نیستند.
- (۴) نقطه E ماکزیم نسبی است، چون عرض آن، از عرض نقاط اطرافش بیشتر است.

اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیم یا مینیم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر نقطه اکسترم نسبی تابع یک نقطه بحرانی آن است.

مثلاً تابع $y = x^2$ در نقطه $x = 0$ دارای مینیم نسبی است. از آنجایی که مشتق این تابع در $x = 0$ موجود است، طبق این قضیه $f'(0) = 0$ است. ممکن است تابع در نقطه اکسترم نسبی خود مشتق نداشته باشد. به نمودار $y = |x|$ دقت کنید، این تابع در نقطه $x = 0$ دارای مینیم نسبی است، اما به دلیل این که این نقطه، گوشه‌ای است در این نقطه مشتق ندارد.

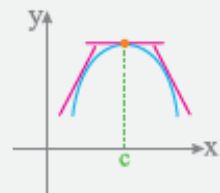
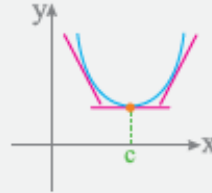


آزمون مشتق اول

 علامت f' از مثبت به منفی تغییر کند. علامت f' از منفی به مثبت تغییر کند.

x	c
f'	- +

x	c
f'	+ -


 علامت f' در اطراف $x=c$ منفی

 علامت f' در اطراف $x=c$ مثبت

x	c
f'	- -

x	c
f'	+ +


تست طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ کدامند و از چه نوع هستند؟

- (۱) $x = -1$ طول ماکزیمم و $x = 2$ طول مینیمم
- (۲) $x = 1$ طول ماکزیمم و $x = -2$ طول مینیمم
- (۳) $x = -1$ طول مینیمم و $x = 2$ طول ماکزیمم
- (۴) $x = 1$ طول مینیمم و $x = -2$ طول ماکزیمم

۳ می‌دانیم ریشه‌های $f'(x)$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس از تابع مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \underbrace{-x^2 + x + 2}_{a+c=b} = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

 حال با کمک جدول تعیین علامت f' ، نحوه تغییرات تابع f را مشخص می‌کنیم تا نوع اکسترمم‌های نسبی مشخص شود.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	-
f		↗	↘	

 در نتیجه $x = -1$ طول نقطه مینیمم نسبی و $x = 2$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

تست تابع با ضابطه $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ به ترتیب از راست به چپ دارای چند ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است؟

- (۱) ۳ - ۰
- (۲) ۲ - ۱
- (۳) ۳ - ۱
- (۴) ۴ - ۳

۲ از تابع f مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$$

$$= 4x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = -1, x = 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'	-	+	-	+	+
f		↗	↘	↗	

 با توجه به جدول تعیین علامت f' ، تابع دو مینیمم نسبی در $x = -2$ و $x = 0$ و یک ماکزیمم نسبی در $x = -1$ دارد.

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $2\sqrt{5}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $5\sqrt{2}$

۲ در توابع چند جمله‌ای و گویا ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه فرد $f'(x)$ طول نقاط اکسترمم تابع هستند. پس مشتق تابع را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 1}_{x^2=1} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

تست اگر $f'(x) = (x+1)(x-3)$ مشتق تابع پیوسته $f(x)$ باشد، طول نقطه ماکزیمم نسبی این تابع کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) -۱
- (۴) -۳

۳ ابتدا جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم.

$$f'(x) = (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ x = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & -1 & 3 \\ f' & + & - & + \end{matrix}$$

 در $x = -1$ علامت مشتق از چپ به راست به صورت مثبت به منفی تغییر کرده، پس $x = -1$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است.

 در $x = 3$ علامت به صورت منفی به مثبت تغییر کرده است پس $x = 3$ طول نقطه مینیمم نسبی است.

۱ در توابع چندجمله‌ای و گویا، برای به دست آوردن طول نقاط اکسترمم نسبی، کافایت ریشه‌های ساده معادله $f'(x) = 0$ را به دست آوریم. توجه داشته باشید اگر f' ریشه مضاعف داشته باشد، آن ریشه طول نقطه اکسترمم نخواهد بود.

 مثلاً برای به دست آوردن نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ ابتدا معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0$$

 $x = 3$ ریشه ساده $\rightarrow$ $x = 0$ ریشه مضاعف

 پس این تابع، فقط یک نقطه اکسترمم به طول $x = 3$ دارد.

 و برای به دست آوردن طول نقاط اکسترمم تابع $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ داریم:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

 پس این تابع دارای دو نقطه اکسترمم به طول $x = -1$ و $x = 1$ است.

تست مجموعه طول نقاط مینیمم نسبی تابع $f(x) = [x]$ کدام است؟

$\mathbb{Z}$ (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $\emptyset$ (۴)

۲ با توجه به نمودار، در تابع $y = [x]$ نقاط به طول صحیح $x \in \mathbb{Z}$ از همسایه‌های چپ خود بالاتر و با همسایه‌های راست خود مساوی‌اند.

بنابراین ماکزیمم نسبی هستند. نقاط به طول غیر صحیح، با نقاط اطراف خود هم عرض‌اند، بنابراین هم ماکزیمم نسبی‌اند و هم مینیمم نسبی. پس مجموعه طول نقاط ماکزیمم نسبی نمودار برابر $\mathbb{R}$ و مجموعه طول نقاط مینیمم نسبی نمودار برابر $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ است.



نکته اگر نقطه $A(m, n)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد

دو نتیجه دارد:

۱) $f(m) = n$ ۲) $f'(m) = 0$

تست اگر نقطه $(-1, -4)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع

$f(x) = ax^2 + bx - 3$ باشد، مقدار b کدام است؟

$\mathbb{Z}$ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱ چون نمودار تابع از نقطه $(-1, -4)$ می‌گذرد، پس این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$f(-1) = -4 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) - 3 = -4 \Rightarrow a - b = -1$$

از طرفی $x = -1$ طول نقطه اکسترمم نسبی است، پس $f'(-1) = 0$ است:

$$f'(x) = 2ax + b \xrightarrow{f'(-1)=0} -2a + b = 0$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$$

تست اگر نقطه $(-3, 4)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع

$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

۲ چون نمودار تابع f از نقطه $(-3, 4)$ می‌گذرد، پس:

$$f(-3) = 4 \Rightarrow \frac{9 - 3a + b}{-2} = 4 \Rightarrow 9 - 3a + b = -8 \Rightarrow 3a - b = 17$$

از طرفی $x = -3$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است، پس $f'(-3) = 0$ است:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + a - b}{(x + 1)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(-3)=0} 9 - 6 + a - b = 0 \Rightarrow a - b = -3$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} 3a - b = 17 \\ a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow b = 13 \Rightarrow a + b = 23$$

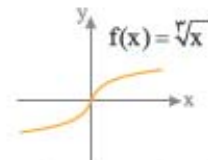
با محاسبه $f(2)$ و $f(-2)$ عرض این نقاط را به دست می‌آوریم:

$$f(2) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad f(-2) = \frac{-2}{2} + \frac{1}{-2} = -1$$

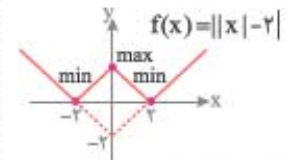
بنابراین نقاط $A(2, 1)$ و $B(-2, -1)$ اکسترمم‌های تابع f هستند و فاصله آن‌ها برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

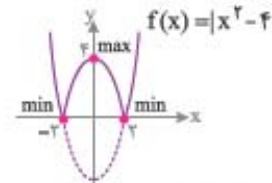
۲ برای تعیین اکسترمم‌های نسبی توابع ناپیوسته یا مشتق‌ناپذیر، بهترین راه استفاده از رسم شکل است. مثلاً در توابع زیر داریم:



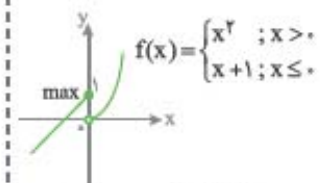
تابع f اکسترمم نسبی ندارد.



تابع f دارای ۳ اکسترمم نسبی است.



تابع f دارای ۳ اکسترمم نسبی است.



تابع f دارای یک $\max$ نسبی است.

تست در تابع $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ نقاط به طول $x = 1$ و $x = -2$ به

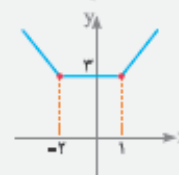
ترتیب کدام‌اند؟

۱ ماکزیمم نسبی - مینیمم نسبی ۲ ماکزیمم نسبی - ماکزیمم نسبی

۳ مینیمم نسبی - ماکزیمم نسبی ۴ مینیمم نسبی - مینیمم نسبی

۴ ابتدا با بازه‌بندی تابع $f(x)$ ، ضابطه آن را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 1 \\ 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ -2x - 1 & x < -2 \end{cases}$$



اکنون نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، نقاط به طول

$x = 1$ و $x = -2$ مینیمم نسبی تابع

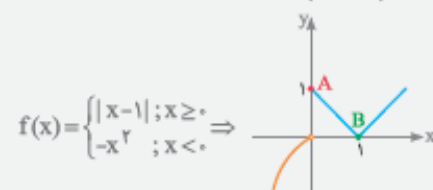
f هستند.

تست در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x - 1| & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ فاصله دو نقطه

ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی کدام است؟

۲ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۱ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۲ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

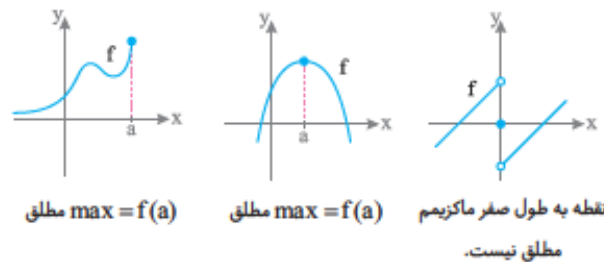


با توجه به نمودار نقطه $A(0, 1)$ ماکزیمم نسبی و نقطه $B(1, 0)$ مینیمم نسبی تابع f است و فاصله آن‌ها برابر $\sqrt{2}$ است.

اکسترمم مطلق

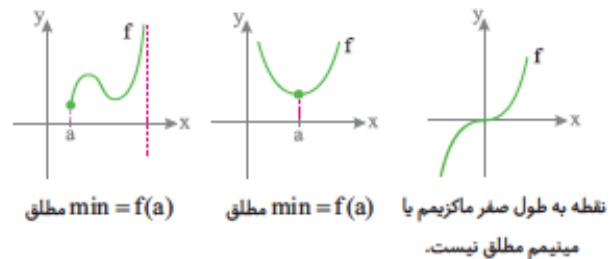
۱ ماکزیمم مطلق:

اگر در تابع f عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط تمام دامنه، بالاتر (یا مساوی) باشد آن‌گاه تابع در این نقطه ماکزیمم مطلق دارد. به بیان ریاضی، نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f است، هرگاه به ازای هر x از دامنه f ، داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f نامیده می‌شود.

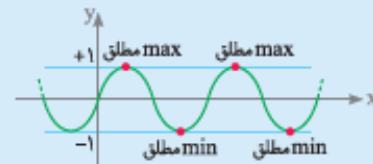


۲ مینیمم مطلق:

اگر در تابع f عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط تمام دامنه، پایین‌تر (یا مساوی) باشد آن‌گاه تابع در این نقطه مینیمم مطلق دارد. به بیان ریاضی، نقطه‌ای به طول c از دامنه تابع f ، یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f است، هرگاه به ازای هر x از دامنه f ، داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت، مقدار مینیمم مطلق f روی D_f نامیده می‌شود.



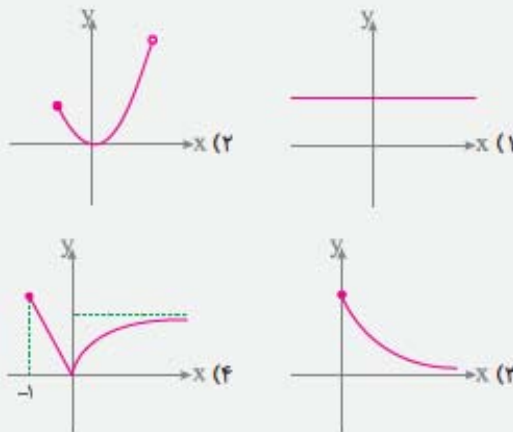
تذکر مقدار اکسترمم مطلق منحصر به فرد است، اما می‌تواند در طول‌های مختلف رخ دهد، مثلاً به نمودار $y = \sin x$ توجه کنید.



ماکزیمم مطلق این تابع برابر ۱ است، همان‌طور که از نمودار مشخص است. بی‌شمار نقطه، عرضی برابر ماکزیمم مطلق دارد.

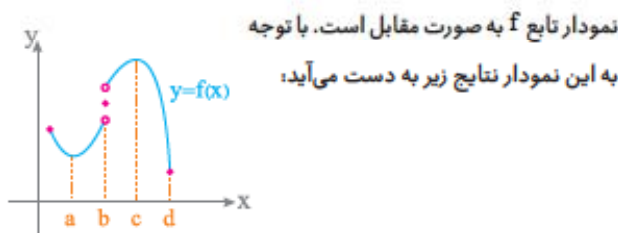
توجه کنید با توجه به تعریف ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق، نقاطی که روی تابع ثابت $f(x) = c$ قرار دارند، هم ماکزیمم مطلق محسوب می‌شوند و هم مینیمم مطلق.

تست کدام نمودار زیر مینیمم مطلق دارد اما ماکزیمم مطلق ندارد؟



۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- ۱) تمام نقاط روی نمودار، هم مینیمم مطلق هستند و هم ماکزیمم مطلق.
- ۲) تابع در $x=0$ مینیمم مطلق دارد، اما فاقد ماکزیمم مطلق است.
- ۳) تابع در $x=0$ ماکزیمم مطلق دارد، اما فاقد مینیمم مطلق است.
- ۴) تابع در $x=-1$ ماکزیمم مطلق و در $x=0$ مینیمم مطلق دارد.

 نتایج مهم نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم تابع f


نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به این نمودار نتایج زیر به دست می‌آید:

- ۱) ممکن است نقطه‌ای اکسترمم نسبی باشد، اما اکسترمم مطلق نباشد. مثلاً نقطه به طول a مینیمم نسبی است، اما مینیمم مطلق نیست.
- ۲) ممکن است نقطه‌ای اکسترمم مطلق باشد اما اکسترمم نسبی نباشد. مثلاً نقطه به طول d مینیمم مطلق است، اما مینیمم نسبی نیست.
- ۳) ممکن است نقطه‌ای هم اکسترمم مطلق باشد و هم اکسترمم نسبی باشد. مثلاً نقطه به طول c ماکسیمم مطلق است و هم ماکسیمم نسبی.
- ۴) هر نقطه اکسترمم، یک نقطه بحرانی است، اما هر نقطه بحرانی، لزوماً اکسترمم نیست. مثلاً نقطه به طول b یک نقطه بحرانی است، اما اکسترمم نیست.

تست چه تعداد از نقاط نام‌گذاری شده روی نمودار زیر، نقطه بحرانی هستند اما اکسترمم نیستند؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم:

$$f(-2) = \frac{6(-2)}{(-2)^2 + 1} = \frac{-12}{5}$$

$$f(-1) = \frac{6(-1)}{(-1)^2 + 1} = -3$$

$$f(1) = \frac{6(1)}{(1)^2 + 1} = 3$$

$$f(2) = \frac{6(2)}{(2)^2 + 1} = \frac{12}{5}$$

$$A(-2, -\frac{12}{5}), B(-1, -3), C(1, 3), D(2, \frac{12}{5})$$

پس بیش‌ترین مقدار تابع در بازه $[-2, 2]$ برابر ۳ است.

تست مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = 1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (2) \quad \frac{1}{8} \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad \frac{2}{25}$$

۴ ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

حال از تابع f مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم تا طول نقاط بحرانی به دست آید:

$$f'(x) = 2x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 2x(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

پس نقاط $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, x = \pm 1, x = 0$ نقاط بحرانی تابع هستند و مقدار

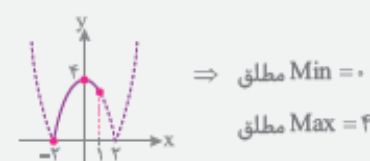
آن‌ها برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) = f(0) = f(1) = 2 \\ f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}} \\ = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2.25 \end{cases}$$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر 2.25 است.

در نواح قدر مطلق و چندضابطه‌ای بهتر است برای یافتن اکسترم‌های مطلق از رسم نمودار استفاده کنیم.

مثال ۱ مقدار اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در بازهٔ $[-2, 1]$ به دست آورید.



۲ به بررسی تک‌تک نقاط می‌پردازیم:

نقطه x_1 ابتدای بازه و مینیمم مطلق است؛ بنابراین x_1 یک نقطه بحرانی است.

نقطهٔ x_2 به علت ناپیوستگی و عدم وجود مشتق، یک نقطهٔ بحرانی محسوب می‌شود ولی این نقطه اکسترم نیست.

نقطهٔ x_3 یک نقطهٔ بحرانی و مینیمم نسبی است.

نقطهٔ x_4 یک نقطهٔ بحرانی و ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق است. نقطهٔ x_5 چون در دامنه تابع حضور ندارد بنابراین نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود.

نقطهٔ x_6 انتهای بازه و بحرانی است ولی این نقطه اکسترم نیست. بنابراین دو نقطه x_2 و x_3 بحرانی هستند اما اکسترم نیستند.

تعیین اکسترم‌های مطلق از روی ضابطهٔ تابع

اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد. برای یافتن اکسترم‌های مطلق تابع f به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم. سپس طول نقاط بحرانی تابع f را در بازهٔ $[a, b]$ به دست می‌آوریم.

۲ عرض نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم.

۳ از بین عرض‌های به دست آمده، بزرگ‌ترین عدد ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین عدد مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a, b]$ است.

مثال اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ را در بازهٔ $[-2, 2]$ به دست آورید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

چون فقط $x = -1$ در بازهٔ $[-2, 2]$ قرار دارد، پس طول نقاط بحرانی عبارتند از:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 - 9 \times 2 + 5 = -17$$

بیشترین مقدار ۱۰ و کمترین مقدار -۱۷ است. پس در بازهٔ $[-2, 2]$ ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۱۰ و مینیمم مطلق آن برابر -۱۷ است.

تست بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$ در بازهٔ $[-2, 2]$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۳ مشتق $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6(x^2 + 1) - (2x)(6x)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نکته در بعضی سؤالات که بُرد یک تابع را می‌خواهند، می‌توانیم مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را تعیین کنیم. (توجه کنید لازمۀ تابع پیوسته باشد.)

تست بُرد تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) $[-7, 4]$ (۲) $[-4, 13]$
(۳) $[-7, 13]$ (۴) $[-4, 7]$

۳ برای به دست آوردن بُرد تابع f در بازه $[-1, 2]$ باید مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را در این بازه محاسبه کنیم. پس ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

چون فقط $x = 1$ در بازه $[-1, 2]$ قرار دارد، پس $x = -1, x = 1, x = 2$ طول نقاط بحرانی هستند، مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

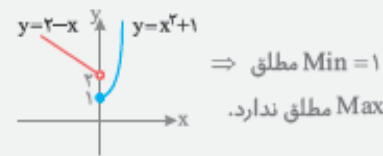
$$f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) = -2 + 3 + 12 = 13$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7$$

$$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) = 16 + 12 - 24 = 4$$

از بین مقادیر به دست آمده، ماکزیمم مطلق برابر ۱۳ و مینیمم مطلق برابر -۷ است، پس بُرد تابع در این بازه برابر $R_f = [-7, 13]$ است.

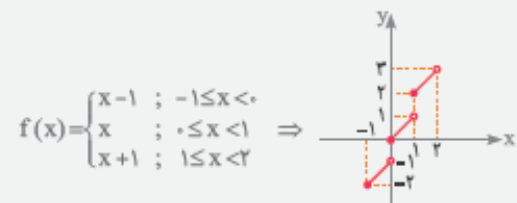
مثال ۲ مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \geq 0 \\ 2 - x; & x < 0 \end{cases}$ را بیابید.



تست مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + [x]$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲ ابتدا با ساده کردن ضابطه تابع $f(x)$ ، نمودار آن را در بازه $[-1, 2]$ رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر -۲ است.

درس بهینه‌سازی

تست اگر $x + y = 1$ باشد، آن‌گاه ماکزیمم xy^2 کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{4}{27}$
(۳) $\frac{5}{26}$ (۴) $\frac{3}{26}$

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$xy^2 = x(1-x)^2 = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

برای آن‌که $f(x)$ ماکزیمم شود، باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{3}$$

x	$\frac{1}{3}$	1
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

max

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow xy^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

تذکر برای حل مسائل مربوط به بهینه‌سازی، لازم است مساحت و حجم شکل‌های معروف هندسی را یادآوری کنیم.

مسائل بهینه‌سازی

تلاش برای محاسبهٔ ماکزیمم یا مینیمم یک کمیت را اصطلاحاً بهینه‌سازی می‌گویند. روند حل سؤالات بهینه‌سازی به این صورت است:

۱ برای کمیتی که قصد داریم ماکزیمم یا مینیمم شود، یک تابع برحسب متغیرهای مسئله می‌نویسیم.

۲ با استفاده از فرضیات سؤال، معادله‌ای را که نوشته‌ایم تبدیل به تابع تک متغیره می‌کنیم.

۳ ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را می‌یابیم.

مثال فرض کنید تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۶ باشد. کمترین مقدار حاصل ضرب آن‌ها را به دست آورید.

(۱) دو عدد را x و y در نظر می‌گیریم. مینیمم xy را می‌خواهیم.

(۲) چون $x - y = 6$ ، پس xy را به صورت $x(x - 6)$ می‌نویسیم.

(۳) مینیمم مطلق تابع $f(x) = x(x - 6)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x(x - 6) = x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow f(3) = 3 \times (3 - 6) = 3 \times (-3) = -9$$

پس کم‌ترین مقدار حاصل ضرب آن‌ها -۹ است.

تست از میان مثلث‌هایی که در آن‌ها مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی که بیش‌ترین مساحت را دارد اختیار کرده‌ایم. مساحت این مثلث چقدر است؟

۳۸ (۴) ۳۲ (۳) ۲۵ (۲) ۱۸ (۱)

۳ طول قاعده را برابر با a و ارتفاع وارد بر آن را h می‌نامیم:

$a + h = 16 \Rightarrow h = 16 - a$

$S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = 8a - \frac{1}{2}a^2$

برای آن‌که $S(a)$ ماکزیمم شود، مشتق آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$S'(a) = 8 - a = 0 \Rightarrow a = 8$

$S(a) = 8a - \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow S(8) = 8(8) - \frac{1}{2}(8)^2 = 64 - 32 = 32 \text{ cm}^2$

بهبوده‌سازی در حجم

برای یافتن حجم بهینه، باید برای حجم مورد نظر معادله‌ای بنویسیم، سپس آن را تک متغیره کرده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق آن را بیابیم.

مثال در بین استوانه‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر

یک است، بیش‌ترین حجم با چه شعاعی ایجاد می‌شود؟

$V = \pi r^2 h \xrightarrow{r+h=1} \pi r^2(1-r) = \pi(r^2 - r^3)$

حال باید ماکزیمم مطلق تابع V را بیابیم:

$V' = 0 \Rightarrow \pi(2r - 3r^2) = 0 \Rightarrow \pi r(2 - 3r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$

به ازای $r = 0$ اصلاً استوانه‌ای تشکیل نمی‌شود، پس بیش‌ترین حجم استوانه به ازای $r = \frac{2}{3}$ خواهد بود.

تست ورقه فلزی مربع شکل به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید.

می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش دهیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد چین‌ها، یک جعبه در باز بسازیم، مقدار x چقدر باشد، تا حجم جعبه بیش‌ترین مقدار ممکن گردد؟

۲ با توجه به شکل، حجم جعبه برابر است با:

$x = 9$ (۴) $x = 7$ (۳) $x = 5$ (۲) $x = 3$ (۱)

$V(x) = x(30-2x)^2$

برای ماکزیمم کردن تابع ابتدا آن را ساده و سپس مشتق $V(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$V(x) = x(30-2x)^2 = x(900 + 4x^2 - 120x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 20x + 75}_{(x-5)(x-15)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases}$

مساحت شکل‌های معروف

$S = \frac{1}{2}ah$	$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc$	$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
$S = a^2$	$S = a \cdot b$	$S = \pi r^2$

حجم شکل‌های معروف

$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}a^2 h$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = a^3$	$V = abc$

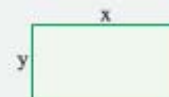
بهبوده‌سازی در مساحت

بعضی از سؤالات بهینه‌سازی در مورد بهینه کردن مساحت است. یعنی با استفاده از داده‌های مسئله، بتوان مساحت شکل را ماکزیمم کرد.

مثال محیط مستطیلی برابر با ۱۲ است. بیش‌ترین اندازه ممکن برای مساحت آن را بیابید.

محیط مستطیل $= 12 \Rightarrow 2x + 2y = 12 \Rightarrow x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x$

مساحت مستطیل $= S = xy \xrightarrow{y=6-x} S(x) = x(6-x) = -x^2 + 6x$



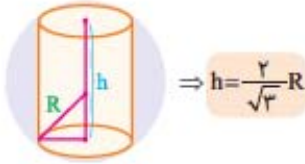
حال باید ماکزیمم مطلق تابع $S(x)$ را بیابیم:

$S'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow \max(S) = S(3) = -3^2 + (6 \times 3) = -9 + 18 = 9$

نکته در بین مستطیل‌هایی با محیط ثابت، مربع دارای بیش‌ترین مساحت است.

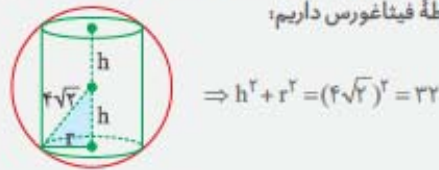
۲ ارتفاع بزرگترین استوانه‌ای که می‌تواند درون کره‌ای به شعاع R محاط شود، برابر $\frac{2}{\sqrt{3}}R$ است.



تست حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟ (داخل-۱۴۰۰)

(۱) 32π (۲) 64π (۳) $\frac{256\pi}{3}$ (۴) $\frac{512\pi}{3}$

۲ ارتفاع استوانه را $2h$ و شعاع قاعده استوانه را r فرض می‌کنیم. بنابراین طبق رابطه فیثاغورس داریم:



از طرفی می‌دانیم مساحت جانبی استوانه از رابطه $S = 2\pi r(2h)$ به دست می‌آید، پس با جایگذاری $h = \sqrt{32 - r^2}$ در رابطه مساحت داریم:

$$S = 4\pi r\sqrt{32 - r^2} = 4\pi\sqrt{32r^2 - r^4} \Rightarrow S' = 4\pi \times \frac{64r - 4r^3}{2\sqrt{32r^2 - r^4}} = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi(16 - r^2) = 0 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \xrightarrow{h^2 + r^2 = 32} h = 4$$

$$S = 4\pi \times 4 \times 4 = 64\pi$$

مثال اگر درون کره‌ای به شعاع ۳ سانتی متر بزرگترین مخروط محاط را محاط کنیم، ارتفاع مخروط چقدر خواهد بود؟



حجم مخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ است. به جای h با توجه به شکل فوق $3+x$ قرار می‌دهیم و به جای r^2 از رابطه $9 - x^2$ را قرار می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$V = \frac{\pi}{3}(9 - x^2)(3 + x) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(-2x(3 + x) + (9 - x^2)) = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 - 6x + 9 = 0 \xrightarrow{(-2)} x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

به ازای $x = 1$ ارتفاع بزرگترین مخروط برابر با $h = 3 + x = 4$ یعنی $h = 4$ خواهد بود.

روش دوم: طبق نکته گفته شده ارتفاع بزرگترین مخروط که در کره‌ای به شعاع R محاط شود برابر $\frac{4}{3}R$ است، بنابراین:

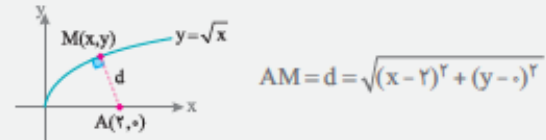
$$h = \frac{4}{3}(3) = 4$$

بهینه‌سازی در فاصله

در برخی از سؤالات بهینه‌سازی، به دنبال بهینه کردن فاصله‌ها هستیم. برای محاسبه فاصله مورد نظر، معادله‌ای را با توجه به داده‌های مسئله تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از فرضیات مسئله آن را یک متغیره کرده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را می‌یابیم.

مثال نقطه $A(2, 0)$ با چه نقطه‌ای از نمودار $y = \sqrt{x}$ کم‌ترین فاصله را دارد؟

فاصله AM را به دست آورده و مشتق آن را صفر قرار می‌دهیم:



$$= \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x}$$

$$\Rightarrow d' = \frac{2(x-2) + 1}{2\sqrt{(x-2)^2 + x}} = 0 \Rightarrow 2(x-2) + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

تست کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟ (خارج-۹۹)

(۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) $3\sqrt{2}$

۱ نقطه $B(x, \sqrt{2x+7})$ روی نمودار قرار دارد و فاصله آن از نقطه $A(5, 0)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

پس کوتاه‌ترین فاصله A و B به ازای $x = 4$ به دست می‌آید و مقدار آن برابر است با:

$$AB = \sqrt{4^2 - 8 \times 4 + 32} = \sqrt{16} = 4$$

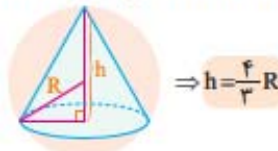
بهینه‌سازی در شکل‌های محاطی

در بعضی از سؤالات بهینه‌سازی، می‌خواهیم بزرگترین شکل ممکن را درون شکلی دیگر محاط کنیم. برای حل این سؤال‌ها باید به کمک رابطه فیثاغورس، بین اجزای این دو شکل رابطه‌ای بنویسیم و از آن در فرمول حجم شکل محاطی استفاده کنیم.

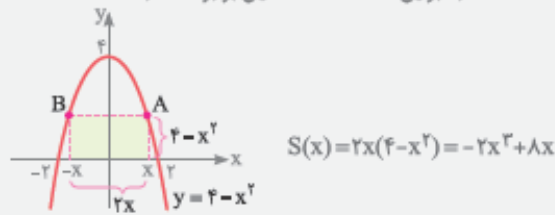
برای حل سریع‌تر برخی از تست‌های مربوط به بهینه‌سازی در شکل‌های محاطی به نکات زیر توجه کنید:

دو نکته خاص در شکل‌های محاطی:

۱ ارتفاع بزرگترین مخروطی که می‌تواند درون کره‌ای به شعاع R محاط شود، برابر $\frac{4}{3}R$ است.



۴ با توجه به شکل، نقاط $A(x, 4-x^2)$ و $B(-x, 4-x^2)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$ و ضلع دیگر آن $4-x^2$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



برای این که ببینیم x باید چقدر باشد تا مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن شود، باید از تابع $S(x)$ مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$S'(x) = -6x^2 + 8 \xrightarrow{S'(x)=0} -6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

چند نکته برای حل سریع‌تر مسائل بهینه‌سازی

۱ اگر مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که دو عدد با هم برابر باشند.

مثلاً اگر $x + 2y = 6$ باشد، برای این که xy ماکزیمم شود، باید $x = 2y$ باشد، پس:

$$x + 2y = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس ماکزیمم مقدار xy برابر است با:

$$3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

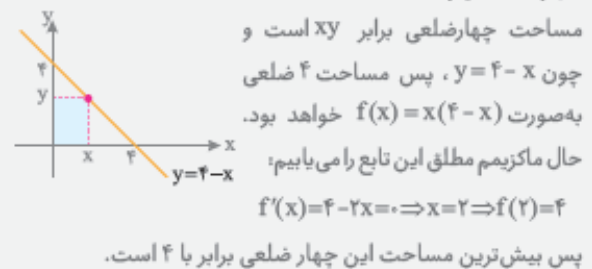
۲ اگر حاصل ضرب دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها هنگامی مینیمم است که دو عدد برابر باشند.

بهینه‌سازی در نمودارها

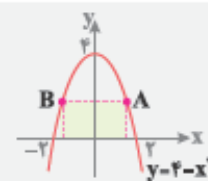
گاهی اوقات درون نمودار یک تابع، یک شکل هندسی محاط می‌کنیم و قصد داریم محیط یا مساحت آن شکل را بهینه کنیم. برای این کار فرمول محیط یا مساحت شکل محاطی را می‌نویسیم، سپس به کمک ضابطه نمودار داده شده، فرمول را یک متغیره می‌کنیم.

مثال نقطه‌ای روی خط $y = 4 - x$ انتخاب کرده و از آن دو خط بر محورهای

مختصات عمود می‌کنیم تا یک چهارضلعی ایجاد شود. بیشترین مساحت این چهارضلعی چقدر است؟



تست در شکل زیر، مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار $y = 4 - x^2$ و دو رأس دیگرش روی محور x ‌ها قرار دارد، مشاهده می‌شود. طول نقطه A کدام باشد تا مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن شود؟



$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

یادداشت:

مجموعه، الگو و دنباله

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: بخش الگو و دنباله با فصل‌های دیگر ارتباط چندانی ندارد اما بخش روابط بین مجموعه‌ها در فصل شمارش بدون شمردن و احتمال، کاربرد دارد.

توصیه: توی بخش دنباله حسابی و هندسی فقط روابط اصلی رو بدونید و فرمول اضافی حفظ نکنید.

در بخش الگویی هم دو تا کار بکنید:

۱- الگوهای مشهور مثل الگوی خطی، الگوی درجه دوم، الگوی فیبوناچی و ... رو با نکاتش یاد بگیرید، اما ذهنتون رو به این الگوها محدود نکنید و سعی کنید تحلیل‌تون رو قوی کنید.

۲- تست‌های متنوع رو تحلیل و موشکافی کنید. حتی اگه تست‌هارو درست حل کردید، پاسخنامه رو هم بخونید. با این کار ممکنه راه بهتری یاد بگیرید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۱	صفر	۱	۳	۲	۲	۲	۲

درس مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

معرفی مجموعه‌های مهم

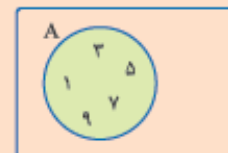
مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و مشخص در نظر می‌گیرند. مثلاً، دانش‌آموزان پایه یازدهم تهران یک مجموعه محسوب می‌شود، اما دانش‌آموزان قد بلند تهران مجموعه نیست، چون بلندی قد معیار مشخصی ندارد.

انواع نمایش مجموعه‌ها

۱. نمایش با اعضاء: اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آگولاد نمایش می‌دهیم. مثلاً:
 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

۲. نمایش با نماد ریاضی: به جای نوشتن اعضاء، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم. مثلاً:
 $A = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$

۳. نمایش هندسی: اعضای مجموعه را درون یک شکل در صفحه مانند مستطیل، دایره و ... قرار می‌دهیم که به آن نمودار ون گفته می‌شود. مثلاً:



تذکره ۱ ترتیب اعضا در مجموعه اهمیتی ندارد؛ یعنی جابه‌جایی اعضا، مجموعه را تغییر نمی‌دهد.
 $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 1, 3\}$

تذکره ۲ عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند.
 $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$

مجموعه‌های مهم اعداد

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$	اعداد طبیعی
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	اعداد حسابی
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	اعداد صحیح
$Q = \{\frac{m}{n} m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$	اعداد گویا
$Q' = \{x x \notin Q\}$	اعداد گنگ
$\mathbb{R} = Q \cup Q'$	اعداد حقیقی



مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند و شامل همه اعداد گویا و گنگ است، بنابراین روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{R} = Q \cup Q' \quad \mathbb{R} - Q = Q' \quad \mathbb{R} - Q' = Q$$

تست چه تعداد از رابطه‌های زیر در مجموعه اعداد حقیقی درست است؟

(الف) $Q \subseteq (\mathbb{R} - Z)$	(ب) $(N \cup Q) \subseteq Q'$
(پ) $(Q \cap Q') \subseteq \mathbb{W}$	(ت) $(Z \cup N) \subseteq (Q \cup Q')$
۱ (۱)	۲ (۲)
۳ (۳)	۴ (۴)

گاهی اوقات ابتدا و انتهای بازه به صورت یک رابطه ریاضی داده می‌شود. مثلاً $A_n(-n, 2n)$ بازه‌هایی به صورت $A_1(-1, 2)$ ، $A_2(-2, 4)$ ، $A_3(-3, 6)$ و... را نشان می‌دهد.

در سؤالات ممکن است تفاضل، اجتماع، اشتراک و ... از این بازه‌ها خواسته شود. می‌توانیم بازه‌ها را روی محور رسم کنیم و موارد خواسته شده را بدست آوریم.

تست اگر $A_n = ((-1)^n - n, 2n - 1)$ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و

کوچک‌ترین عضو صحیح مجموعه $(A_2 \cup A_3) - (A_1 \cap A_2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cc} 5 (1) & 7 (2) \\ 6 (3) & 9 (4) \end{array}$$

۲ ابتدا بازه‌های A_1 تا A_4 را تعیین می‌کنیم و سپس $A_2 \cup A_3$ و $A_1 \cap A_2$ را به دست می‌آوریم:

$$A_1 = (-1-1, 2-1) = (-2, 1), A_2 = (1-2, 4-1) = (-1, 3)$$

$$A_3 = (-1-3, 6-1) = (-4, 5), A_4 = (1-4, 8-1) = (-3, 7)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 \cup A_3 = (-1, 5) \\ A_1 \cap A_2 = (-1, 1) \end{cases} \Rightarrow \text{Diagram showing the resulting intervals on a number line.}$$

بنابراین $(A_2 \cup A_3) - (A_1 \cap A_2) = (-4, -2] \cup [1, 5)$ است.

بزرگ‌ترین عضو صحیح برابر ۴ و کوچک‌ترین عضو صحیح -۳ است و اختلاف آن‌ها برابر ۷ است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به دست آید، مجموعه متناهی نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعه متناهی، عددی حسابی است.

مثلاً، مجموعه اعداد طبیعی زوج یک‌رقمی به صورت $\{2, 4, 6, 8\}$ است که یک مجموعه متناهی است.

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، مجموعه نامتناهی نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعه نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

مثلاً، مجموعه مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{5, 10, 15, \dots\}$ است که یک مجموعه نامتناهی است.

تذکر مجموعه‌های اعداد حقیقی، گویا، گنگ، صحیح، طبیعی و حسابی

همگی مجموعه‌های نامتناهی هستند.

۲ به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ همه اعداد غیر صحیح است که $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه آن نیست.

ب) اجتماع $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ برابر $\mathbb{Q}$ است و می‌دانیم $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه $\mathbb{Q}'$ نیست.

پ) اشتراک $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ مجموعه تهی است و زیرمجموعه $\mathbb{W}$ خواهد بود.

ت) اجتماع $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ برابر $\mathbb{Z}$ و اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ برابر مجموعه اعداد حقیقی است. پس نتیجه می‌گیریم $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ است.

دو نکته را در رابطه با اعداد گنگ و گویا ببینیم:

۱ اگر x و y دو عدد گویا باشند، آنگاه $x+y$ ، xy ، $\frac{x}{y}$ و... هم گویا هستند، اما x^x یا y^x ممکن است گویا یا گنگ باشند.

به عنوان مثال اگر $x=5$ و $y=\frac{1}{5}$ ، در این صورت $x^y = (5)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5}$ که عددی گنگ است، اما $y^x = (\frac{1}{5})^5 = \frac{1}{3125}$ که عددی گویا است.

۲ اگر x و y دو عدد گنگ باشند در رابطه با گنگ یا گویا بودن $x+y$ ، x^x ، x^y ، $\frac{y}{x}$ ، $\frac{x}{y}$ اظهار نظر کرد، ممکن است حاصل آن‌ها گنگ یا گویا باشد.

انواع بازه

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند که برای نمایش همه اعداد حقیقی بین دو عدد، یا اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک عدد، از آن‌ها استفاده می‌کنیم. انواع بازه‌ها عبارت‌اند از:

نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی	نوع بازه	بازه
$\{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$		باز	(a, b)
$\{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$		نیم باز	$(a, b]$
$\{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$		نیم باز	$[a, b)$
$\{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$		بسته	$[a, b]$
$\{x \in \mathbb{R} x > a\}$		باز	$(a, +\infty)$
$\{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$		نیم باز	$(-\infty, b]$
$x \in \mathbb{R}$		باز	$(-\infty, +\infty)$

تست اگر $A = (-4, 2]$ و $B = [-1, 3]$ باشد، حاصل $(A \cup B) \cap \mathbb{N}$

کدام است؟

$$\{1, 2\} (1) \quad \{2, 3\} (2) \quad \{0, 1, 2\} (3) \quad \{1, 2, 3\} (4)$$

۴ با کمک نمایش هندسی بازه‌های A و B ، مجموعه $A \cup B$ را تعیین می‌کنیم:



اشتراک $(-4, 3]$ و مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) به صورت $\{1, 2, 3\}$ است.

مجموعه‌های تهی، مرجع و متمم

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نامیده می‌شود و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

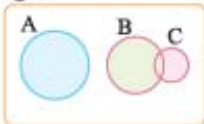
$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

تذکر: مجموعه $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تک‌عضوی است و با مجموعه $\emptyset$ متفاوت است.
 $\{\emptyset\} = \{\{\}\}$

پس اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، واضح است:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$$

مجموعه مرجع: هر مجموعه معمولاً به صورت $\{x : x \in U, x \text{ شرطی درباره } x\}$ معرفی می‌شود. به مجموعه U که x ها از درون آن انتخاب می‌شوند، مجموعه مرجع گفته می‌شود. پس مجموعه مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن هستند. در نمودار ون، معمولاً مستطیل بزرگی که کل فضا را نشان می‌دهد، مجموعه مرجع است. U (مرجع)

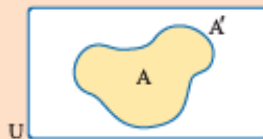


پس اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، واضح است: $A \cap U = A, A \cup U = U$
متمم مجموعه: فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با اعضای U است که متعلق به مجموعه A نباشد. متمم A را با A' نشان می‌دهند.

$$A' = \{x \in U : x \notin A\}$$

$$A \cup A' = U$$

$$U' = \emptyset$$



$$A \cap A' = \emptyset$$

$$\emptyset' = U$$

$$(A')' = A$$

تست اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ و } B = \{4, 5, 6, 7\} \text{ متمم مجموعه } B' - A$$

چند عضو دارد؟

$$2 \text{ (1)} \quad 5 \text{ (2)} \quad 7 \text{ (3)} \quad 8 \text{ (4)}$$

۳ مجموعه مرجع به صورت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است، پس:

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow B' - A = \{1, 2, 3, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{8, 9\}$$

پس متمم مجموعه $B' - A$ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ است که ۷ عضو دارد.

وقتی $A \subseteq B$ است:

۱ از نامتناهی بودن A نتیجه می‌گیریم B هم نامتناهی است.

۲ از متناهی بودن B نتیجه می‌گیریم A هم متناهی است.

تست اگر $A \subseteq \{3, 6\}, B \subseteq \{-3, -2, -1, \dots, 99, 100\}$ ، آنگاه در مورد

متناهی بودن A و B کدام درست است؟

- (۱) فقط A متناهی
 (۲) فقط B متناهی
 (۳) هر دو متناهی
 (۴) هر دو نامتناهی

۲ چون بازه $[3, 6]$ بازه‌ای نامتناهی است و زیر مجموعه A می‌باشد، پس قطعاً A نیز این بازه را در خود دارد و نامتناهی است. چون $\{-3, -2, -1, \dots, 99, 100\}$ متناهی است و B زیر مجموعه آن است، پس B باید قطعاً متناهی باشد تا بتواند زیر مجموعه یک مجموعه متناهی باشد.

به کمک جدول بعدی متوجه می‌شویم که ترکیب مجموعه‌های متناهی و نامتناهی چه ویژگی دارد:

وضعیت مجموعه	A و B متناهی	A و B نامتناهی	A متناهی و B نامتناهی
$A \cup B$	متناهی	نامتناهی	نامتناهی
$A \cap B$	متناهی	نامشخص	متناهی
$A - B$	متناهی	نامشخص	متناهی
$B - A$	متناهی	نامشخص	نامتناهی

تست کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

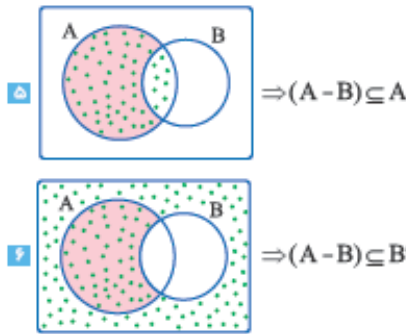
- (۱) اعداد اول کوچکتر از ۱۰
 (۲) اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۵
 (۳) اعداد گویای موجود در بازه $[4, 5]$
 (۴) مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۰۰
۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- (۱) این مجموعه به صورت $\{2, 3, 5, 7\}$ است که متناهی است. ✗
 (۲) این مجموعه به صورت $\{10, 15, \dots, 95\}$ است که متناهی است. ✗
 (۳) بی‌شمار عدد گویا در بازه $[4, 5]$ وجود دارد؛ پس نامتناهی است. ✓
 (۴) این مجموعه به صورت $\{1, 2, 4, 5, \dots, 100\}$ است که متناهی است. ✗

دانستن این دو نکته هم خالی از لطف نیست:

۱ اجتماع یک مجموعه نامتناهی با هر مجموعه دلخواه دیگری، نامتناهی خواهد بود. مثلاً اجتماع مجموعه اعداد طبیعی با هر مجموعه دلخواهی، نامتناهی است.

۲ اشتراک یک مجموعه متناهی با هر مجموعه دلخواه دیگری، متناهی خواهد بود. مثلاً اشتراک مجموعه اعداد طبیعی تک رقمی با هر مجموعه دلخواهی متناهی است.



تذکر اگر بدانیم $A \subseteq B$ است، هرکدام از موارد زیر برقرار است، هم چنین از هر کدام از موارد زیر می توان نتیجه گرفت که $A \subseteq B$ است:

۱ $A \cup B = B$ ۲ $A \cap B = A$ ۳ $B' \subseteq A'$ ۴ $A - B = \emptyset$

تست اگر $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, \{1, 2\}\}, C = \{\{1, 2, \{1, 2\}\}\}$ باشند،

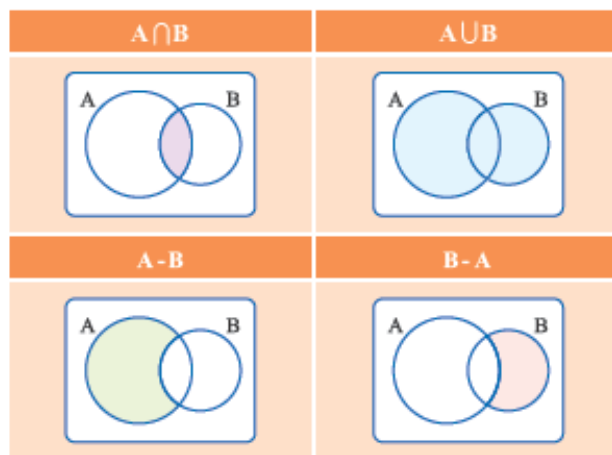
کدام بیان در مورد این مجموعه ها نادرست است؟ (خارج - ۹۷)

۱ $B \subseteq C$ ۲ $A \in B$ ۳ $A \subseteq B$ ۴ $B \subseteq C$

۱ مجموعه B متعلق به مجموعه C است و زیرمجموعه آن نیست.

اعمال اصلی در مجموعه ها

اعمال روی مجموعه ها را می توانید در نمودارهای زیر ببینید:



تذکر با توجه به نمودارهای بالا، تعداد اعضای $A \cup B$ و $A - B$ به صورت زیر به دست می آید:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

تذکر می دانیم اگر اشتراک دو مجموعه A و B تهی باشد، آن دو مجموعه را جدا از هم گویند. از آن جایی که در دو مجموعه جدا از هم $n(A \cap B) = 0$ است، پس:



۱ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

۲ $n(A - B) = n(A)$

تذکر در اکثر سؤالات مربوط به تعداد اعضای مجموعه ها، لازم است ابتدا تعداد اعضای اشتراک مجموعه ها را به دست آوریم.

تست کدام گزینه درست است؟

۱ اگر مجموعه $A \cup B$ نامتناهی و مجموعه B نیز نامتناهی باشد، مجموعه A متناهی است.

۲ اگر مجموعه های A و B نامتناهی باشند، مجموعه $A \cap B$ هم نامتناهی است.

۳ اگر N مجموعه مرجع و A مجموعه ای نامتناهی باشد، مجموعه A' متناهی است.

۴ اگر مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

۴ به بررسی گزینه ها می پردازیم:

۱ در این حالت مجموعه A می تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A \cup B = \{*, 1, 2, \dots\}, B = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \{*, 2, 4, \dots\} \\ A_2 = \{*\} \end{cases}$

۲ در این حالت مجموعه $A \cap B$ می تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1 = \{*, 1, 2, \dots\}, B_1 = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow A_1 \cap B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$

$A_2 = \{*, 1, 2, \dots\}, B_2 = \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow A_2 \cap B_2 = \{\}$

۳ اگر A نامتناهی باشد، A' می تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1 = \{1, 3, 5, \dots\} \Rightarrow A'_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$

$A_2 = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A'_2 = \{1\}$

۴ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

تعلق و زیرمجموعه

نماد $\in$ به معنی تعلق داشتن و عضو بودن می باشد. وقتی می نویسیم $a \in A$ باید خود a عیناً درون مجموعه باشد.

$A = \{a, \{b\}\} \Rightarrow a \in A, \{b\} \in A, \{a\} \notin A, b \notin A$

نماد $\subseteq$ به معنی زیرمجموعه است. مجموعه A را زیرمجموعه B می نامند، هرگاه هر عضو دلخواه از مجموعه A درون مجموعه B باشد. در این صورت

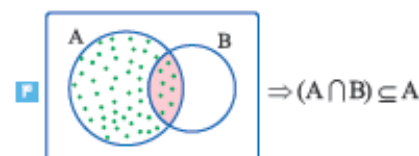
می نویسیم: $A \subseteq B$

وقتی نوشته می شود $\{ \text{شکل ۱}, \text{شکل ۲}, \text{شکل ۳}, \dots \} \subseteq A$ باید با حذف آگولاد، تمام عضوهای درون آن یعنی $\text{شکل ۱}, \text{شکل ۲}, \text{شکل ۳}, \dots$ و ... تک تک درون مجموعه A باشند.

$A = \{a, \{b\}\} \Rightarrow \{a\} \subseteq A, \{b\} \not\subseteq A$

چند قانون مقدماتی در زیرمجموعه

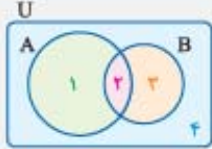
۱ $\emptyset \subseteq A$ ۲ $A \subseteq A$ ۳ $A \subseteq U$



تست اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، ساده شده مجموعه $(A-B) - (B \cap A')$ کدام است؟

$A-B$ (۴) $A \cap B$ (۳) $\emptyset$ (۲) B' (۱)

۴ نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$$(A-B) - (B \cap A') = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) - (\{2, 3\} \cap \{3, 4\}) = \{1\}$$

با توجه به نمودار، ناحیه $\{1\}$ مجموعه $A-B$ را نشان می‌دهد.

تست اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، مجموعه $(A \cup B) \cap [(A-B) \cup B']$ کدام است؟

B (۲) A (۱)
 B' (۴) A' (۳)

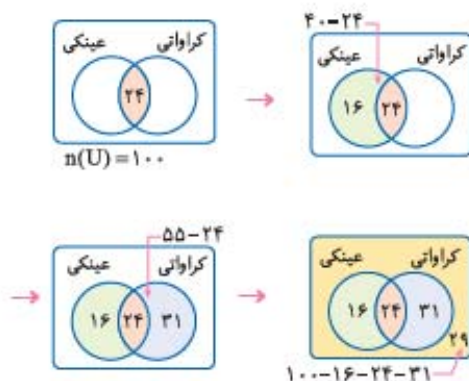
۲ چون دو مجموعه A و B جدا از هم‌اند، پس نمودار ون آن‌ها را مطابق شکل در نظر می‌گیریم:



$$(A \cup B) \cap [(A-B) \cup B'] = \{1, 2\} \cap \{2\} = \{2\} = B$$

به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه‌ها با کمک نمودار ون

در بعضی مسائل، یک مجموعه داده می‌شود که بعضی از اعضای آن دارای ویژگی A_1 و بعضی دیگر دارای ویژگی A_2 هستند و سؤالات مختلفی را در مورد مجموعه مطرح می‌کنند؛ در این موارد بهتر است از نمودار ون استفاده کنیم. به ترتیب پر کردن ناحیه‌ها در نمودار ون در مثال زیر توجه کنید. در یک کنفرانس ریاضی در پاریس ۱۰۰ نفر شرکت کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر عینک زده باشند و ۵۵ نفر کراوات بسته باشند و ۲۴ نفر هم کراوات و هم عینک زده باشند. در این صورت:



تست اگر $n(A-B)=3, n(B)=7, n(A)=4$ مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

13 (۴) 12 (۳) 1 (۲) 10 (۱)

۱ برای به دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B ، به تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 3 = 4 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

بنابراین $n(A \cup B)$ برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 7 - 1 = 10$$

قوانین مجموعه‌ها

اگر A و B دو مجموعه دلخواه A' و B' متمم‌های آن‌ها باشند، آنگاه:

قانون متمم	معادله‌های تفاضل دو مجموعه	دمورگان
$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$	$A-B = A \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$A' \cap B' = A' - B$	$A-B = B' - A'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

تست ساده شده مجموعه $(A'-B)'$ کدام است؟

B' (۴) $A \cap B$ (۳) $B-A$ (۲) $A \cup B$ (۱)

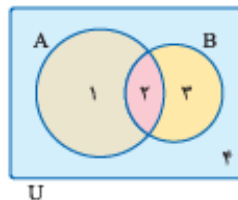
۱ ابتدا تفاضل را به اشتراک تبدیل می‌کنیم و سپس از قانون دمورگان استفاده می‌کنیم:

$$(A'-B)' = (A' \cap B')' = A \cup B$$

ساده کردن عبارات مجموعه‌ای

برای ساده کردن عبارات مجموعه‌ای معمولاً بهترین و سریع‌ترین روش در تست‌ها استفاده از روش عددگذاری در نمودار ون است. یعنی نمودار ون را رسم کرده و در هر ناحیه یک عدد می‌نویسیم. حال عبارت داده شده در مسئله را برحسب آن اعداد پیدا می‌کنیم و با حاصل گزینه‌ها برحسب آن اعداد مقایسه می‌کنیم، هر گزینه یا صورت مسئله اعداد یکسان داشت، جواب است.

۱ اگر دو مجموعه داده شود:

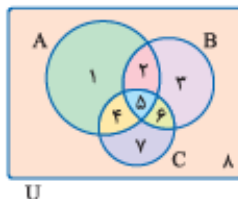


$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$\begin{aligned} A' &= \{3, 4\} & A \cap B &= \{2\} & A \cup B &= \{1, 2, 3\} \\ B' &= \{1, 4\} & A - B &= \{1\} & B - A &= \{3\} \end{aligned}$$

۲ اگر سه مجموعه داده شود:



$$A = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2, 5\} & A \cap C &= \{4, 5\} & B \cap C &= \{5, 6\} \\ A - B &= \{1, 4\} & A - C &= \{1, 2\} & B - C &= \{3\} \end{aligned}$$

تست در یک کلاس ۵۰ نفری، ۳۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۱۰ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۲۵
(۳) ۱۸
(۴) ۲۲

۲ تعداد دانش‌آموزانی که درس ریاضی یا فیزیک را قبول شده‌اند برابر $40 = 50 - 10$ نفر است. پس با توجه به نمودار ون زیر داریم:



$$(35-x) + x + (30-x) = 40 \Rightarrow x = 25$$

بنابراین تعداد افرادی که در هر دو درس قبول شده‌اند برابر ۲۵ نفر است.

با توجه به آخرین مرحله از نمودار ون، می‌توان گفت: تعداد افرادی که عینک زده‌اند ولی کراوات ندارند، برابر با ۱۶ است. تعداد افرادی که کراوات زده‌اند ولی عینک ندارند، برابر با ۳۱ است. تعداد افرادی که نه کراوات زده‌اند و نه عینک زده‌اند، برابر با ۲۹ است. تعداد افرادی که کراوات دارند یا عینک دارند برابر است با: $16 + 24 + 31 = 71$

تست در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (داخل - ۹۸)

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۸

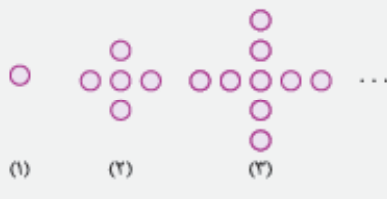
۴ مطابق نمودار ون رویه‌رو تعداد افرادی که عضو هیچ یک از گروه‌های روزنامه دیواری و ورزشی نیستند، برابر است با:



$$\Rightarrow 39 - (9 + 5 + 7) = 18$$

درس الگو و دنباله

تست باتوجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل چندم برابر ۲۹ است؟



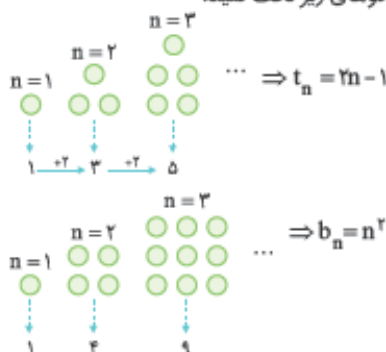
- (۱) هفتم
(۲) هشتم
(۳) نهم
(۴) دهم

۲ در شکل اول ۱ دایره داریم و در هر شکل، ۴ دایره به شکل قبلی اضافه می‌شود؛ بنابراین تعداد دایره‌ها در شکل n ام برابر $1 + 4(n-1)$ است. برای این که مشخص کنیم در شکل چندم تعداد دایره‌ها برابر ۲۹ می‌شود، داریم:

$$1 + 4(n-1) = 29 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

دنباله

به هر تعداد از اعداد که پشت سر هم قرار گیرند، دنباله می‌گوییم. به هر کدام از این اعداد، جمله‌های دنباله گفته می‌شود. دنباله‌ها غالباً دارای الگوی خاصی هستند؛ ولی گاهی اوقات الگوی مشخصی ندارند و یا پیدا کردن الگوی آن‌ها سخت است. اگر بتوانیم الگوی کلی یک دنباله را پیدا کنیم، به آن جمله عمومی دنباله می‌گوییم و با نمادهایی مانند a_n یا t_n یا ... نمایش می‌دهیم. مثلاً به الگوهای زیر دقت کنید:



الگویابی

به یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد که ممکن است تکرار شوند یا رشد کنند یا ترکیبی از این دو باشند الگوی می‌گویند.

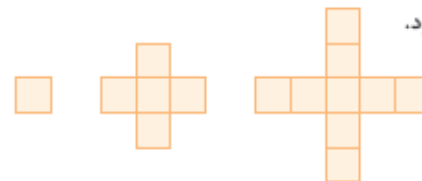
تذکر جمله اول الگو را با a_1 ، جمله دوم را با a_2 ، ... و جمله عمومی الگو را با a_n نمایش می‌دهیم. با کمک جمله عمومی می‌توان هر جمله از الگو را به دست آورد.

الگوی خطی

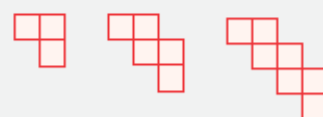
الگوی را که در آن اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت باشد، الگوی خطی می‌نامند، جمله عمومی این الگوها به صورت $t_n = an + b$ است.

[ضرایب a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.]

مثلاً، در شکل‌های زیر، تعداد مربع‌ها از یک الگوی خطی پیروی می‌کنند؛ زیرا در شکل اول یک مربع داریم و در هر یک از شکل‌های بعدی، ۴ مربع به شکل قبلی اضافه می‌شود.



مثال در الگوی زیر، تعداد مربع‌ها در شکل هجدهم را به دست آورید.



در شکل اول، ۳ مربع داریم و در هر شکل، ۲ مربع به شکل قبلی اضافه می‌شود، پس در شکل n ام $3 + 2(n-1)$ مربع داریم، بنابراین تعداد مربع‌ها در شکل هجدهم برابر است با: $3 + 2(18-1) = 37$

۴ با توجه به این که تعداد مربع‌ها از الگوی مثلثی پیروی می‌کند، پس:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 153$$

$$\Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 \xrightarrow{17 \times 18 = 306} n = 17$$

دسته‌بندی اعداد طبیعی

در مسائلی که اعداد طبیعی را به روش‌های مختلف دسته‌بندی می‌کنند و در مورد یکی از دسته‌ها سؤال می‌پرسند، باید موارد زیر را در دستة موردنظر تعیین کنیم:

۱ اولین عدد دسته ۲ آخرین عدد دسته ۳ تعداد جملات دسته

تست اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر

دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی ...، {۷، ۹، ۱۱}، {۳، ۵}، {۱}.

در این صورت جمله آخر واقع در دستة شماره چهل، کدام است؟

۱۵۶۳ (۱)	۱۵۸۹ (۲)	(ریاضی خارج - ۹۹)
۱۶۳۹ (۳)	۱۶۵۱ (۴)	

۳ اعداد طبیعی فرد به طریقی دسته‌بندی شده‌اند که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد، پس جمله آخر در دستة چهارم برابر $1 + 2 + \dots + 40$ آمین عدد فرد است:

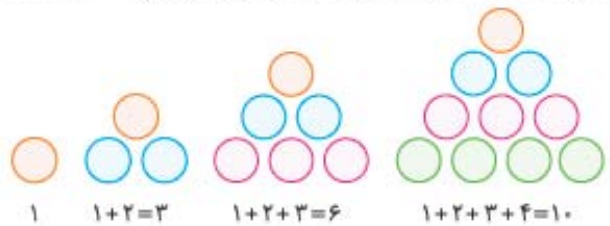
$$1 + 2 + \dots + 40 = \frac{40(40+1)}{2} = 820$$

بنابراین ۸۲۰ آمین عدد فرد را می‌خواهیم که برابر است با:

$$a_n = 2n - 1 \xrightarrow{n=820} 2 \times (820) - 1 = 1639$$

دنباله مثلثی

در شکل‌های زیر، تعداد دایره‌های اضافه‌شده در هر شکل، برابر شماره آن شکل است. تعداد دایره‌های موجود در هر شکل، در زیر آن نوشته شده است:



با توجه به این شکل‌ها، دنباله مربوط به تعداد دایره‌ها به صورت $1, 3, 6, 10, \dots$ بوده که یک دنباله درجه دوم است.

دنباله درجه دوم $1, 3, 6, 10, \dots$ را دنباله مثلثی می‌نامند. جمله عمومی این دنباله برابر است با:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تذکر با توجه به جمله عمومی دنباله مثلثی، مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تست در الگوی زیر تعداد مربع‌ها در کدام شکل برابر ۵۳ است؟



- (۱) چهاردهم
- (۲) دوازدهم
- (۳) پانزدهم
- (۴) هفدهم

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول)، با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست آید، دنباله حسابی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با d نمایش می‌دهیم:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

$$\quad \quad \quad +d \quad +d \quad +d$$

مثلاً دنباله زیر، یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۳ است:

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

$$\quad \quad \quad +3 \quad +3 \quad +3$$

جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots$$

$$\quad \quad \quad +d \quad +d \quad +d$$

پس اختلاف هر دو جمله متوالی برابر d است، یعنی:

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1} = t_{n+1} - t_n = \dots$$

علامت قدرنسبت در دنباله حسابی

۱ اگر $d > 0$ باشد، دنباله صعودی است.

۲ اگر $d = 0$ باشد، دنباله ثابت است.

۳ اگر $d < 0$ باشد، دنباله نزولی است.

$$1, 3, 5, \dots$$

$$\quad \quad \quad +2 \quad +2$$

$$2, 2, 2, \dots$$

$$\quad \quad \quad +0 \quad +0$$

$$11, 7, 3, \dots$$

$$\quad \quad \quad -4 \quad -4$$

تذکر اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله‌ای حسابی باشند، آنگاه قدرنسبت

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

این دنباله برابر است با:

مثال در یک دنباله حسابی جمله هشتم برابر ۲۲ و جمله سیزدهم برابر ۳۷ است. قدرنسبت را به دست آورید.

$$d = \frac{t_{13} - t_8}{13 - 8} = \frac{37 - 22}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

تست در یک دنباله حسابی جملات چهارم و هشتم به ترتیب ۶ و

۱۰ است. مجموع جملات دوم و هفتم چند برابر قدرنسبت است؟

۱۸ (۴)	۱۴ (۳)	۱۵ (۲)	۱۳ (۱)
--------	--------	--------	--------

تست در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۰ می‌باشد. جمله هشتم آن کدام است؟

۲۶ (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)

۲ روابط داده شده را باز می‌کنیم:

$$1) t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3t_1 + 3d = 33 \\ \Rightarrow t_1 + d = 11$$

$$2) t_4 + t_5 + t_6 = (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 60 \\ \Rightarrow 3t_1 + 12d = 60 \\ \Rightarrow t_1 + 4d = 20$$

از روابط (۱) و (۲) مقادیر $t_1 = 8$ و $d = 3$ به دست می‌آیند، بنابراین جمله هشتم برابر است با:

$$t_8 = t_1 + 7d = 8 + (7 \times 3) = 29$$

واسطه حسابی

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، مجموع جملات اول و سوم، دو برابر جمله وسط است:

$$2b = a + c$$

جمله وسط یعنی b را واسطه حسابی a, c می‌نامند.

تست اعداد $1-5p, 3p+4, 2p+3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۴ شرط تشکیل دنباله حسابی را می‌نویسیم و داریم:

$$\text{جمله وسط} = \frac{\text{جمله سوم} + \text{جمله اول}}{2} \Rightarrow 3p + 4 = \frac{(5p - 1) + (2p + 3)}{2} \\ \Rightarrow 6p + 8 = 5p + 2 \Rightarrow p = -6$$

پس جملات این دنباله به صورت $22, 15, 8$ هستند، بنابراین قدرنسبت آن برابر است با:

$$d = 22 - 15 = 7$$

قانون اندیس‌ها

اگر اعداد طبیعی m, n, p, q شماره جملاتی از دنباله حسابی باشند، به طوری که $m + n = p + q$ باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطه زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$

مثلاً، چون $3 + 7 = 4 + 6$ است، پس در هر دنباله حسابی $t_3 + t_7 = t_4 + t_6$ است.

تذکر با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی، مجموع هر دو

جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصله یکسانی دارند، با هم برابر است:

$$t_1 + t_n = t_2 + t_{n-1} = t_3 + t_{n-2} = \dots = t_{n-1} + t_2 + t_1$$

۱ قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$d = \frac{t_8 - t_4}{8 - 4} = \frac{29 - 26}{4} = \frac{3}{4}$$

حال چون جمله چهارم برابر ۶ است، پس:

$$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow t_1 + 3 \times \frac{3}{4} = 6 \Rightarrow t_1 = \frac{15}{4} \\ \Rightarrow \frac{t_7 + t_4}{d} = \frac{t_1 + 6d + t_1 + 3d}{d} = \frac{2t_1 + 9d}{d} = \frac{2 \times \frac{15}{4} + 9 \times \frac{3}{4}}{1} = 13$$

میانبر بدون پیدا کردن t_1 نیز می‌توانستیم جملات دوم و هفتم را به دست آوریم. چون $t_4 = 6$ است، پس:

$$t_7 = t_4 - 3d \Rightarrow t_7 = 6 - 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}, t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow t_1 = 6 - 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

برای حل مسائل دنباله حسابی، به نکات زیر توجه کنید:

۱ وقتی دو جمله از دنباله حسابی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی یعنی $t_n = t_1 + (n - 1)d$ ، دو جمله داده شده را بر حسب t_1 و d بنویسیم و با حل دستگاه حاصل، مقدار t_1 و d را پیدا کنیم. مثلاً، در دنباله حسابی که جمله پنجم آن برابر ۹ و جمله یازدهم آن برابر ۲۷ است، داریم:

$$\begin{cases} t_5 = 9 \\ t_{11} = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 9 \\ t_1 + 10d = 27 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow t_1 = -3$$

۲ اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطه داده شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده کنیم.

مثال ۱ در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و هشتم از جمله هفتم یک واحد بیشتر است. جمله چهارم دنباله را به دست آورید.

$$t_3 + t_8 = t_7 + 1 \Rightarrow (t_1 + 2d) + (t_1 + 7d) = t_1 + 6d + 1 \\ \Rightarrow t_1 + 3d = 1 \Rightarrow t_4 = 1$$

مثال ۲ مجموع سه جمله اول دنباله حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله بعدی است. جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟

با توجه به صورت سؤال $t_1 + t_2 + t_3 = 4(t_4 + t_5 + t_6)$ است، پس:

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 4(t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d) \\ \Rightarrow 3t_1 + 3d = 12t_1 + 48d \Rightarrow 9t_1 = -45d \Rightarrow t_1 = -5d \Rightarrow \frac{t_1}{d} = -5$$

۳ در مواردی که جمله اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی n (تعداد جملات یا شماره جمله) را نداریم، با نوشتن فرمول جمله عمومی و حل معادله یا نامعادله، مقدار n را می‌یابیم.

مثال ۱ کدام جمله از دنباله $12, 19, 26, 33, \dots$ برابر با ۸۹ است؟

$$t_n = 12 + (n - 1)(7) \Rightarrow 12 + 7n - 7 = 89 \Rightarrow 7n = 84 \Rightarrow n = 12$$

مثال ۲ دنباله $7, 13, 19, 25, \dots$ چند جمله دورقمی دارد؟

$$t_n = 7 + (n - 1)(6) \Rightarrow t_n = 6n + 1 \Rightarrow 10 \leq 6n + 1 \leq 99 \\ \Rightarrow 9 \leq 6n \leq 98 \Rightarrow 2 \leq n \leq 16$$

پس تعداد جمله‌ها برابر است با:

$$16 - 2 + 1 = 15$$

۳ سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۱۵ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

پس سه جمله مورد نظر به صورت $5-d, 5, 5+d$ هستند. حال مجموع مربعات این سه جمله را برابر ۹۳ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{aligned} (\underbrace{5-d}_1)^2 + 5^2 + (\underbrace{5+d}_2)^2 &= 93 \\ 25 - 10d + d^2 + 25 + 10d + d^2 &= 93 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 75 + 2d^2 = 93 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

چون نمی‌دانیم دنباله مورد نظر صعودی است یا نزولی، پس هر دو جواب ۳ و -۳ برای قدرنسبت قابل قبول هستند.

جملات مشترک دو دنباله حسابی

جمله‌های مشترک دو دنباله حسابی، خود تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند به‌طوری که:

۱ جمله اول آن برابر اولین جمله مشترک دو دنباله اولیه است.

۲ قدرنسبت آن برابر ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنباله اولیه است.

تست در دو دنباله حسابی $1, 4, 7, \dots$ و $2, 5, 8, \dots$ بعضی از جملات یکسان‌اند. هشتمین جمله مشترک آن‌ها کدام است؟

$$94 \quad (1) \quad 108 \quad (2) \quad 150 \quad (3) \quad 100 \quad (4)$$

۱ قدرنسبت هر یک از دنباله‌ها و جمله اول مشترک را مشخص می‌کنیم

$$\begin{aligned} 1, 4, 7, 10, \dots \Rightarrow d_1 &= 3 \\ -2, 2, 6, 10, \dots \Rightarrow d_2 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} d = [3, 4] = 12 \\ 10 = \text{اولین جمله مشترک} \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله‌های مشترک به صورت زیر است:

$$t_n = 10 + (n-1) \times 12 = 12n - 2$$

در نتیجه جمله هشتم آن برابر است با:

$$t_8 = 12 \times 8 - 2 = 94$$

دنباله هندسی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عددی ثابت و غیرصفر در جمله قبل از خودش به دست آید، دنباله هندسی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با q نمایش می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots \\ \times q & \times q & \times q & & \end{array}$$

مثلاً، دنباله زیر یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ است:

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت q به صورت $t_n = t_1 q^{n-1}$ است.

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 & t_1 q & t_1 q^2 & t_1 q^3 & \dots \\ \times q & \times q & \times q & & \end{array}$$

تست در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n ، رابطه $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 63$ برقرار است. مقدار $t_1 + t_9$ کدام است؟

$$18 \quad (4) \quad 23 \quad (3) \quad 10 \quad (2) \quad 19 \quad (1)$$

۴ با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$\begin{array}{c} 2t_5 \\ \downarrow \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 63 \Rightarrow 7t_5 = 63 \Rightarrow t_5 = 9 \\ \uparrow \\ 2t_5 \end{array}$$

بنابراین چون مجموع اندیس‌های t_1 و t_9 برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_1 + t_9 = 2t_5 = 2 \times 9 = 18$$

درج واسطه حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعدادی عدد دیگر قرار دهیم (درج کنیم) به‌طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند، کافیت اعداد مورد نظر را با جاهای خالی به صورت $\bigcirc$ نمایش داده، سپس a و b را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدرنسبت را بیابیم.

مثال بین دو عدد ۳ و ۱۹ سه واسطه حسابی درج می‌کنیم. بزرگ‌ترین واسطه درج شده را به دست آورید.

$$3, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 19 \Rightarrow t_5 = 19 \Rightarrow t_1 + 4d = 19 \Rightarrow 3 + 4d = 19 \Rightarrow 4d = 16 \Rightarrow d = 4$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹ هستند که بزرگ‌ترین عدد درج شده برابر ۱۵ است.

سه جمله متوالی

در سؤالاتی که صحبت از مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی است اما شماره جمله‌ها مشخص نیست، می‌توانیم جمله‌ها را به صورت $x-d, x, x+d$ در نظر بگیریم. [این روش برای مجموع پنج جمله متوالی، هفت جمله متوالی و ... نیز قابل استفاده است.]

نکته اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d دهند، طول اضلاع برابر $3d, 4d, 5d$ است.



تست در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۹۳ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$$\pm 4 \quad (4) \quad \pm 3 \quad (3) \quad \pm 2 \quad (2) \quad \pm 1 \quad (1)$$

صعودی یا نزولی بودن دنباله هندسی

۱ اگر $q > 1$ باشد، با توجه به علامت جمله اول، دنباله صعودی یا نزولی است.

$$\text{نزولی: } \dots \rightarrow -18, -6, -2, \dots \rightarrow \text{صعودی: } \dots \rightarrow 1, 2, 4, \dots$$

$$\times 3 \times 3 \quad \times 2 \times 2$$

۲ اگر $0 < q < 1$ باشد، با توجه به علامت جمله اول، دنباله صعودی یا نزولی است.

$$\text{صعودی: } \dots \rightarrow -2, -5, -10, \dots \rightarrow \text{نزولی: } \dots \rightarrow 4, 2, 1, \dots$$

$$\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

۳ اگر $q < 0$ باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

$$\text{نوسانی: } \dots \rightarrow -54, -18, -6, -2, \dots$$

$$\times (-3) \times (-3) \times (-3)$$

تذکر اگر تمام جملات یک دنباله یکسان باشند، آن دنباله هم حسابی محسوب می‌شود و هم هندسی.

مثلاً دنباله $2, 2, 2, \dots$ را هم می‌توان یک دنباله حسابی با قدر نسبت $d = 0$ در نظر گرفت و هم دنباله هندسی با قدر نسبت $q = 1$.

تست در دنباله هندسی $t_n = 5 \times 2^n$ جمله ششم چند برابر جمله سوم است؟

$$11(4) \quad 10(3) \quad 9(2) \quad 8(1)$$

۱ با توجه به جمله عمومی دنباله یعنی $t_n = 5 \times 2^n$ داریم:

$$\frac{t_6}{t_3} = \frac{5 \times 2^6}{5 \times 2^3} = 2^3 = 8$$

اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود و یک جمله از دنباله با قدرنسبت دنباله یا ... را بخواهند با استفاده از جمله عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطه داده شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده می‌کنیم.

مثال در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات سوم و هفتم، برابر با نصف جمله ششم است. جمله چهارم را به دست آورید.

$$t_3 \times t_7 = \frac{1}{2} t_6 \xrightarrow{t_n = t_1 q^{n-1}} (t_1 q^2) \times (t_1 q^6) = \frac{1}{2} (t_1 q^5)$$

$$\Rightarrow t_1 q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_4 = \frac{1}{2}$$

تست در یک دنباله هندسی $t_4 = 1$ و $\frac{t_7}{t_3} = 32$ است. جمله دهم کدام است؟

$$25(4) \quad 64(3) \quad 66(2) \quad 65(1)$$

$$\frac{t_7}{t_3} = 32 \Rightarrow \frac{t_1 q^6}{t_1 q^2} = 32 \Rightarrow q^4 = 32 \Rightarrow q = 2$$

۳ حال چون $t_4 = 1$ است، پس:

$$t_4 = t_1 q^3 = 1 \Rightarrow t_1 \times 2^3 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow t_{10} = t_1 q^9 = \frac{1}{8} \times 2^9 = 2^6 = 64$$

قدرنسبت دنباله هندسی

وقتی دو جمله از دنباله هندسی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی یعنی $t_n = t_1 q^{n-1}$ دو جمله داده شده را برحسب t_1 و q بنویسیم و با حل دستگاه حاصل، t_1 و q را به دست آوریم.

مثال در یک دنباله هندسی جملات پنجم و هشتم آن به ترتیب ۹ و ۷۲ هستند. قدرنسبت را به دست آورید.

$$\begin{cases} t_5 = 9 \\ t_8 = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 q^4 = 9 \\ t_1 q^7 = 72 \end{cases} \xrightarrow{\div} q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

تذکر اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله‌ای هندسی باشند، آنگاه قدرنسبت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{t_m}{t_n} = q^{(m-n)}$$

مثال در دنباله هندسی که جملات سوم و هفتم آن به ترتیب ۳ و ۴۸ باشند، قدرنسبت را به دست آورید.

$$\frac{t_7}{t_3} = q^{7-3} \Rightarrow \frac{48}{3} = q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$$

تست در دنباله هندسی $x, y, z, \dots$ جمله هفتم کدام است؟

$$256(4) \quad 357(3) \quad 358(2) \quad 257(1)$$

۴ در دنباله هندسی داده شده، جمله اول برابر $\frac{1}{2}$ و جمله سوم برابر ۴ است، پس:

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow \frac{t_1 q^2}{t_1} = 8 \Rightarrow q^2 = 8 \Rightarrow q = \pm \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow t_7 = t_1 q^6 = \frac{1}{2} \times (\pm \sqrt{8})^6 = \frac{1}{2} \times 2^9 = 2^8 = 256$$

واسطه هندسی

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب جملات اول و سوم برابر مربع جمله وسط است، در این حالت جمله وسط یعنی b را واسطه هندسی a و c می‌نامند.

$$b^2 = a \times c$$

تست به ازای یک مقدار x اعداد $12+x, x, 8-x$ به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی نزولی‌اند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

$$\frac{1}{9}(4) \quad \frac{1}{3}(3) \quad \frac{2}{9}(2) \quad \frac{2}{3}(1)$$

۲ اعداد $12+x, x, 8-x$ جملات متوالی دنباله هندسی‌اند، پس:

$$x^2 = \frac{(12-x)(8-x)}{96+8x-12x-x^2} \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 48}{(x+8)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون دنباله هندسی نزولی است، پس $x = 6$ قابل قبول است:

$$t_5 = t_1 q^4 = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}$$

نکته در سؤالاتی که صحبت از حاصل ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی است اما شماره جمله‌ها مشخص نیست می‌توانیم جمله‌ها را به صورت $\frac{x}{q}$, x , xq در نظر بگیریم.

تست در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی برابر با ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. بزرگترین عدد بین این سه جمله کدام است؟

$$۸(۱) \quad ۹(۲) \quad ۱۰(۳) \quad ۱۱(۴)$$

۲ حاصل ضرب سه جمله متوالی از دنباله هندسی برابر ۲۱۶ است. بنابراین آن‌ها را به صورت $\frac{x}{q}$, x , xq در نظر می‌گیریم:

$$\left(\frac{x}{q}\right)(x)(xq) = 216 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

پس جملات دنباله $\frac{6}{q}$, 6 , $6q$, ... هستند. حال مجموع آن‌ها ۱۹

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13$$

$$\xrightarrow{\times q} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $q = \frac{2}{3}$ باشد، جملات دنباله به صورت ۹، ۶، ۴ باشند، جملات به صورت ۴، ۶، ۹ هستند که در هر دو حالت بزرگ‌ترین جمله برابر ۹ است.

مسائل ترکیبی دنباله حسابی و هندسی

گاهی اوقات می‌توانیم بعضی از جملات دنباله حسابی را گلچین کرده، آن‌ها را کنار هم قرار دهیم تا تشکیل دنباله هندسی دهند و بالعکس. در این حالت، باید به کمک فرمول جمله عمومی دنباله اولیه، جملات را باز کنیم، آن‌ها را کنار هم نوشته، سپس شرط تشکیل دنباله جدید را بنویسیم.

مثال در یک دنباله حسابی، جملات سوم، پنجم و دهم تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. قدرنسبت دنباله هندسی را به دست آورید.

$$\underbrace{t_1 + 2d}_a, \underbrace{t_1 + 4d}_b, \underbrace{t_1 + 9d}_c \xrightarrow{b^2=ac} \underbrace{(t_1 + 4d)^2}_{t_1^2 + 8t_1d + 16d^2} = \underbrace{(t_1 + 2d)(t_1 + 9d)}_{t_1^2 + 11t_1d + 18d^2}$$

$$\Rightarrow 3t_1d + 2d^2 = 0 \Rightarrow d(3t_1 + 2d) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{2}{3}d \Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{t_1 + 4d}{t_1 + 2d} = \frac{1 \cdot d}{\frac{1}{3}d} = \frac{3}{1}$$

نکته اگر جملات t_m , t_n , t_k از یک دنباله حسابی ($m > n > k$) جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$q = \frac{m-n}{n-k}$$

مثلاً، اگر جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشد، قدرنسبت برابر $q = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$ است.

اگر اعداد طبیعی m, n, p, q شماره جملاتی از دنباله هندسی باشند به طوری که $m+n=p+q$ باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطه زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m \times t_n = t_p \times t_q$$

مثلاً چون $2+8=4+6$ است، پس در هر دنباله هندسی $t_2 \times t_8 = t_4 \times t_6$ است.

نکته با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله هندسی، حاصل ضرب هر دو جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصله یکسانی دارند، با هم برابر است:

$$\circ \times \circ = \circ \times \circ = \circ \times \circ = \circ \times \circ = \dots$$

تست در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n که $a_3 = 16$ ، $a_7 = 5$ است. حاصل $a_4 \times a_6$ کدام است؟

$$۸۵(۱) \quad ۸۲(۲) \quad ۸۰(۳) \quad ۸۶(۴)$$

۳ چون مجموع اندیس‌های دو جمله a_3 و a_7 برابر مجموع اندیس‌های a_4 و a_6 است، از قانون اندیس‌ها استفاده می‌کنیم و داریم:

$$4+16=7+13 \Rightarrow a_4 \times a_6 = a_7 \times a_3 \Rightarrow a_4 \times a_6 = 5 \times 16 = 80$$

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعدادی عدد دیگر قرار دهیم به طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، کافیست اعداد مورد نظر را با جاهای خالی به صورت $\bigcirc$ نمایش داده، سپس a و b را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدرنسبت را بیابیم.

مثال بین دو عدد ۱ و ۳۲ چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم. کوچک‌ترین واسطه درج شده چقدر است؟

$$۱, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۳۲ \Rightarrow t_1 q^5 = 32 \Rightarrow t_6 = 32 \Rightarrow 1 \times q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ هستند که کوچک‌ترین عدد درج شده برابر ۲ است.

تست بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم. مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این واسطه‌ها کدام است؟

$$۳۴۲(۱) \quad ۳۳۸(۲) \quad ۳۴۰(۳) \quad ۳۴۲(۴)$$

۱ با قرار دادن چهار عدد بین ۴ و ۹۷۲، دنباله هندسی به صورت مقابل خواهد شد: $۴, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۹۷۲, \dots$ بنابراین در این دنباله، جمله اول برابر ۴ و جمله ششم برابر ۹۷۲ می‌شود. پس با استفاده از رابطه جمله عمومی دنباله هندسی قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$t_6 = t_1 q^5 \Rightarrow 972 = 4q^5 \Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

حال با داشتن قدرنسبت و جمله اول، می‌توان جملات این دنباله را به دست آورد:

$$\begin{array}{ccccccc} \times 3 & \times 3 & \times 3 & \times 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۴ & ۱۲ & ۳۶ & ۱۰۸ & ۳۲۴ & ۹۷۲ & \end{array} \Rightarrow ۱۲+۳۲۴=۳۳۶$$

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: قوانین توان و رادیکال‌ها و گویا کردن در همهٔ مباحث ریاضی کاربرد دارد. توصیه: به جای حفظ کردن روابط موجود در این فصل آن‌ها را با حل سؤالات یاد بگیرید. یعنی خواندن فرمول‌ها به تنهایی کافی نیست و باید سؤالات آن را حل کنید تا با تیپ آن‌ها به خوبی آشنا شوید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	(نوبت اول) ۱۴۰۲	(نوبت دوم) ۱۴۰۲	(نوبت اول) ۱۴۰۳	(نوبت دوم) ۱۴۰۳	(نوبت اول) ۱۴۰۴
تعداد تست	۱	۱	۱	۱	صفر	۱	۲	۲

درس ریشه و توان

ریشهٔ دوم و سوم

اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $b^n = a$ ، در این صورت می‌گوییم عدد b ریشهٔ n ام a است (n عدد طبیعی و $n \geq 2$). مثلاً، چون $9 = (-3)^2$ است، پس -3 یک ریشهٔ دوم 9 است. مثلاً، چون $8 = 2^3$ است، پس 2 یک ریشهٔ سوم 8 است.

نکات مربوط به محاسبهٔ ریشهٔ دوم اعداد حقیقی

۱ اعداد مثبت دو ریشهٔ دوم قرینه دارند که یکی از آن‌ها مثبت و دیگری منفی است.

مثلاً، عدد 25 دو ریشهٔ دوم دارد، یکی 5 و دیگری -5 ، چون:

$$5^2 = (-5)^2 = 25$$

۲ اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند، چون مربع هیچ عددی، منفی نمی‌شود. مثلاً، عدد -25 ریشهٔ دوم ندارد، چون مربع هیچ عددی -25 نیست.

تذکره اگر a عددی مثبت باشد، ریشهٔ دوم مثبت عدد a را جذر عدد a می‌گوییم و با نماد $\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم.

مثلاً، ریشهٔ دوم مثبت عدد 25 همان عدد 5 است، پس $\sqrt{25} = 5$ می‌باشد. تمام اعداد حقیقی مانند a دارای ریشهٔ سوم می‌باشند و علامت با خودشان هستند و آن را با $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$\sqrt[3]{125} = 5, \quad \sqrt[3]{-125} = -5$$

اعداد مثبت دارای دو ریشهٔ مرتبهٔ زوج قرینه هستند و اعداد منفی ریشهٔ مرتبه زوج ندارند. تمام اعداد حقیقی دارای یک ریشهٔ مرتبهٔ فرد هستند که با خودشان هم علامت است.

تست حاصل $\sqrt[4]{21 - \sqrt{22 + \sqrt{12 + \sqrt{3 - 27}}}}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴ از درونی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم و مرحله به مرحله بیرون می‌آییم:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{21 - \sqrt{22 + \sqrt{12 + \sqrt{3 - 27}}}} &= \sqrt[4]{21 - \sqrt{22 + \sqrt{12 + (-3)}}} \\ &= \sqrt[4]{21 - \sqrt{22 + 3}} = \sqrt[4]{21 - 5} = \sqrt[4]{16} = 2 \end{aligned}$$

مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد حقیقی مثبت

برای مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد بیشتر از ۱ مطابق زیر عمل می‌کنیم:

مقایسهٔ مقادیر a^n

اعداد بزرگتر از ۱ هر چه به توان بزرگتری برسند، مقدارشان بزرگتر می‌شود. $1 < a^1 < a^2 < a^3 < \dots < a^{n-1} < a^n < a^{n+1} < \dots$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است: $1 < 5 < 5^2 < 5^3$

مقایسهٔ ریشه‌های n ام مثبت

در اعداد بزرگتر از ۱ هر چه مرتبهٔ ریشه بیشتر شود، حاصل کوچک‌تر می‌شود.

$$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots > \sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a} > \dots > 1$$

مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد حقیقی منفی

برای مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد بین منفی یک و صفر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

مقایسهٔ مقادیر a^n

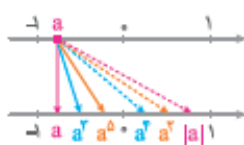
۱. توان‌های زوج a مثبت هستند و هرچه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک‌تر می‌شود:

$$0 < \dots < a^n < \dots < a^2 < a^0 < |a| < 1$$

۲. توان‌های فرد a منفی هستند و هرچه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

$$-1 < a < a^2 < a^4 < \dots < a^n < \dots < 0$$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است:



خارج کردن عدد از زیر رادیکال و مقایسه $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$

در رادیکال‌های با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال و همچنین حاصل رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر (نامنفی) است.

$$\sqrt{20} = 20$$

به عنوان مثال:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{-25} \text{ تعریف نشده}$$

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

در رادیکال‌های با فرجه فرد، عبارت زیر رادیکال و همچنین حاصل رادیکال می‌توانند هر عدد حقیقی دلخواه باشند. مثلاً:

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[3]{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

مقایسه $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$

فرد n

اگر n فرد باشد، مقادیر $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$ برابرند:

$$(\sqrt[n]{a})^2 = (\sqrt[5]{a})^5 = (\sqrt[7]{a})^7 = \dots = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[5]{a^5} = \sqrt[7]{a^7} = \dots = a$$

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2; (\sqrt[5]{5})^5 = \sqrt[5]{5^5} = 5$$

زوج n

اگر n زوج باشد، آنگاه $(\sqrt[n]{a})^n = a$ اما $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است:

$$(\sqrt{a})^2 = (\sqrt[4]{a})^4 = (\sqrt[6]{a})^6 = \dots = a$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[6]{a^6} = \dots = |a|$$

$$(\sqrt{9})^2 = 9; \sqrt{9^2} = |9| = 9; \sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$$

تذکر در محاسبه عبارت‌های $\sqrt{x^2}$ ، $\sqrt[3]{x^3}$ ، $\sqrt[5]{x^5}$ یا ...، برای این که از مثبت بودن جواب مطمئن شویم، از قدر مطلق استفاده می‌کنیم، یعنی به ازای n ‌های زوج $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ است.

$$\sqrt{x^2} = |x|, \sqrt[3]{x^3} = x, \sqrt[5]{x^5} = |x|, \sqrt[5]{x^5} = x$$

تست اگر $a < 0$ باشد، حاصل $\sqrt[4]{16a^4} + \sqrt[3]{a^3} - \sqrt{25a^2}$ کدام است؟

$$a(4) \quad -6a(3) \quad 4a(2) \quad -2a(1)$$

۲

$$\sqrt[4]{16a^4} + \sqrt[3]{a^3} - \sqrt{25a^2} = |\sqrt[4]{16a^4}| + a - |\sqrt{25a^2}|$$

$$= (-2a) + a - (5a) = -2a + a - 5a = -6a$$

مقادیر تقریبی ریشه n ام

اگر بخواهیم مقدار تقریبی عدد $\sqrt[n]{a}$ را به دست آوریم، باید مشخص کنیم عدد a بین توان n ام کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، سپس از طرفین نامساوی ایجاد شده ریشه n ام بگیریم.

برای مقایسه مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد کمتر از ۱ - مطابق زیر عمل می‌کنیم:

مقایسه مقادیر a^n

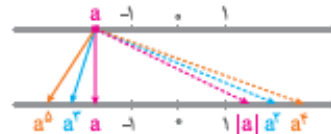
۱ توان‌های زوج a مثبت هستند و هرچه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل بزرگ‌تر می‌شود:

$$1 < |a| < a^2 < a^4 < a^6 < \dots < a^n$$

۲ توان‌های فرد a منفی هستند و هرچه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل کوچک‌تر می‌شود.

$$a^n < \dots < a^5 < a^3 < a < -1$$

در شکل زیر، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است:



$$1 < |-2| < (-2)^2 < (-2)^4 < (-2)^6 < (-2)^8 < (-2)^{10} < (-2)^{12} < (-2)^{14} < (-2)^{16} < (-2)^{18} < (-2)^{20} < (-2)^{22} < (-2)^{24} < (-2)^{26} < (-2)^{28} < (-2)^{30} < (-2)^{32} < (-2)^{34} < (-2)^{36} < (-2)^{38} < (-2)^{40} < (-2)^{42} < (-2)^{44} < (-2)^{46} < (-2)^{48} < (-2)^{50} < (-2)^{52} < (-2)^{54} < (-2)^{56} < (-2)^{58} < (-2)^{60} < (-2)^{62} < (-2)^{64} < (-2)^{66} < (-2)^{68} < (-2)^{70} < (-2)^{72} < (-2)^{74} < (-2)^{76} < (-2)^{78} < (-2)^{80} < (-2)^{82} < (-2)^{84} < (-2)^{86} < (-2)^{88} < (-2)^{90} < (-2)^{92} < (-2)^{94} < (-2)^{96} < (-2)^{98} < (-2)^{100} < (-2)^{102} < (-2)^{104} < (-2)^{106} < (-2)^{108} < (-2)^{110} < (-2)^{112} < (-2)^{114} < (-2)^{116} < (-2)^{118} < (-2)^{120} < (-2)^{122} < (-2)^{124} < (-2)^{126} < (-2)^{128} < (-2)^{130} < (-2)^{132} < (-2)^{134} < (-2)^{136} < (-2)^{138} < (-2)^{140} < (-2)^{142} < (-2)^{144} < (-2)^{146} < (-2)^{148} < (-2)^{150} < (-2)^{152} < (-2)^{154} < (-2)^{156} < (-2)^{158} < (-2)^{160} < (-2)^{162} < (-2)^{164} < (-2)^{166} < (-2)^{168} < (-2)^{170} < (-2)^{172} < (-2)^{174} < (-2)^{176} < (-2)^{178} < (-2)^{180} < (-2)^{182} < (-2)^{184} < (-2)^{186} < (-2)^{188} < (-2)^{190} < (-2)^{192} < (-2)^{194} < (-2)^{196} < (-2)^{198} < (-2)^{200} < (-2)^{202} < (-2)^{204} < (-2)^{206} < (-2)^{208} < (-2)^{210} < (-2)^{212} < (-2)^{214} < (-2)^{216} < (-2)^{218} < (-2)^{220} < (-2)^{222} < (-2)^{224} < (-2)^{226} < (-2)^{228} < (-2)^{230} < (-2)^{232} < (-2)^{234} < (-2)^{236} < (-2)^{238} < (-2)^{240} < (-2)^{242} < (-2)^{244} < (-2)^{246} < (-2)^{248} < (-2)^{250} < (-2)^{252} < (-2)^{254} < (-2)^{256} < (-2)^{258} < (-2)^{260} < (-2)^{262} < (-2)^{264} < (-2)^{266} < (-2)^{268} < (-2)^{270} < (-2)^{272} < (-2)^{274} < (-2)^{276} < (-2)^{278} < (-2)^{280} < (-2)^{282} < (-2)^{284} < (-2)^{286} < (-2)^{288} < (-2)^{290} < (-2)^{292} < (-2)^{294} < (-2)^{296} < (-2)^{298} < (-2)^{300} < (-2)^{302} < (-2)^{304} < (-2)^{306} < (-2)^{308} < (-2)^{310} < (-2)^{312} < (-2)^{314} < (-2)^{316} < (-2)^{318} < (-2)^{320} < (-2)^{322} < (-2)^{324} < (-2)^{326} < (-2)^{328} < (-2)^{330} < (-2)^{332} < (-2)^{334} < (-2)^{336} < (-2)^{338} < (-2)^{340} < (-2)^{342} < (-2)^{344} < (-2)^{346} < (-2)^{348} < (-2)^{350} < (-2)^{352} < (-2)^{354} < (-2)^{356} < (-2)^{358} < (-2)^{360} < (-2)^{362} < (-2)^{364} < (-2)^{366} < (-2)^{368} < (-2)^{370} < (-2)^{372} < (-2)^{374} < (-2)^{376} < (-2)^{378} < (-2)^{380} < (-2)^{382} < (-2)^{384} < (-2)^{386} < (-2)^{388} < (-2)^{390} < (-2)^{392} < (-2)^{394} < (-2)^{396} < (-2)^{398} < (-2)^{400} < (-2)^{402} < (-2)^{404} < (-2)^{406} < (-2)^{408} < (-2)^{410} < (-2)^{412} < (-2)^{414} < (-2)^{416} < (-2)^{418} < (-2)^{420} < (-2)^{422} < (-2)^{424} < (-2)^{426} < (-2)^{428} < (-2)^{430} < (-2)^{432} < (-2)^{434} < (-2)^{436} < (-2)^{438} < (-2)^{440} < (-2)^{442} < (-2)^{444} < (-2)^{446} < (-2)^{448} < (-2)^{450} < (-2)^{452} < (-2)^{454} < (-2)^{456} < (-2)^{458} < (-2)^{460} < (-2)^{462} < (-2)^{464} < (-2)^{466} < (-2)^{468} < (-2)^{470} < (-2)^{472} < (-2)^{474} < (-2)^{476} < (-2)^{478} < (-2)^{480} < (-2)^{482} < (-2)^{484} < (-2)^{486} < (-2)^{488} < (-2)^{490} < (-2)^{492} < (-2)^{494} < (-2)^{496} < (-2)^{498} < (-2)^{500} < (-2)^{502} < (-2)^{504} < (-2)^{506} < (-2)^{508} < (-2)^{510} < (-2)^{512} < (-2)^{514} < (-2)^{516} < (-2)^{518} < (-2)^{520} < (-2)^{522} < (-2)^{524} < (-2)^{526} < (-2)^{528} < (-2)^{530} < (-2)^{532} < (-2)^{534} < (-2)^{536} < (-2)^{538} < (-2)^{540} < (-2)^{542} < (-2)^{544} < (-2)^{546} < (-2)^{548} < (-2)^{550} < (-2)^{552} < (-2)^{554} < (-2)^{556} < (-2)^{558} < (-2)^{560} < (-2)^{562} < (-2)^{564} < (-2)^{566} < (-2)^{568} < (-2)^{570} < (-2)^{572} < (-2)^{574} < (-2)^{576} < (-2)^{578} < (-2)^{580} < (-2)^{582} < (-2)^{584} < (-2)^{586} < (-2)^{588} < (-2)^{590} < (-2)^{592} < (-2)^{594} < (-2)^{596} < (-2)^{598} < (-2)^{600} < (-2)^{602} < (-2)^{604} < (-2)^{606} < (-2)^{608} < (-2)^{610} < (-2)^{612} < (-2)^{614} < (-2)^{616} < (-2)^{618} < (-2)^{620} < (-2)^{622} < (-2)^{624} < (-2)^{626} < (-2)^{628} < (-2)^{630} < (-2)^{632} < (-2)^{634} < (-2)^{636} < (-2)^{638} < (-2)^{640} < (-2)^{642} < (-2)^{644} < (-2)^{646} < (-2)^{648} < (-2)^{650} < (-2)^{652} < (-2)^{654} < (-2)^{656} < (-2)^{658} < (-2)^{660} < (-2)^{662} < (-2)^{664} < (-2)^{666} < (-2)^{668} < (-2)^{670} < (-2)^{672} < (-2)^{674} < (-2)^{676} < (-2)^{678} < (-2)^{680} < (-2)^{682} < (-2)^{684} < (-2)^{686} < (-2)^{688} < (-2)^{690} < (-2)^{692} < (-2)^{694} < (-2)^{696} < (-2)^{698} < (-2)^{700} < (-2)^{702} < (-2)^{704} < (-2)^{706} < (-2)^{708} < (-2)^{710} < (-2)^{712} < (-2)^{714} < (-2)^{716} < (-2)^{718} < (-2)^{720} < (-2)^{722} < (-2)^{724} < (-2)^{726} < (-2)^{728} < (-2)^{730} < (-2)^{732} < (-2)^{734} < (-2)^{736} < (-2)^{738} < (-2)^{740} < (-2)^{742} < (-2)^{744} < (-2)^{746} < (-2)^{748} < (-2)^{750} < (-2)^{752} < (-2)^{754} < (-2)^{756} < (-2)^{758} < (-2)^{760} < (-2)^{762} < (-2)^{764} < (-2)^{766} < (-2)^{768} < (-2)^{770} < (-2)^{772} < (-2)^{774} < (-2)^{776} < (-2)^{778} < (-2)^{780} < (-2)^{782} < (-2)^{784} < (-2)^{786} < (-2)^{788} < (-2)^{790} < (-2)^{792} < (-2)^{794} < (-2)^{796} < (-2)^{798} < (-2)^{800} < (-2)^{802} < (-2)^{804} < (-2)^{806} < (-2)^{808} < (-2)^{810} < (-2)^{812} < (-2)^{814} < (-2)^{816} < (-2)^{818} < (-2)^{820} < (-2)^{822} < (-2)^{824} < (-2)^{826} < (-2)^{828} < (-2)^{830} < (-2)^{832} < (-2)^{834} < (-2)^{836} < (-2)^{838} < (-2)^{840} < (-2)^{842} < (-2)^{844} < (-2)^{846} < (-2)^{848} < (-2)^{850} < (-2)^{852} < (-2)^{854} < (-2)^{856} < (-2)^{858} < (-2)^{860} < (-2)^{862} < (-2)^{864} < (-2)^{866} < (-2)^{868} < (-2)^{870} < (-2)^{872} < (-2)^{874} < (-2)^{876} < (-2)^{878} < (-2)^{880} < (-2)^{882} < (-2)^{884} < (-2)^{886} < (-2)^{888} < (-2)^{890} < (-2)^{892} < (-2)^{894} < (-2)^{896} < (-2)^{898} < (-2)^{900} < (-2)^{902} < (-2)^{904} < (-2)^{906} < (-2)^{908} < (-2)^{910} < (-2)^{912} < (-2)^{914} < (-2)^{916} < (-2)^{918} < (-2)^{920} < (-2)^{922} < (-2)^{924} < (-2)^{926} < (-2)^{928} < (-2)^{930} < (-2)^{932} < (-2)^{934} < (-2)^{936} < (-2)^{938} < (-2)^{940} < (-2)^{942} < (-2)^{944} < (-2)^{946} < (-2)^{948} < (-2)^{950} < (-2)^{952} < (-2)^{954} < (-2)^{956} < (-2)^{958} < (-2)^{960} < (-2)^{962} < (-2)^{964} < (-2)^{966} < (-2)^{968} < (-2)^{970} < (-2)^{972} < (-2)^{974} < (-2)^{976} < (-2)^{978} < (-2)^{980} < (-2)^{982} < (-2)^{984} < (-2)^{986} < (-2)^{988} < (-2)^{990} < (-2)^{992} < (-2)^{994} < (-2)^{996} < (-2)^{998} < (-2)^{1000} < (-2)^{1002} < (-2)^{1004} < (-2)^{1006} < (-2)^{1008} < (-2)^{1010} < (-2)^{1012} < (-2)^{1014} < (-2)^{1016} < (-2)^{1018} < (-2)^{1020} < (-2)^{1022} < (-2)^{1024} < (-2)^{1026} < (-2)^{1028} < (-2)^{1030} < (-2)^{1032} < (-2)^{1034} < (-2)^{1036} < (-2)^{1038} < (-2)^{1040} < (-2)^{1042} < (-2)^{1044} < (-2)^{1046} < (-2)^{1048} < (-2)^{1050} < (-2)^{1052} < (-2)^{1054} < (-2)^{1056} < (-2)^{1058} < (-2)^{1060} < (-2)^{1062} < (-2)^{1064} < (-2)^{1066} < (-2)^{1068} < (-2)^{1070} < (-2)^{1072} < (-2)^{1074} < (-2)^{1076} < (-2)^{1078} < (-2)^{1080} < (-2)^{1082} < (-2)^{1084} < (-2)^{1086} < (-2)^{1088} < (-2)^{1090} < (-2)^{1092} < (-2)^{1094} < (-2)^{1096} < (-2)^{1098} < (-2)^{1100} < (-2)^{1102} < (-2)^{1104} < (-2)^{1106} < (-2)^{1108} < (-2)^{1110} < (-2)^{1112} < (-2)^{1114} < (-2)^{1116} < (-2)^{1118} < (-2)^{1120} < (-2)^{1122} < (-2)^{1124} < (-2)^{1126} < (-2)^{1128} < (-2)^{1130} < (-2)^{1132} < (-2)^{1134} < (-2)^{1136} < (-2)^{1138} < (-2)^{1140} < (-2)^{1142} < (-2)^{1144} < (-2)^{1146} < (-2)^{1148} < (-2)^{1150} < (-2)^{1152} < (-2)^{1154} < (-2)^{1156} < (-2)^{1158} < (-2)^{1160} < (-2)^{1162} < (-2)^{1164} < (-2)^{1166} < (-2)^{1168} < (-2)^{1170} < (-2)^{1172} < (-2)^{1174} < (-2)^{1176} < (-2)^{1178} < (-2)^{1180} < (-2)^{1182} < (-2)^{1184} < (-2)^{1186} < (-2)^{1188} < (-2)^{1190} < (-2)^{1192} < (-2)^{1194} < (-2)^{1196} < (-2)^{1198} < (-2)^{1200} < (-2)^{1202} < (-2)^{1204} < (-2)^{1206} < (-2)^{1208} < (-2)^{1210} < (-2)^{1212} < (-2)^{1214} < (-2)^{1216} < (-2)^{1218} < (-2)^{1220} < (-2)^{1222} < (-2)^{1224} < (-2)^{1226} < (-2)^{1228} < (-2)^{1230} < (-2)^{1232} < (-2)^{1234} < (-2)^{1236} < (-2)^{1238} < (-2)^{1240} < (-2)^{1242} < (-2)^{1244} < (-2)^{1246} < (-2)^{1248} < (-2)^{1250} < (-2)^{1252} < (-2)^{1254} < (-2)^{1256} < (-2)^{1258} < (-2)^{1260} < (-2)^{1262} < (-2)^{1264} < (-2)^{1266} < (-2)^{1268} < (-2)^{1270} < (-2)^{1272} < (-2)^{1274} < (-2)^{1276} < (-2)^{1278} < (-2)^{1280} < (-2)^{1282} < (-2)^{1284} < (-2)^{1286} < (-2)^{1288} < (-2)^{1290} < (-2)^{1292} < (-2)^{1294} < (-2)^{1296} < (-2)^{1298} < (-2)^{1300} < (-2)^{1302} < (-2)^{1304} < (-2)^{1306} < (-2)^{1308} < (-2)^{1310} < (-2)^{1312} < (-2)^{1314} < (-2)^{1316} < (-2)^{1318} < (-2)^{1320} < (-2)^{1322} < (-2)^{1324} < (-2)^{1326} < (-2)^{1328} < (-2)^{1330} < (-2)^{1332} < (-2)^{1334} < (-2)^{1336} < (-2)^{1338} < (-2)^{1340} < (-2)^{1342} < (-2)^{1344} < (-2)^{1346} < (-2)^{1348} < (-2)^{1350} < (-2)^{1352} < (-2)^{1354} < (-2)^{1356} < (-2)^{1358} < (-2)^{1360} < (-2)^{1362} < (-2)^{1364} < (-2)^{1366} < (-2)^{1368} < (-2)^{1370} < (-2)^{1372} < (-2)^{1374} < (-2)^{1376} < (-2)^{1378} < (-2)^{1380} < (-2)^{1382} < (-2)^{1384} < (-2)^{1386} < (-2)^{1388} < (-2)^{1390} < (-2)^{1392} < (-2)^{1394} < (-2)^{1396} < (-2)^{1398} < (-2)^{1400} < (-2)^{1402} < (-2)^{1404} < (-2)^{1406} < (-2)^{1408} < (-2)^{1410} < (-2)^{1412} < (-2)^{1414} < (-2)^{1416} < (-2)^{1418} < (-2)^{1420} < (-2)^{1422} < (-2)^{1424} < (-2)^{1426} < (-2)^{1428} < (-2)^{1430} < (-2)^{1432} < (-2)^{1434} < (-2)^{1436} < (-2)^{1438} < (-2)^{1440} < (-2)^{1442} < (-2)^{1444} < (-2)^{1446} < (-2)^{1448} < (-2)^{1450} < (-2)^{1452} < (-2)^{1454} < (-2)^{1456} < (-2)^{1458} < (-2)^{1460} < (-2)^{1462} < (-2)^{1464} < (-2)^{1466} < (-2)^{1468} < (-2)^{1470} < (-2)^{1472} < (-2)^{1474} < (-2)^{1476} < (-2)^{1478} < (-2)^{1480} < (-2)^{1482} < (-2)^{1484} < (-2)^{1486} < (-2)^{1488} < (-2)^{1490} < (-2)^{1492} < (-2)^{1494} < (-2)^{1496} < (-2)^{1498} < (-2)^{1500} < (-2)^{1502} < (-2)^{1504} < (-2)^{1506} < (-2)^{1508} < (-2)^{1510} < (-2)^{1512} < (-2)^{1514} < (-2)^{1516} < (-2)^{1518} < (-2)^{1520} < (-2)^{1522} < (-2)^{1524} < (-2)^{1526} < (-2)^{1528} < (-2)^{1530} < (-2)^{1532} < (-2)^{1534} < (-2)^{1536} < (-2)^{1538} < (-2)^{1540} < (-2)^{1542} < (-2)^{1544} < (-2)^{1546} < (-2)^{1548} < (-2)^{1550} < (-2)^{1552} < (-2)^{1554} < (-2)^{1556} < (-2)^{1558} < (-2)^{1560} < (-2)^{1562} < (-2)^{1564} < (-2)^{1566} < (-2)^{1568} < (-2)^{1570} < (-2)^{1572} < (-2)^{1574} < (-2)^{1576} < (-2)^{1578} < (-2)^{1580} < (-2)^{1582} < (-2)^{1584} < (-2)^{1586} < (-2)^{1588} < (-2)^{1590} < (-2)^{1592} < (-2)^{1594} < (-2)^{1596} < (-2)^{1598} < (-2)^{1600} < (-2)^{1602} < (-2)^{1604} < (-2)^{1606} < (-2)^{1608} < (-2)^{1610} < (-2)^{1612} < (-2)^{1614} < (-2)^{1616} < (-2)^{1618} < (-2)^{1620} < (-2)^{1622} < (-2)^{1624} < (-2)^{1626} < (-2)^{1628} < (-2)^{1$$

تذکر عدد منفی به توان گویا در کتاب درسی تعریف نشده است. مثلاً:

تعریف نشده: $(-2)^{\frac{1}{5}}$; تعریف نشده: $(-1)^{\frac{1}{3}}$

اگر عددی اعشاری باشد، برای به توان رساندن آن، بهتر است ابتدا این عدد را از حالت اعشاری خارج کرده و به صورت کسری بنویسیم؛ سپس عملیات ساده‌سازی و توان‌رسانی را انجام دهیم. مثلاً:

$$5^{20} = \left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)^{20} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^5\right)^4 = \left(\frac{100000}{3125}\right)^4 = \left(\frac{32}{100000}\right)^{-4} = (0.00032)^{-4}$$

تست ساده شده عبارت $6^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^4$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳ همه اعداد را ساده و به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \times 6^4 &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3^{-3}}{4^{-3}}\right) \times (2^4 \times 3^4) \\ &= \frac{1}{2^8} \times \frac{3^{-3}}{2^{-6}} \times 2^4 \times 3^4 = \frac{3 \times 2^2}{2^2} = 3 \times 2^2 = 12 \end{aligned}$$

قوانین رادیکال

اگر a عددی مثبت باشد، برای هر دو عدد طبیعی n و m داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

برای ساده کردن رادیکال‌ها [به شرط تعریف شدن]، از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

۱ وقتی دو رادیکال زیر هم باشند، فرجه‌ها می‌توانند با هم جابه‌جا شده یا در هم ضرب شوند.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = nm\sqrt[nm]{a} \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5} = 12\sqrt[12]{5}$$

۲ فرجه و توان با هم ساده می‌شوند.

$$m\sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{a^n} \quad 2\sqrt[3]{38} = 2 \times \sqrt[3]{3^2 \times 4} = \sqrt[3]{3^2}$$

۳ یک عدد دلخواه را می‌توان در فرجه و توان ضرب کرد.

$$m\sqrt[n]{a^n} = m\sqrt[n]{a^{nk}} \quad \sqrt[5]{6^3} = \sqrt[5]{4 \times 3^2 \times 4} = \sqrt[5]{6^3}$$

۴ اگر عددی بخواهد وارد رادیکال شود، باید به توان فرجه برسد.

$$a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b} \quad 3^4 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^4 \times 2} = \sqrt[3]{162}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{8}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[5]{2}$ ۲) $\sqrt[8]{2}$ ۳) $\sqrt[2]{2}$ ۴) $\sqrt[4]{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{8}}} &= \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{\frac{3}{5}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[20]{2^3}} = \sqrt[60]{2^3} = \sqrt[20]{2^3} \\ &= \sqrt[20]{8} = \sqrt[20]{2^3} \end{aligned}$$

تست اگر $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}} = 15\sqrt[2]{7^x}$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}} &= \sqrt[5]{\sqrt[12]{9}} \Rightarrow \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{(2^5)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt[5]{2^5 \times 2^5} = \sqrt[5]{2^{10}} \Rightarrow \sqrt[5]{2^5 \times 2^5} = \sqrt[5]{2^{10}} \\ &\Rightarrow 3 = 3^{2x} \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال مقدار تقریبی $\sqrt{17}$ را بیابید.

باید مشخص کنیم عدد ۱۷ بین توان دوم کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و سپس جذر بگیریم: $4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow 4^2 < 17 < 5^2$
دقت کنید که عدد ۱۷ به 4^2 نزدیک‌تر است تا به 5^2 ، پس $\sqrt{17}$ هم به ۴ نزدیک‌تر است تا به ۵.

تست حاصل $[\sqrt[3]{-100}]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶

۳ از آن جایی که عدد ۱۰۰ بین دو مکعب کامل متوالی $-125 = (-5)^3$ و $-64 = (-4)^3$ قرار دارد، پس:

$$\begin{aligned} (-5)^3 < -100 < (-4)^3 &\Rightarrow \sqrt[3]{(-5)^3} < \sqrt[3]{-100} < \sqrt[3]{(-4)^3} \\ \Rightarrow -5 < \sqrt[3]{-100} < -4 &\Rightarrow [\sqrt[3]{-100}] = -5 \end{aligned}$$

اعداد با توان گویا

اگر بخواهیم اعداد با توان گویا را ساده کنیم، از قوانینی مانند قوانین مربوط به اعداد با توان‌های طبیعی استفاده می‌کنیم:

قوانین ساده کردن اعداد با توان‌های گویا

حاصل هر عدد غیر صفری که به توان صفر برسد، برابر با ۱ است:

$$a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$$

عدد یک، به توان هر عددی که برسد، حاصل برابر ۱ است: $1^n = 1$

اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، داریم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

۱) در ضرب دو عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان، توان‌ها جمع می‌شوند.
 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

۲) در تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان، توان‌ها تفریق می‌شوند.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

۱) در ضرب دو عدد توان‌دار با توان‌های یکسان، پایه‌ها در هم ضرب می‌شوند.
 $a^m \times b^m = (ab)^m$

۲) در تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های یکسان، پایه‌ها بر یکدیگر تقسیم می‌شوند.
 $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

اگر یک عدد توان‌دار، به توان جدیدی برسد، توان‌ها ضرب می‌شوند.
 $(a^n)^m = a^{nm}$

اگر توان عددی، خودش توان‌دار بود، ابتدا توان را محاسبه کرده، سپس پایه را به توان عدد حاصل می‌رسانیم.
 $a^{m^n} = (a^m)^n$

تست اگر $3^a = n$ و $5^b = m$ باشد، از معادله $m^a \times n^b = 225^4$

مقدار $a \times b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۸۷ ۴) ۱۲۵

$$m^a \times n^b = 225^4 \Rightarrow (5^b)^a \times (3^a)^b = (5^2)^4$$

$$\Rightarrow 5^{ab} \times 3^{ab} = 15^4 \Rightarrow 15^{ab} = 15^4 \Rightarrow ab = 4$$

اعمال رادیکال‌ها

رادیکال‌ها را به شرطی می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد که متشابه باشند؛ یعنی:

۱ دارای فرجه‌های یکسان باشند.

۲ عبارت زیر رادیکال آن‌ها یکسان باشد.

مثال حاصل $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{1}{3}\sqrt{80}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{1}{3}\sqrt{80} &= 2\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} + \frac{1}{3}\sqrt{16 \times 5} \\ &= 2 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \frac{1}{3} \times 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

در ضرب (یا تقسیم) کردن رادیکال‌ها، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر فرجه‌ها یکسان باشند، یکی از فرجه‌ها را نوشته و عبارت‌های زیر

رادیکال را در هم ضرب (یا بر هم تقسیم) می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

مثال حاصل عبارت $\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ را به دست آورید.

چون فرجه‌ها برابر است، عبارت‌های زیر رادیکال را در هم ضرب

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{12} \times \sqrt{18} &= \sqrt{12 \times 18} = \sqrt{3 \times 4 \times 2 \times 9} = \sqrt{3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} \\ &= \sqrt{3^2 \times 2^2 \times 3^2} = 3 \times 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

۲ اگر فرجه‌ها یکسان نباشند، ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها

را پیدا کرده و آن را به عنوان فرجه مشترک برای هر دو رادیکال می‌نویسیم،

سپس مانند حالت اول عمل می‌کنیم.

مثال حاصل $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}$ را به دست آورید.

چون ک.م.م فرجه‌ها یعنی ک.م.م اعداد ۳ و ۴ برابر ۱۲ است، داریم:

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^4 \times 3^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 2 \times 3} = \sqrt[3]{8 \times 27 \times 6} = \sqrt[3]{1296} = \sqrt[3]{6^4} = 6\sqrt[3]{2}$$

نکته در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها نیز می‌توانیم آن‌ها را به صورت توان‌های گویا بنویسیم و ساده کنیم.

مثال عبارت $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}$ را ساده کنید.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12} - \frac{3}{12}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{24}$ کدام است؟ (خارج-۹۵)

$$2\sqrt[3]{9} \quad (۴) \quad 3\sqrt[3]{32} \quad (۳) \quad 6(۲) \quad 6\sqrt[3]{2} \quad (۱)$$

۲ می‌دانیم: $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{12 \times 54 \times 24} = \sqrt[3]{12^3 \times 3} = 12\sqrt[3]{3}$ حال همه اعداد

زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \times 2^2 \times 3^3 \times 2 \times 3^2 \times 2^3 \times 3} = \sqrt[3]{3^6 \times 2^7 \times 3^3} = \sqrt[3]{3^9 \times 2^7 \times 3} = \sqrt[3]{3^{12} \times 2^7 \times 3} = \sqrt[3]{3^{12} \times 2^8 \times 2 \times 3} = \sqrt[3]{3^{12} \times 2^8 \times 6} = 12\sqrt[3]{6}$$

چون فرجه رادیکال‌ها متفاوت است، همه فرجه‌ها را به ک.م.م

اعداد ۳، ۴، ۱۲ یعنی عدد ۱۲ تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{3 \times 2^2 \times 3^3} \times \sqrt[3]{3^3 \times 2 \times 3^2} \times \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 2^2} \\ &= \sqrt[3]{3^6 \times 2^7} \times \sqrt[3]{3^6 \times 2^3} \times \sqrt[3]{2^5 \times 3^1} = \sqrt[3]{3^{12} \times 2^{10} \times 3} = \sqrt[3]{3^{13} \times 2^{10}} = \sqrt[3]{3^{12} \times 3 \times 2^9 \times 2} = \sqrt[3]{3^{12} \times 2^9 \times 6} = 12\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

دروس عبارت‌های جبری

اتحادها

هر تساوی که به‌ازای همه مقادیر متغیرهای موجود در آن برقرار باشد

اتحاد نام دارد.

اتحادهای معروف

۱ اتحاد مربع مجموع و تفاضل دو جمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

۲ اتحاد مزدوج:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 - 16b^2 = (a-4b)(a+4b) \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

۳ اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

۴ اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات [چاق و لاغر]:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \quad a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4)$$

۵ اتحاد مربع سه جمله‌ای:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

$$(x+y+1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2(xy+x+y)$$

۶ اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x+5)(x+9) = x^2 + 14x + 45 \quad (x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8$$

اتحاد چاق و لاغر را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۳ هم به‌کار برد:

۱ برای تفاضل دو جمله با توان‌های برابر داریم ($n \in \mathbb{N}$):

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$x^6 - y^6 = (x-y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$$

تست اگر $xy = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $(2x+3y)^2 - (2x-3y)^2 - (2x+3y)^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲ می‌دانیم $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ است، پس:

$$(2x+3y)^2 - (2x-3y)^2 = 4(2x)(3y) = 24xy = 24\left(\frac{1}{4}\right) = 6$$

تجزیه

هرگاه یک عبارت جبری را به شکل حاصل ضرب چند عبارت بنویسیم، می‌گوییم تجزیه انجام داده‌ایم. برای تجزیه کردن، باید از فاکتورگیری یا اتحادها [یا هم‌زمان از هر دو] استفاده کنیم. مثلاً:

$$x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x-2)$$

$$x^2 - 4x \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(x-4) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x(x-2)(x+2)$$

چند تجزیه مشهور

۱ برای تجزیه عبارت‌هایی که به صورت تفاضل دو عبارت با توان زوج هستند، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x-3y)(x+3y)$$

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

۲ برای تجزیه عبارت‌هایی که به صورت جمع یا تفاضل دو عبارت با توان ۳ هستند، از اتحاد جاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$a^5 + a^2b^3 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} a^2(a^3+b^3) = a^2(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تذکر برای تجزیه بعضی از عبارت‌ها، که قابل فاکتورگیری نیستند یا هیچ اتحادی در آن‌ها مشاهده نمی‌شود، می‌توانیم جمله‌ها را دسته‌بندی کنیم.

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} (x^3 - 3x^2) + (2x - 6)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x^2(x-3) + 2(x-3) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (x-3)(x^2+2)$$

برای تجزیه برخی عبارت‌ها، لازم است یکی از جملات را به صورت مجموع دو جمله بنویسیم یا جمله‌ای را به عبارت مورد نظر اضافه و کم کنیم.

مثلاً برای تجزیه عبارت $x^3 - 3x - 2$ به جای جمله $-3x$ می‌نویسیم $-x - 2x$ و داریم:

$$x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2-1) - 2(x+1) = (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x-2)(x+1)$$

برای تجزیه عبارت‌های درجه ۲ که ضریب x^2 عددی غیر یک است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

تجزیه عبارت درجه دوم که ضریب x^2 عددی غیر یک است:

۱ ضریب x^2 را در عدد ثابت ضرب می‌کنیم.

۲ عبارت حاصل را با استفاده از اتحادها و فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم.

۳ ضریب x^2 را یک بار در یکی از پرانتزها، در x ضرب کرده و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر آن تقسیم می‌کنیم تا تجزیه عبارت اولیه به دست آید.

۲ برای مجموع دو جمله با توان‌های فرد و برابر داریم $(n \in \mathbb{N})$:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

تست اگر $x = \sqrt[3]{2} + 1$ باشد، حاصل $x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) -۳

۳ با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای داریم:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = (x-1)^3 + 3$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt[3]{2}+1} (\sqrt[3]{2}+1-1)^3 + 3 = (\sqrt[3]{2})^3 + 3 = 2 + 3 = 5$$

تست اگر $\frac{3a^2 \times 3b^2}{9ab} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-3}$ باشد، مقدار $|a-b|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۳

۴ ابتدا طرف اول تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{3a^2 \times 3b^2}{9ab} = \frac{3a^2 + b^2}{3ab} = 3a^2 + b^2 - 2ab = 3(a-b)^2$$

حال طبق تساوی داده شده داریم:

$$\frac{3a^2 \times 3b^2}{9ab} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-3} \Rightarrow 3(a-b)^2 = (3^{-3})^{-3} = 3^9$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = 9 \Rightarrow |a-b| = 3$$

اتحادهای فرعی و کاربرد اتحادها

از اتحاد مربع دو جمله‌ای، می‌توانیم به اتحادهای فرعی زیر برسیم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

اگر در اتحاد مکعب دو جمله‌ای، در دو جمله وسطی از $3ab$ فاکتور بگیریم و عبارت حاصل را به طرف دیگر تساوی منتقل کنیم، اتحادهای فرعی زیر به دست می‌آید:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

مثال اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را به دست آورید.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 3^3 - 3(1)(3) = 18$$

با جمع و تفریق اتحادهای $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ می‌توانیم به اتحادهای فرعی زیر برسیم:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1$$

$$\sqrt{8-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{3}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱) $6\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) 6 ۴) 10

۴ می‌دانیم $10\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times 5^2 = 2\sqrt{75}$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} &= \sqrt{28+2\sqrt{75}} + \sqrt{28-2\sqrt{75}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{25}+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{3})^2} \\ &= |\sqrt{25}+\sqrt{3}| + |\sqrt{25}-\sqrt{3}| = 5+\sqrt{3} + 5-\sqrt{3} = 10 \end{aligned}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3}-\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۳ از آن جایی که $5+2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ است، پس:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3}-\sqrt{2} &= \sqrt[3]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}-\sqrt{2} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 1 \end{aligned}$$

گویا کردن مخرج

برای ساده کردن عبارت‌های کسری شامل رادیکال، بهتر است مخرج آن‌ها بدون رادیکال باشد. در واقع باید کاری کنیم تا رادیکال مخرج از بین برود. به این عمل گویا کردن مخرج می‌گوییم. برای گویا کردن، با حالت‌های زیر مواجه می‌شویم:

۱ در حالت کلی، اگر مخرج کسر شامل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، باید صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم. در واقع صورت و مخرج را در فرجه برابر شود. یعنی اگر مخرج کسر شامل یک رادیکال به صورت $\sqrt{a}$ باشد، برای گویا کردن مخرج، باید صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a}$ ضرب کنیم یا اگر مخرج کسر شامل $\sqrt[3]{a}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2}$ ضرب کنیم و ...

مثال ۱ مخرج کسر $\frac{3}{\sqrt{6}}$ را گویا کنید.

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

مثال ۲ مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ را گویا کنید.

چون مخرج شامل $\sqrt[3]{25}$ ، یعنی $\sqrt[3]{5^2}$ است، باید صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{5}$ ضرب کنیم تا در مخرج $\sqrt[3]{5^3}$ ایجاد شود:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \times \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

مثال ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ را با روش تجزیه به دست آورید.

ضرب

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &\Rightarrow x^2 - x - 2 \\ x^2 - x - 2 &\Rightarrow (x-5)(x+4) \\ 2x^2 - x - 1 = 0 &\Rightarrow (2x-5)(x+\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

تست در تجزیه عبارت $8a^2 - 1$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $fa^2 + fa + 1$ ۲) $2a + 1$

۳) $2a - 1$ ۴) $fa^2 - 2a + 1$

۲ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$8a^2 - 1 = (2a)^2 - 1 = (2a-1)(fa^2 + 2a + 1)$$

ساده کردن عبارت‌های گویا

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، از ترکیب عمل‌های مخرج مشترک‌گیری، اتحاد و تجزیه استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که:

۱ مخرج مشترک می‌گیریم.

۲ به کمک اتحاد یا فاکتورگیری صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم.

۳ صورت را با مخرج ساده می‌کنیم.

مثال عبارت $(1 - \frac{1}{x})(\frac{x^2+x^2}{x^2-1})$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{x})(\frac{x^2+x^2}{x^2-1}) &= (\frac{x-1}{x})(\frac{x^2+x^2}{x^2-1}) = (\frac{x-1}{x})(\frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)}) \\ &= (\frac{x-1}{x})(\frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)}) = \frac{x^2}{x} = x \end{aligned}$$

تست ساده شده عبارت $(x-5 + \frac{6}{x+2})(1 + \frac{1}{x+1})$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x-3$ ۴) $x-4$

۴ در هر پرانتز مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (\frac{x-5}{1} + \frac{6}{x+2})(1 + \frac{1}{x+1}) &= (\frac{(x-5)(x+2)+6}{x+2})(\frac{x+1+1}{x+1}) \\ &= (\frac{x^2-3x-4}{x+2})(\frac{x+2}{x+1}) = (\frac{(x+1)(x-4)}{x+2})(\frac{x+2}{x+1}) = x-4 \end{aligned}$$

میانبر می‌توانیم تست را با عددگذاری حل کنیم. با قرار دادن عدد دلخواه

$x=1$ در عبارت، حاصل عبارت برابر $-3 \times \frac{3}{3} = -3$ می‌شود. به ازای $x=1$ برابر -3 می‌شود.

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

برای ساده کردن برخی عبارت‌های رادیکالی به شکل $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$ باید عبارت زیر رادیکال را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ بنویسیم و آن را از زیر رادیکال خارج کنیم. [در واقع x و y دو عددی هستند که مجموع آن‌ها برابر A و حاصل ضرب آن‌ها برابر B است]

مثال مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ را گویا کنید.

برای این کار طبق اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a^2b + ab^2 + b^3)$ صورت و مخرج را در قسمت چاق ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \times \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} + 1}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3})^3 - 1^3}$$

لاغر چاق

$$= \frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{2}$$

برای گویا کردن مخرج بعضی از کسرها، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را چندین مرحله در عبارت‌های مختلف ضرب کنیم تا رادیکال‌های مخرج ساده شوند.

برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ می‌توانیم صورت و مخرج کسر را در دو مرحله در مزدوج مخرج ضرب کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \times \frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}-1} \times \frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{3}+1)}{2}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} - \sqrt{80}$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} -3(2) & -4(1) \\ 3-2\sqrt{5} (4) & -1-2\sqrt{5} (3) \end{array}$$

۲ اعداد زیر رادیکال‌ها را تجزیه و مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3 \times 8} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - \sqrt{16 \times 5} \\ &= \sqrt[3]{27 \times 8} + \frac{(2-\sqrt{5})^2}{4-5} - 4\sqrt{5} = 3 \times 2 + \frac{4+5-4\sqrt{5}}{-1} - 4\sqrt{5} \\ &= 6-9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5} = -3 \end{aligned}$$

۲ اگر مخرج کسر، شامل جمع یا تفاضل دو رادیکال با فرجه ۲ و یا یک رادیکال با یک عدد باشد، برای گویا کردن مخرج، باید صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد.

مثال مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

برای این کار باید صورت و مخرج را در «مزدوج مخرج»، یعنی $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \sqrt{7} + \sqrt{5} \end{aligned}$$

۳ اگر مخرج کسر شامل عبارت رادیکالی با فرجه ۳ بود، برای گویا کردن مخرج، باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم.

مثال ۱ مخرج کسر $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$ را گویا کنید.

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \times \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{1^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$$

لاغر چاق

مثال ۲ مخرج کسر $\frac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$ را گویا کنید.

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}} \times \frac{1-\sqrt[3]{5}}{1-\sqrt[3]{5}} = \frac{1-\sqrt[3]{5}}{1^3 - (\sqrt[3]{5})^3} = \frac{1-\sqrt[3]{5}}{-4}$$

چاق لاغر

۴ اگر مخرج کسر شامل جمع یا تفاضل رادیکال‌هایی با فرجه بزرگتر از ۳ بود، برای گویا کردن مخرج، از اتحادهای مراتب بالاتر چاق و لاغر (یعنی اتحادهای $a^n \pm b^n$) استفاده می‌کنیم.

یادداشت:

هندسه پایه

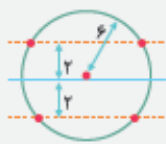
فصل

ارتباط با فصل‌های دیگه: شناخت ویژگی‌های اولیه مثلث‌ها و نیمساز، عمودمنصف و ... که در متوسطه اول با آن آشنا شدید، برای خواندن این فصل کافیست.

توصیه: برای حل سؤالات این فصل باید دست به قلم باشید و محاسبات را همزمان به شکل مسئله هم منتقل کنید. برای این‌که نگاه بهتری به شکل‌ها داشته باشید، تیپ‌های معروف را به همراه ویژگی‌های آن‌ها در درسنامه نوشتیم.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	(نوبت اول) ۱۴۰۲	(نوبت دوم) ۱۴۰۲	(نوبت اول) ۱۴۰۳	(نوبت دوم) ۱۴۰۳	(نوبت اول) ۱۴۰۴
تعداد تست	۶	۶	۵	۲	۲	۲	۳	۳

درس ترسیم‌های هندسی



بیشترین تعداد نقاط مطلوب، زمانی اتفاق می‌افتد که دایره با هر دو خط موازی، متقاطع باشد. بنابراین حداکثر ۴ نقطه با ویژگی خواسته شده، موجود است.

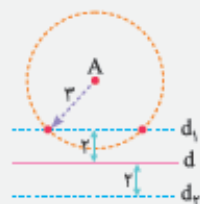
نقاطی با چند ویژگی

در بعضی سؤالات نقطاتی را می‌خواهند که دارای دو ویژگی باشند. در این سؤالات باید نقاط مربوط به هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم و محل تلاقی آن‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم.

تست نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از نقطه A و به فاصله ۲ واحد از خط d باشد؟

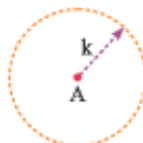
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۲ نقطاتی که به فاصله ۳ واحد از نقطه A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند؛ همچنین نقطاتی که به فاصله ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصله ۲ واحد از آن قرار دارند. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو شکل همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.

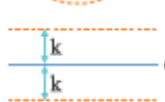


فاصله‌های مشخص در صفحه

مجموعه نقطاتی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصله ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

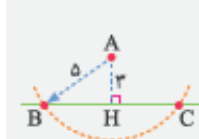


۱ مجموعه نقطاتی از صفحه که به فاصله k واحد از نقطه A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.



۲ مجموعه نقطاتی از صفحه که به فاصله k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات d و به فاصله k واحد از آن هستند.

مثال نقطه A به فاصله ۳ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله ۵ واحد از نقطه A وجود دارد؟



نقطاتی که به فاصله ۵ واحد از نقطه A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ قرار دارند و چون ۵ از ۳ بزرگ‌تر است، پس این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

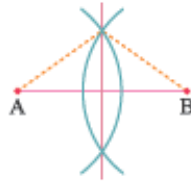
تست حداکثر چند نقطه در صفحه روی دایره به شعاع ۶ موجود است که از خط d به فاصله ۲ باشد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴ نقطاتی از صفحه که از خط d به فاصله ۲ هستند، روی دو خط موازی با خط d قرار دارند.

رسم عمود منصف

برای رسم عمود منصف پاره خط AB ، دهانه پراگار را به اندازه مناسب (بیش از نصف طول AB) باز می‌کنیم و یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم. سپس به کمک خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از محل تقاطع دو کمان بگذرد، این خط همان عمود منصف AB است.



تست برای رسم عمود منصف پاره خط AB به طول ۸، دهانه پراگار را به اندازه R باز کرده‌ایم. کدام گزینه در مورد R درست است؟

(۱) اندازه R اختیاری است.

(۲) $R = 4$

(۳) $R > 4$

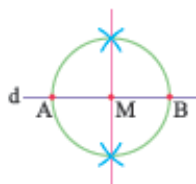
(۴) $R < 4$

۳ چون باید کمان‌های رسم شده همدیگر را قطع کنند، پس شعاع باید بزرگ‌تر از نصف طول پاره خط باشد. $R > 4$

کاربردهای رسم عمود منصف

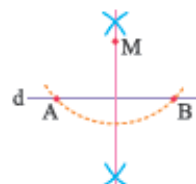
از رسم عمود منصف برای رسم خطی عمود بر خط دیگر یا خطی موازی با خط دیگر استفاده می‌شود:

۱ رسم خط عمود بر خط d از نقطه M واقع بر آن



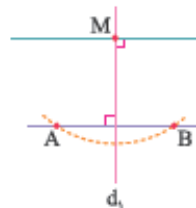
به مرکز M و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند. نقطه M وسط پاره خط AB است. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.

۲ رسم خط عمود بر خط d از نقطه M غیر واقع بر خط d



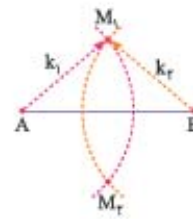
به مرکز M و شعاع مناسب کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.

۳ رسم خط موازی با خط d از نقطه M خارج آن

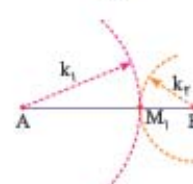


خط d_1 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد، سپس خط d_1 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d_1 عمود باشد. خط d_1 با خط d موازی است.

نقاطی که به فاصله k_1 از نقطه A و به فاصله k_2 از نقطه B قرار دارند، دارای حالت‌های زیر هستند:



۱ اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد.



۲ اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد.

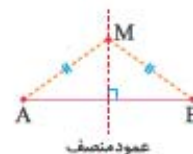
۳ اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارند.

تست دو نقطه A و B به فاصله ۷ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۳ واحد و از B به فاصله ۲ واحد باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱ با توجه به این که فاصله A و B از هم ۷ واحد است، دایره به مرکز A و به شعاع ۳ و دایره به مرکز B و به شعاع ۲ همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس گزینه «۱» صحیح است.

عمود منصف



مجموعه نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره خط AB است.

تست نقطه A روی عمود منصف پاره خط MN قرار گرفته است. مقدار $x^2 + y^2$ چقدر است؟

(۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۳ از آن جایی که A روی عمود منصف MN قرار دارد، پس داریم:

$$AM = AN \Rightarrow x + \sqrt{y+1} = 2x + \sqrt{y-1} \Rightarrow x = 1$$

$$MH = HN \Rightarrow 5x - y + 2 = 4x + y - 1$$

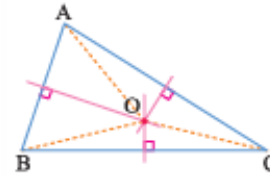
$$\Rightarrow 5 - y + 2 = 4 + y - 1$$

$$\Rightarrow 7 - y = 3 + y \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$$

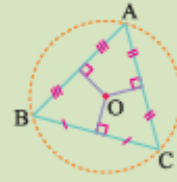
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

برخورد عمود منصف‌ها در مثلث و دایره محیطی

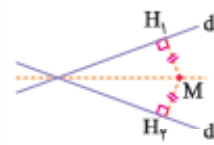
در هر مثلث، عمود منصف‌ها هم‌رس هستند و نقطه هم‌رسی آن‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است [پون هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌قط، از دو سر پاره‌قط به یک فاصله است]. یعنی در مثلث زیر $OA = OB = OC$ است.



نتیجه سه رأس مثلث ABC روی یک دایره محیطی قرار دارند که مرکز آن دایره، محل برخورد عمود منصف اضلاع است.



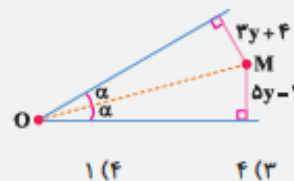
نیمساز



مجموعه نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است.

نکته هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس: $M \text{ روی نیمساز زاویه} \Leftrightarrow MH_1 = MH_2$

تست با توجه به شکل مقابل، مقدار y کدام است؟

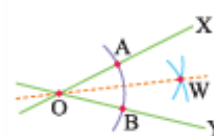


۲ با توجه به شکل، پاره‌خط OM نیمساز است و هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

$$5y - 2 = 3y + 4 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

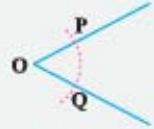
ترسیم نیمساز

برای ترسیم نیمساز زاویه XOY مطابق شکل، ابتدا به مرکز O کمائی می‌زنیم تا اضلاع OX و OY را در نقاط A و B قطع کند. حال دهانه پرگار را کمی بیش از نصف طول AB باز کرده و یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B



B کمائی می‌زنیم تا همدیگر را در نقطه W قطع کنند و سپس با استفاده از خط‌کش خط OW را رسم می‌کنیم. خط OW همان نیمساز است.

تست در شکل زیر، $PQ = 3$ است. می‌خواهیم نیمساز زاویه O را رسم کنیم. برای این کار می‌توانیم دهانه پرگار را به اندازه $5 - 2x$ باز کنیم تا دو کمان دیگر را رسم کنیم. x چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟



- (۱) هیچ
(۲) یک
(۳) دو
(۴) سه

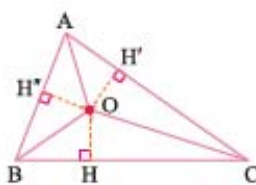
۲ باید دهانه پرگار از نصف PQ بیش‌تر باز شود، پس:



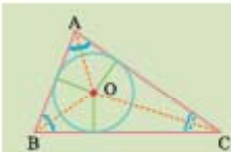
$$\begin{aligned} 5 - 2x > \frac{PQ}{2} &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow 2x < 5 - \frac{3}{2} &= \frac{7}{2} \Rightarrow x < \frac{7}{4} \end{aligned}$$

تنها عدد طبیعی در این بازه $x = 1$ است.

برخورد نیمسازها در مثلث و دایره محاطی



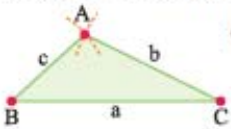
در هر مثلث، نیمسازهای داخلی هم‌رس هستند و نقطه هم‌رسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است [پون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است] یعنی در مثلث زیر $OH = OH' = OH''$ است.



نتیجه محل برخورد نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث ABC، مرکز دایره محاطی مثلث است.

ترسیم مثلث

برای رسم مثلثی که اضلاع آن a, b, c باشد، ابتدا پاره‌خطی مانند BC به طول a رسم می‌کنیم سپس دهانه پرگار را یک‌بار به اندازه b باز کرده و به مرکز C کمائی می‌زنیم و بار دیگر دهانه پرگار را به اندازه c باز کرده و به مرکز B کمائی می‌زنیم. اگر این کمان‌ها همدیگر را قطع کنند محل تلاقی آن‌ها، رأس A از مثلث ABC است.



نتیجه برای این که مثلثی با اضلاع a, b, c قابل رسم باشد، باید همواره رابطه زیر بین آن‌ها برقرار باشد: طول ضلع بزرگ‌تر > مجموع دو ضلع کوچک‌تر

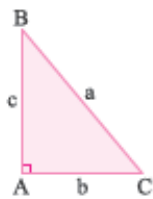
تست اگر اضلاع $x+3, x+1, 2x+1$ و 7 سه ضلع مثلث باشند، x چند مقدار طبیعی خواهد داشت؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳ طبق نامساوی مثلثی، مجموع اندازه دو ضلع مثلث، از ضلع سوم بزرگ‌تر است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2x + 1 + 7 > x + 3 \Rightarrow x > -5 \\ x + 3 + 7 > 2x + 1 \Rightarrow x < 9 \\ 2x + 1 + x + 3 > 7 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

از اشتراک سه بازه به دست آمده، محدوده x برابر $1 < x < 9$ می‌شود و تعداد اعداد طبیعی در این بازه برابر ۷ عدد است.



در مثلث مقابل، اگر $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، آن گاه
 $a^2 = b^2 + c^2$ و بر عکس.

قضایای دو شرطی را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند و به صورت اگر p آن گاه q و بر عکس یا p اگر و تنها اگر q می‌خوانند.
 قضیه فیثاغورس را می‌توان به صورت «مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$ » نیز خواند.

روش‌های اثبات قضایا

- اثبات مستقیم:** در این روش، از فرض قضیه، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم. اثبات‌هایی که با روش استدلال استنتاجی انجام شوند، از این دسته هستند. مثل اثبات قضیه تالس.
- برهان خلف (اثبات غیر مستقیم):** نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسه از آن استفاده می‌کنیم. در برهان خلف به جای این‌که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
 - فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (برهان خلف)
 - فرض خلف را ساده می‌کنیم تا به یک تناقض و یا نتیجه غیرممکن برسیم.
 - به این ترتیب فرض خلف، باطل و در نتیجه ثابت می‌شود که حکم نمی‌تواند نادرست باشد.

مثال فرض کنید n یک عدد طبیعی و n^2 عددی فرد است؛ ثابت کنید n نیز فرد است.

فرض می‌کنیم n فرد نیست [فرض خلف] پس باید زوج باشد؛ یعنی $n = 2k$ حال باید ببینیم زوج فرض کردن n چه پیامدهای زیان‌باری به دنبال خواهد داشت؛

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \times \frac{2k^2}{1} = 2k'^2 = 2 \text{ زوج}$$

همان طور که می‌بینید به این نتیجه رسیدیم که n^2 زوج است در حالی که مسئله فرض کرده بود که n^2 فرد است یعنی به نتیجه‌ای خلاف فرض مسئله رسیدیم و این غیرممکن است؛ بنابراین n نمی‌تواند زوج باشد، پس فرد است.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی غلط است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال برای هر کدام از احکام کلی و نادرست زیر یک مثال نقض ذکر کنید.
 الف) به ازای هر عدد طبیعی زوج n ، عدد $2^n + 1$ عددی اول است.
 ب) عبارت $n^2 + n + 41$ به ازای همه n ها اول است.
 الف) مثال نقض: $n = 6$
 ب) مثال نقض: $n = 41$

تذکر اگر نتوانیم برای یک حکم کلی به سادگی مثال نقض پیدا کنیم دلیلی بر درستی آن حکم کلی نیست.

استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است، یعنی با بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود. [در این استدلال، از جزء به کل می‌رسیم].
 مثلاً، اگر با بررسی و مشاهده مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع به این نتیجه کلی برسیم که مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی 360° است، از استدلال استقرایی استفاده کرده‌ایم.

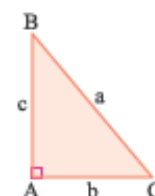
استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم [این حقایق، همان اصول و قضیه‌های ریاضی هستند].
 مثلاً، اگر قطر یک چهارضلعی را رسم کنیم، دو مثلث به وجود می‌آید. می‌دانیم مجموعه زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است، پس مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی دو برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث یعنی 360° است.
 اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند.
 مثلاً احکام کلی زیر را در نظر بگیرید.

- توان دوم هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر از توان سوم آن است.
 - مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° است.
- حکم کلی «توان دوم هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر از توان سوم آن است.» یک حکم کلی نادرست است اما حکم کلی «مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° است.» یک حکم کلی درست است.

قضیه

برخی نتایج مهم و پرکاربرد را که با استدلال استنتاجی ثابت می‌شوند، قضیه می‌نامند. مثلاً قضیه تالس، قضیه فیثاغورس و ...

اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می‌شود عکس قضیه گفته می‌شود [عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد].



عکس قضیه فیثاغورس: «در مثلث ABC، اگر $a^2 = b^2 + c^2$ باشد، آن گاه $\hat{A} = 90^\circ$ خواهد بود.»

گزاره‌های شرطی

اگر گزاره خبری به صورت شرطی بیان شود آن را گزاره شرطی می‌نامند. در گزاره شرطی، جمله اول بعد از اگر را فرض و جمله دوم را حکم می‌نامند. مثلاً، اگر در یک مثلث، دوزلع برابر باشند آن گاه دو زاویه مجاور به دو ضلع نیز برابر هستند.
 اگر در یک گزاره شرطی جای فرض و حکم عوض شود. به گزاره به دست آمده عکس گزاره شرطی گفته می‌شود.
 مثلاً، اگر در یک مثلث، دو زاویه مجاور به دو ضلع برابر باشند، آن گاه، آن دو ضلع نیز برابرند.
 اگر یک گزاره شرطی و عکس آن هر دو درست باشند، آن را قضیه دو شرطی می‌نامند.

تفصیل نسبت در صورت و مخرج

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

مثلاً در تناسب زیر، از خاصیت تفصیل نسبت در مخرج استفاده شده است:

$$\frac{a}{6+a} = \frac{3b}{2+3b} \Rightarrow \frac{a}{6+a-a} = \frac{3b}{2+3b-3b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{3b}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 9$$

تست اگر $\frac{a+2b}{2a+b} = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۲)	۴ (۱)
$\frac{2}{3}$ (۴)	$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ از خاصیت طرفین وسطین استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a+2b}{2a+b} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(a+2b) = 2(2a+b) \Rightarrow 3a+6b = 4a+2b$$

$$\Rightarrow a = 4b \Rightarrow \frac{a}{b} = 4$$

نسبت و تناسب

اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ در این صورت این تساوی را یک تناسب می‌نامند. در تناسب به اعداد a و d ، طرفین و به اعداد b و c ، وسطین تناسب گفته می‌شود. ویژگی‌های تناسب به صورت زیر است:

۱ طرفین وسطین

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

۲ معکوس کردن دو طرف

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ تعویض جای طرفین و وسطین

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

۴ ترکیب صورت‌ها و مخرج‌ها

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

۵ ترکیب نسبت در صورت و مخرج

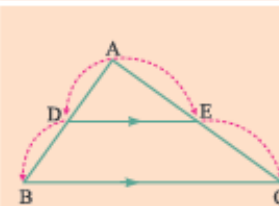
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

درس قضیه تالس و ویژگی‌های آن

قضیه تالس

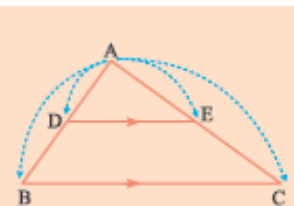
اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط جدا می‌کند که اندازه آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهد.

تالس جزء به جزء



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

تالس جزء به کل



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

نکته در مسائلی که صحبت از پاره خط DE است، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

تست در شکل زیر $BC \parallel DE$ است. مقدار $x+y$ کدام است؟



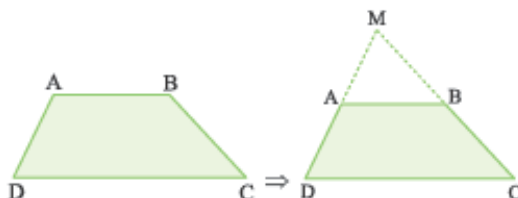
۳ با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{y}{y+7} = \frac{1}{16} \Rightarrow x=6, y=7$$

پس $x+y = 6+7 = 13$ است.

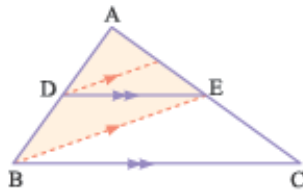
در مسائلی که گفته می‌شود یک چهارضلعی دوزنقه است، باید به موازی بودن قاعده‌های آن توجه کنیم. اگر ساق‌های این دوزنقه را امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، مثلثی ایجاد می‌شود که در آن قضیه تالس برقرار است.



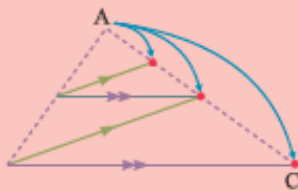
W - تالس و مقاومت معادل

در بعضی از سؤالات مربوط به تالس در مثلث‌ها، بیش از دو خط موازی وجود دارد. دو حالت معروف این مسائل به صورت زیر است:

1 اگر در مثلث، دو جفت خط موازی طوری رسم شوند که شکلی شبیه حرف W ایجاد شود، باید یک بار قضیه تالس را در مثلث ABE و یک بار هم در مثلث ABC بنویسیم.



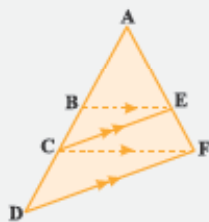
نکته اگر از رأس A به رأس W وصل کنیم، رابطه زیر برقرار است:



$$(\text{فلش بزرگ}) \times (\text{فلش کوچک}) = (\text{فلش متوسط})$$

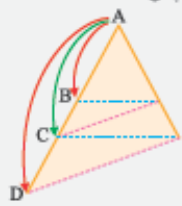
تست در شکل زیر $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ است، اگر $AB = 5$ و

$BC = 3$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟



- (۱) ۴/۵
(۲) ۴/۸
(۳) ۵/۴
(۴) ۶/۵

۲ در شکل مقابل یک W - تالس دیده می‌شود، پس:

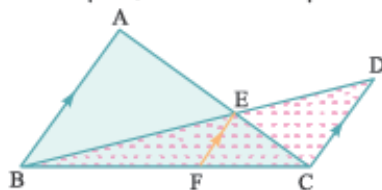


$$\Rightarrow AC^2 = AB \times AD \Rightarrow 8^2 = 5 \times AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{64}{5} = 12.8 \Rightarrow 8 + CD = 12.8 \Rightarrow CD = 4.8$$

۲ اگر دو مثلث در وضعیتی مانند شکل زیر قرار گیرند، باید یک بار قضیه

تالس را در مثلث ABC و یک بار هم در مثلث BCD بنویسیم.



نکته طول پاره خط EF از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

این رابطه مشابه رابطه مقاومت معادل در مدارهای الکتریکی است.

تست اندازه اضلاع دوزنقه ABCD مطابق شکل زیر داده شده است.

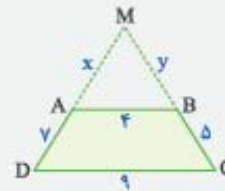
محیط مثلث MAB کدام است؟

(داخل - ۹۹)



- (۱) ۱۳/۲
(۲) ۱۳/۶
(۳) ۱۴/۴
(۴) ۱۴/۸

۲ با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث MDC داریم:



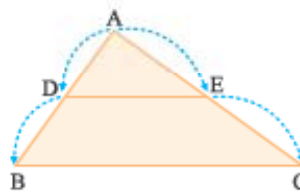
$$\Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 5/6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$4 + 4 + 5/6 = 13/6$$

پس محیط مثلث MAB برابر است با:

عکس قضیه تالس

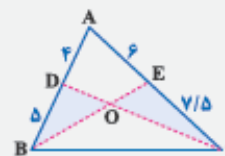
اگر خطی روی دو ضلع مثلث، چهار پاره خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

تست در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث

OCE کدام است؟



$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

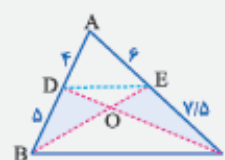
$$1 \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (3)$$

۴ با توجه به این که طول پاره خط‌های اضلاع مشخص است، نسبت

آنها را بررسی می‌کنیم. چون $\frac{AD}{BD} = \frac{4}{5}$ و $\frac{AE}{EC} = \frac{6}{7/5} = \frac{4}{5}$

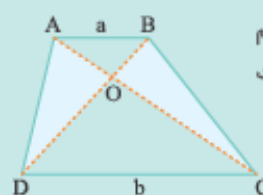
است، پس طبق عکس قضیه تالس $DE \parallel BC$ است.



پس چهارضلعی DEBC دوزنقه است

و مساحت محدود بین دو قطر و ساق

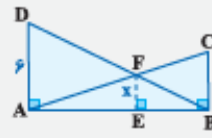
با هم برابرند.



توجه اگر قطرهای یک دوزنقه را رسم

کنیم، آنگاه مثلث‌های رنگی هم مساحت

هستند

تست در شکل زیر اندازه x کدام است؟


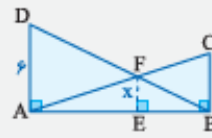
$$2/2 \quad (1)$$

$$2/4 \quad (2)$$

$$2/8 \quad (3)$$

$$3/25 \quad (4)$$

۲ با توجه به شکل رابطه $\frac{1}{FE} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}$ برقرار است، پس:



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{24}{10} = 2.4$$

تست در شکل زیر خطوط d_1 و d_2 موازی اند. با توجه به مقادیر داده شده روی شکل، اندازه x کدام است؟


$$1/5 \quad (1)$$

$$2 + \sqrt{2} \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

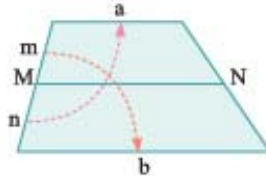
$$4 \quad (4)$$

۴ طبق نتایج تالس در خطوط موازی و مورب، چهار پاره خط ایجاد شده متناسب هستند، یعنی:

$$\frac{3}{x} = \frac{x+2}{8} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x+2}{8} \Rightarrow 3 \cdot 8 = x(x+2) \Rightarrow 24 = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

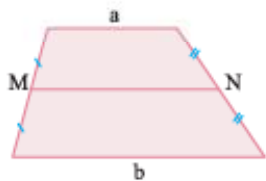
اگر در یک دوزنقه پاره خطی موازی دو قاعده رسم شود، نکات زیر قابل نتیجه گیری است:

۱ در حالت کلی:



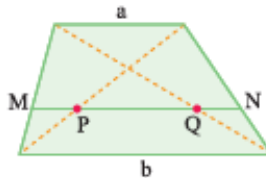
$$MN = \frac{na + mb}{n + m}$$

۲ اگر MN وسط های دو ساق را به هم وصل کند:

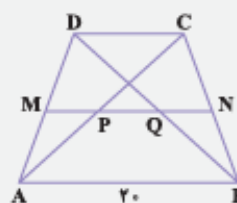


$$MN = \frac{a + b}{2}$$

۳ اگر دو قطر دوزنقه را رسم کنیم:



$$PQ = \frac{b - a}{2}$$

تست در دوزنقه زیر، پاره خط MN در وسط ساق ها موازی دو قاعده رسم شده است و $AB = 20$ و $CD = 8$ است. طول پاره خط PQ چقدر است؟


$$5 \quad (1)$$

$$5/5 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

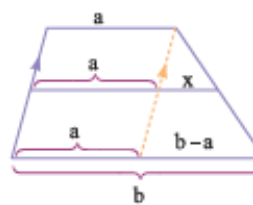
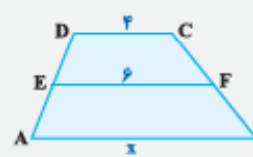
$$7 \quad (4)$$

۳ چون پاره خط MN در وسط ساق ها رسم شده و همچنین دو قطر دوزنقه رسم شده است، پس طول پاره خط PQ برابر است با:

$$PQ = \frac{AB - CD}{2} = \frac{20 - 8}{2} = 6$$

۲ اگر پاره خطی موازی قاعده های

دوزنقه رسم شود، برای به دست آوردن طول این پاره خط می توانیم از یک رأس دوزنقه خطی موازی یکی از ساق ها رسم کنیم و قضیه تالس را در مثلث ایجاد شده بنویسیم.


تست در شکل زیر $AB \parallel EF \parallel CD$ و $CF = 2BF$ و $CD = 4$ و $EF = 6$ است. اندازه x کدام است؟


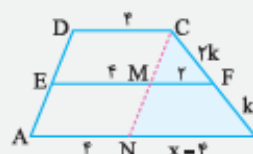
$$6 \quad (1)$$

$$6/5 \quad (2)$$

$$7 \quad (3)$$

$$7/5 \quad (4)$$

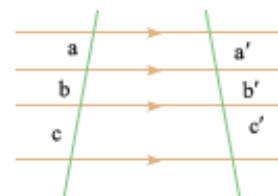
۳ از رأس C خطی به موازات ساق AD رسم می کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث CNB داریم:



$$\frac{MF}{NB} = \frac{CF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{x-4} = \frac{2k}{3k} \Rightarrow \frac{2}{x-4} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 7$$

تالس در خطوط موازی و مورب و دوزنقه

۱ اگر دو خط مورب، چند خط موازی را قطع کنند، پاره خط های ایجاد شده دارای نسبت های یکسان هستند. (این موضوع با استفاده از قضیه تالس قابل نتیجه گیری است.)

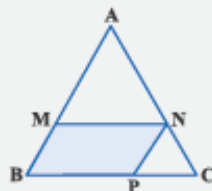


$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

برای حل سریع سؤالاتی که نسبت دو ضلع مثلث داده می‌شود و نسبت مساحت‌ها را می‌خواهند، می‌توانیم مثلث را متساوی‌الاضلاع فرض کنیم. سپس نسبت داده‌شده را معادل طول اضلاع فرض کنیم؛ مثلاً اگر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ است، فرض می‌کنیم $MA = 3$ و $MB = 2$ می‌باشد.

تست در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع

MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ (خارج - ۹۰)



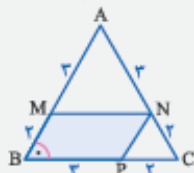
۴۸ (۱)

۵۲ (۲)

۵۴ (۳)

۵۶ (۴)

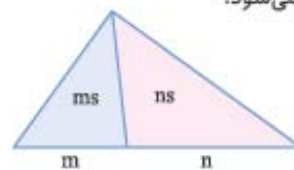
۱ چون نسبت اضلاع را داده و نسبت مساحت‌ها را می‌خواهد، فرض می‌کنیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و داریم:



$$\frac{S_{MNPB}}{S_{ABC}} = \frac{3 \times 2 \times \sin B}{\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin B} = \frac{12}{4.5} = \frac{48}{100}$$

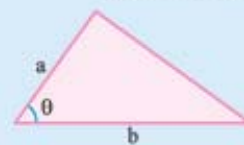
ترکیب مساحت و قضیه تالس

اگر خطی قاعده مثلث را به نسبت m و n تقسیم کند، مساحت دو مثلث ایجاد شده نیز به همین نسبت تقسیم می‌شود.

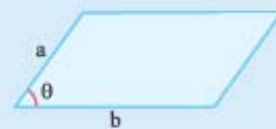


(این موضوع، مهم‌ترین نکته برای حل مسائل مربوط به مساحت است.)

تذکر اگر در یک مثلث یا متوازی‌الاضلاع، اندازه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها مشخص باشد، مساحت آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$



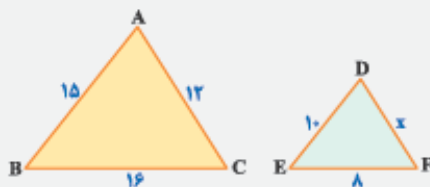
$$\Rightarrow S = ab \sin \theta$$

تشابه مثلث‌ها

درس

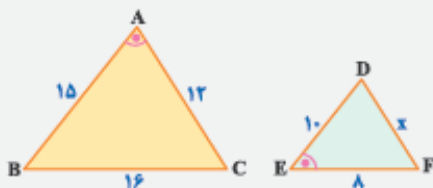
توجه کنید اگر نسبت تشابه برابر k باشد، $\frac{1}{k}$ نیز نسبت تشابه است. مثلاً اگر اضلاع مثلث ABC، برابر اضلاع مثلث $A'B'C'$ باشند، می‌توانیم بگوییم اضلاع مثلث $A'B'C'$ برابر اضلاع مثلث ABC است.

تست دو مثلث ABC و DEF متشابه‌اند. اندازه x چقدر است؟



$$\frac{32}{3} \quad (4) \quad \frac{25}{3} \quad (3) \quad 12 \quad (2) \quad 9 \quad (1)$$

۴ در دو مثلث متشابه ABC و EDF داریم:

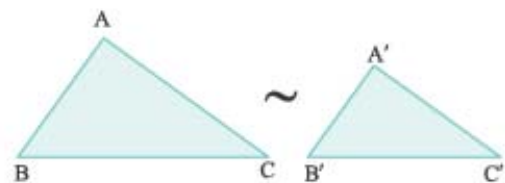


$$\frac{EF}{AC} = \frac{ED}{AB} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \hat{A} = \hat{E}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{ED}{AB} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{10}{15} \Rightarrow x = \frac{32}{3}$$

تشابه دو مثلث

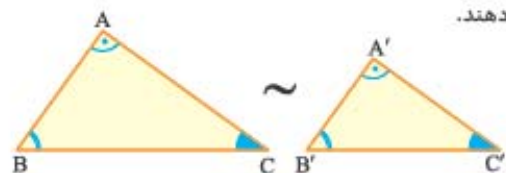
وقتی دو مثلث متشابه‌اند که دارای زاویه‌های برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد.



$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

به نسبت اضلاع متناظر دو مثلث نسبت تشابه می‌گویند و آن را معمولاً با k نشان می‌دهند.



$$\Rightarrow k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

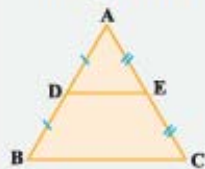
نسبت پاره‌خط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

هرگاه دو مثلث متشابه باشند، آن‌گاه:

 ۱ نسبت ارتفاع، میانه، نیمساز، محیط و ... برابر با نسبت تشابه، یعنی k است.

 ۲ نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با مربع نسبت تشابه، یعنی k^2 است.

تست در شکل زیر $AD = DB$ و $AE = EC$ می‌باشد، اگر مساحت

 مثلث ADE برابر ۶ واحد باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟


۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۳۰ (۳)

۳۶ (۴)


 ۲ چون $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ است، پس طبق

 عکس قضیه تالس $DE \parallel BC$ می‌باشد.

 هم چنین مطابق شکل، مثلث‌های ABC و ADE متشابه‌اند، در نتیجه:

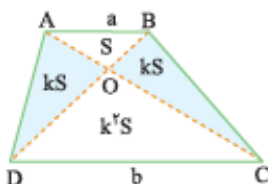
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{k}{k+k}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 24$$

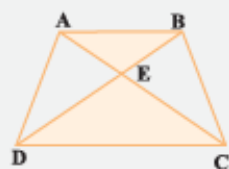
دوزنقه و مساحت

اگر قطره‌های یک دوزنقه را رسم کنیم، آن‌گاه:

 ۱ مثلث‌های AOB و COD متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{b}{a} = k$ است.

۲ مثلث‌های کناری هم مساحت هستند.


تست در دوزنقه زیر، اگر $CD = 4AB$ و مساحت ناحیه رنگی برابر

 ۶۸ واحد مربع باشد، مساحت مثلث BEC چقدر است؟


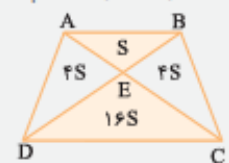
۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۶ (۳)

۲۰ (۴)

 ۳ چون $CD = 4AB$ است، پس نسبت تشابه دو مثلث CDE و

 ABE برابر $k = 4$ است. بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم:


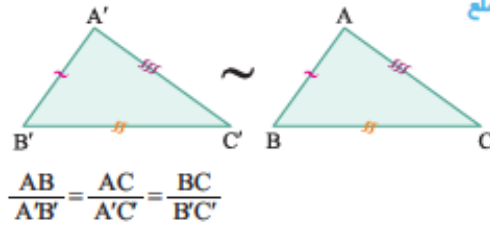
$$\Rightarrow S + 16S = 68 \Rightarrow 17S = 68 \Rightarrow S = 4$$

 پس مساحت مثلث BEC برابر ۱۶ است.

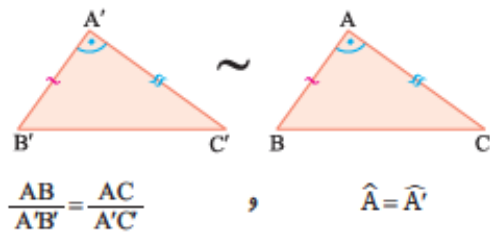
قضیه‌های تشابه

 دو مثلث در حالت‌های زیر متشابه‌اند: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

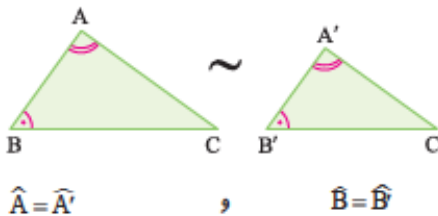
۱ تناسب سه ضلع



۲ تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین

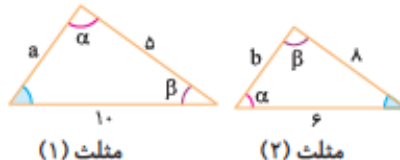


۳ تساوی دو زاویه



نحوه نوشتن نسبت تشابه

وقتی می‌دانیم دو مثلث متشابه‌اند، برای نوشتن نسبت تشابه، ۳ خط کسری را برابر هم قرار می‌دهیم. سپس اضلاع یکی از مثلث‌ها را (مثلاً مثلث (۱)) در صورت کسرها می‌نویسیم. حال اضلاع مثلث دیگر را طوری در مخرج کسرها می‌نویسیم که اضلاع روبه‌روی زاویه α در دو مثلث زیر هم باشند، اضلاع روبه‌روی زاویه β نیز زیر هم و ... [به زبان ساده‌تر، اضلاع کوچک‌تر دو مثلث در یک کسر، اضلاع متوسط در یک کسر و اضلاع بزرگ‌تر در یک کسر قرار گیرند].



$$\frac{10}{8} = \frac{a}{6} = \frac{b}{b}$$

تست مثلثی با اضلاع ۷ و ۸ و ۴ با مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۲۵ و ۶

 متشابه است. x کدام است؟

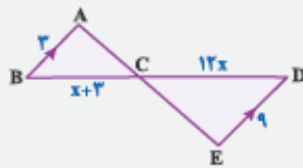
۱) ۵/۷۵ ۲) ۶/۷۵ ۳) ۴/۷۵ ۴) ۷/۷۵

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{25} = \frac{7}{x-1} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{8}{25} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{8}{25} \Rightarrow x = \frac{23}{4} = 5.75$$

۱

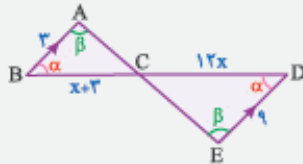
$$4x - 2 = 21 \Rightarrow 4x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{4} = 5.75$$

تست در شکل زیر $AB \parallel DE$ است. مقدار x کدام است؟



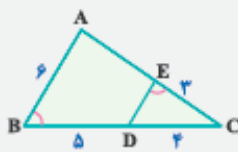
- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۱ مطابق شکل مثلث‌های ABC و CDE متشابه‌اند، پس:



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{x+3}{12x} \Rightarrow x = 1$$

تست در شکل زیر $\widehat{ABC} = \widehat{DEC}$ است. اندازه DE کدام است؟



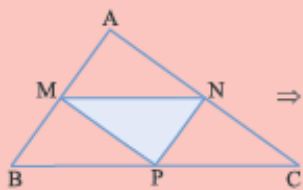
- ۲ (۱)
۳ (۲)
۴ (۳)
۵ (۴)

۱ مثلث‌های ABC و DEC با دو زاویه برابر متشابه‌اند، پس:



$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{4+5} \Rightarrow x = 2$$

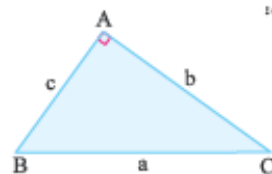
نکته اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، طبق عکس قضیه تالس، اضلاع مثلث ایجادشده موازی اضلاع مثلث اصلی است. بنابراین هر یک از ۴ مثلث ایجادشده، با نسبت تشابه $\frac{1}{4}$ با مثلث اصلی متشابه هستند.



$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP \sim \triangle AMN \sim \dots$$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

طبق رابطه فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، همواره مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع زاویه قائمه است:



$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

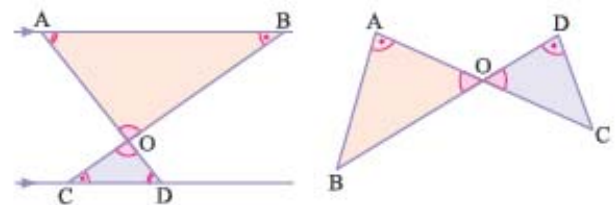
عکس این قضیه نیز برقرار است، یعنی اگر در مثلثی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، این مثلث در رأس $\hat{A}$ قائمه است.

حالت‌های معروف برای دو مثلث متشابه

۱ **بال‌های پروانه:** دو مثلث که از رأس به هم چسبیده‌اند و شکلی شبیه بال‌های پروانه ایجاد می‌کنند، در حالت‌های زیر متشابه‌اند:

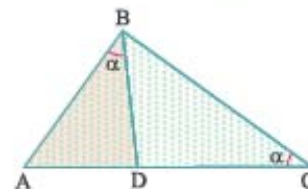
$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

بال‌های پروانه با یک زاویه مشترک



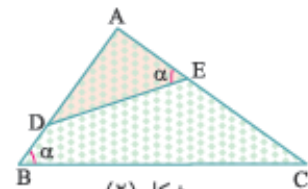
۲ **مثلث گوشه‌گیر:** یک مثلث در گوشه‌ای از مثلث دیگر، طوری قرار می‌گیرد که مثلث اصلی و مثلث گوشه‌گیر دارای یک زاویه مشترک و یک زاویه برابر باشند. [مثلث‌ها در رأس مشترک‌اند].

• رسم خطی از رأس به ضلع مقابل



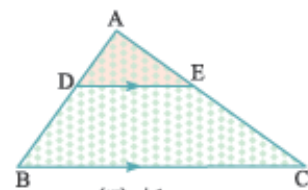
شکل (۱)

• رسم خط غیرموازی با قاعده مثلث



شکل (۲)

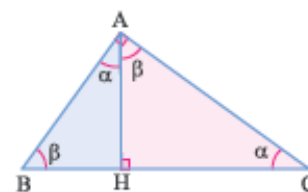
• رسم خط موازی با قاعده مثلث



شکل (۳)

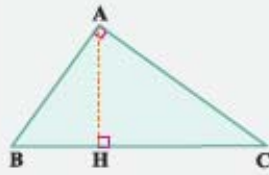
تذکر به شکل (۳) دقت کنید. اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، مثلث ایجادشده طبق قضیه اساسی تشابه قطعاً با مثلث اصلی متشابه‌است.

۳ **رسم ارتفاع در مثلث قائم‌الزاویه:** در هر مثلث قائم‌الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، سه مثلث متشابه به وجود می‌آید:



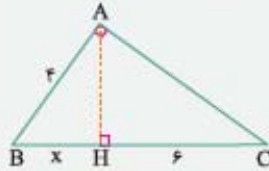
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$$

تست در مثلث زیر، $AB=4$ و $CH=6$ است. مجموع طول ضلع AC و طول ارتفاع AH کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) $5\sqrt{3}$
(۳) $6\sqrt{3}$
(۴) $8\sqrt{3}$

۳ ابتدا باید طول پاره خط BH را پیدا کنیم:



$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 4^2 = x(x+6)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x - 16}{(x-2)(x+8)} = 0 \Rightarrow x = BH = 2$$

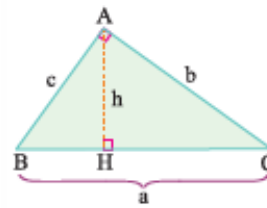
حال طول ضلع AC و ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم:

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow AC^2 = 6 \times 8 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 2 \times 6 = 12 \Rightarrow AH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

پس $AC + AH = 6\sqrt{3}$ است.

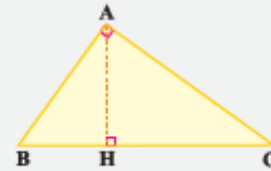
تذکر برای حل سریع‌تر سؤالات، اعداد فیثاغورسی $(3, 4, 5)$ و $(5, 12, 13)$ و $(8, 15, 17)$ را حفظ باشید.



در مثلث قائم‌الزاویه، برای به دست آوردن ارتفاع وارد بر وتر می‌توانیم مساحت را از دو رابطه محاسبه کنیم و آن‌ها را برابر هم قرار دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{2} b \times c \\ S = \frac{1}{2} a \times h \end{cases} \Rightarrow a \times h = b \times c \Rightarrow h = \frac{b \times c}{a}$$

تست در شکل زیر، $AB=3$ و $BC=5$ است. ارتفاع AH کدام است؟

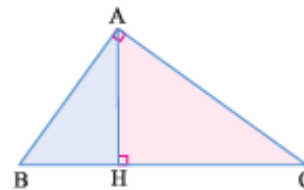


- (۱) $2/4$
(۲) $2/8$
(۳) 3
(۴) $3/2$

۱ چون وتر مثلث برابر $BC=5$ یکی از اضلاع قائم برابر $AB=3$ است، پس با توجه به اعداد فیثاغورسی معروف، $AC=4$ است. بنابراین طول ارتفاع AH برابر است با:

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = 2/4$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، سه مثلث متشابه به وجود می‌آید:



$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$$

۱ از تشابه مثلث‌های ABH و ACH نتیجه می‌گیریم:

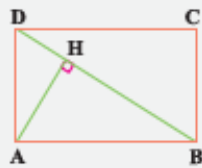
$$AH^2 = BH \times CH$$

۲ از تشابه مثلث ABC با هر یک از مثلث‌های کوچک‌تر، نتیجه می‌گیریم:

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

تست در مستطیل زیر به طول $BC=10$ از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $DH=2\sqrt{5}$ باشد، طول قطر مستطیل کدام است؟



- (۱) $8\sqrt{5}$
(۲) $9\sqrt{5}$
(۳) $10\sqrt{5}$
(۴) $12\sqrt{5}$

۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$AD^2 = DH \times BD \Rightarrow 10^2 = 2\sqrt{5} \times BD \Rightarrow BD = \frac{100}{2\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}$$

یادداشت:

هندسه تحلیلی

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: برای خواندن این فصل دانستن معادله خط، فاصله دو نقطه و فاصله نقطه از خط کافیست.

توصیه: تست‌های این فصل معمولاً ساختار مشخصی در کنکور دارند، بنابراین تست‌های سال‌های گذشته و مدل‌های معروف را به خوبی تمرین کنید.

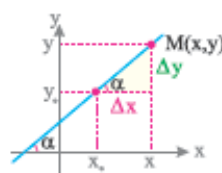
کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۱	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲

هندسه مختصاتی (تحلیلی)

درس

معادله خط و شیب خط

اگر خط d از نقطه $A(x_1, y_1)$ بگذرد و با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد، آن‌گاه با توجه به شکل می‌توانیم شیب خط d را به صورت زیر به دست آوریم:



$$\Rightarrow m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

معادله خط d به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال معادله خط گذرنده از نقطه $(1, 2)$ با شیب $\frac{-3}{5}$ را به دست آورید.

$$y - 2 = \frac{-3}{5}(x - 1) \Rightarrow 5y - 10 = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 5y - 13 = 0$$

اگر معادله خط d را مرتب کنیم آن‌گاه به معادله‌ای به شکل زیر می‌رسیم:

$$ax + by + c = 0$$

مثال ۱ اگر معادله d به صورت $7x + 12y = 4$ باشد شیب این خط را به دست آورید.

$$7x + 12y = 4 \Rightarrow 12y = -7x + 4 \Rightarrow y = -\frac{7}{12}x + \frac{4}{12}$$

مثال ۲ با توجه به شکل معادله خط AB را بنویسید.



با توجه به شکل، زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، برابر با 60° است. در ضمن این خط از نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ می‌گذرد. پس معادله این خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{3}) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 1$$

تذکر برای پیدا کردن محل برخورد یک خط با محورهای مختصات به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ اگر خط d محور x را در نقطه A قطع کند، برای یافتن مختصات نقطه A کافیست که در معادله خط، y را مساوی صفر قرار دهیم.

۲ اگر خط d محور y را در نقطه B قطع کند، برای یافتن مختصات نقطه B کافی است که در معادله خط، x را مساوی صفر قرار دهیم.

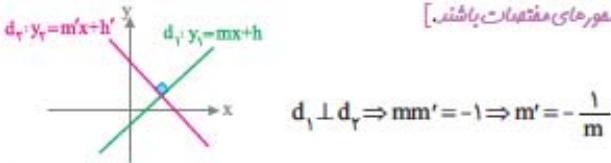
مثلاً خط به معادله $3x - 4y = 24$ محور x را در نقطه A و محور y را در نقطه B قطع کرده است. در این صورت مختصات A و B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_A = 0 \Rightarrow 3x_A = 24 \Rightarrow x_A = 8 \Rightarrow A(8, 0)$$

$$x_B = 0 \Rightarrow -4y_B = 24 \Rightarrow y_B = -6 \Rightarrow B(0, -6)$$

در حالت کلی می‌توان گفت که خط‌های $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ با هم موازی‌اند و برعکس.

اگر دو خط برهم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها -1 است؛ یعنی شیب‌ها قرینه و معکوس یک‌دیگر هستند. [البته این فقط برای موازی معروض‌های متفاوت باشد.]



تذکره اگر دو خط باهم موازی یا برهم عمود نباشند، متقاطع غیرعمود هستند.

تست اگر دو خط L_1, L_2 مطابق شکل زیر بر یک‌دیگر عمود باشند، معادله خط L_1 کدام است؟

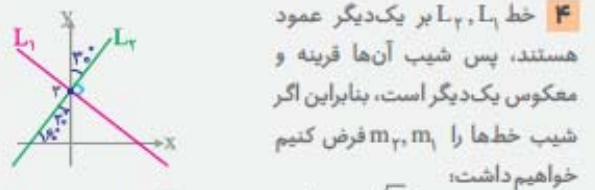


$$3y + \sqrt{3}x = 3 \quad (1)$$

$$3y - \sqrt{3}x = 9 \quad (2)$$

$$3y - \sqrt{3}x = 3 \quad (3)$$

$$3y + \sqrt{3}x = 9 \quad (4)$$

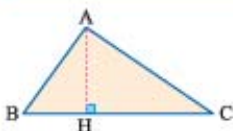


۴ خط L_1, L_2 بر یک‌دیگر عمود هستند، پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یک‌دیگر است، بنابراین اگر شیب خط‌ها را m_1, m_2 فرض کنیم خواهیم داشت:

$$m_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$L_1 \text{ معادله } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 \Rightarrow 3y + \sqrt{3}x = 9$$

نوشتن معادله ارتفاع AH



در مثلث ABC، برای نوشتن معادله ارتفاع AH به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مثلاً نقاط $A(3, 5)$ ، $B(-2, 3)$ و $C(1, 0)$ سه رأس مثلثی هستند. معادله ارتفاع AH را به دست آورید.

۱ شیب خط BC را به دست می‌آوریم.

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3 - 0}{-2 - 1} = -1$$

۲ شیب خط BC را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب خط AH به دست آید.

$$m_{AH} = -\frac{1}{-1} = 1$$

۳ معادله ارتفاع AH را با داشتن مختصات نقطه A و شیب AH می‌نویسیم.

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 1(x - 3) \Rightarrow y - x = 2$$

تست سه ضلع مثلث ABC به معادلات $AB: 2y - x = 3$ ، $BC: 2y + 3x = 6$ ، $AC: y - 2x = 5$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟

$$9y - 6x = 17 \quad (2)$$

$$6y - 4x = 15 \quad (1)$$

$$3y + 2x = 9 \quad (4)$$

$$3y - 2x = 7 \quad (3)$$

تست مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های

$$y + x = 2 \text{ و } 2y - x = 4 \text{ و ضلع دیگر آن بر محور } x \text{ ها قرار دارد، کدام است؟}$$

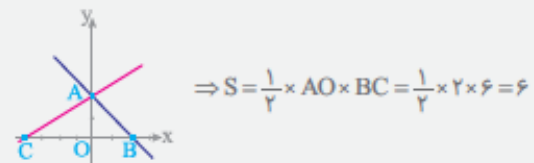
$$\Delta(1) \quad \Delta(2) \quad \Delta(3) \quad \Delta(4)$$

۲ ابتدا محل برخورد سه ضلع مثلث $(y = 0, 2y - x = 4, y + x = 2)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2y - x = 4 \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + 2 = -x + 2 \Rightarrow x = 0, y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 + x = 2 \Rightarrow x = 2, y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow 2(0) - x = 4 \Rightarrow x = -4, y = 0 \Rightarrow C(-4, 0)$$



اگر معادله دو خط متقاطع داده شده باشد و بخواهیم مختصات نقطه تقاطع دو خط را پیدا کنیم، کافیست که دو معادله را در یک دستگاه بنویسیم و جواب دستگاه را به دست آوریم. جواب این دستگاه همان مختصات نقطه تقاطع است.

مثلاً دو خط $2x - y = 3$ و $3x + 5y = 11$ متقاطع‌اند، زیرا شیب‌های آن‌ها با هم برابر نیست. برای پیدا کردن مختصات نقطه تقاطع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 10x - 5y = 15 \end{cases} \Rightarrow 13x = 26$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$$

تست به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادله‌های $y + 2x = 0$ ، $y + 3x = a$ ، $2y + ax + 5 = 0$

در یک نقطه متقاطع هستند؟

$$\Delta(1) \quad \Delta(2) \quad \Delta(3) \quad \Delta(4) \text{ هیچ مقدار}$$

۴ برای این‌که سه خط در یک نقطه متقاطع باشند، کافیست دو

تا از خط‌ها را تقاطع دهیم و نقطه به دست آمده را در خط سوم صدق

دهیم. برای این منظور ابتدا خط‌های $2x - y = 3$ و $y = -3x + a$ را تقاطع

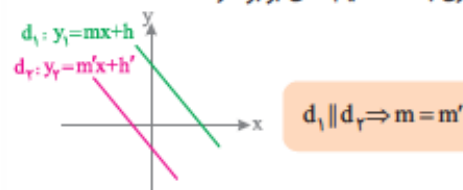
می‌دهیم و نقطه به دست آمده را در خط $2y + ax + 5 = 0$ صدق می‌دهیم:

$$-2x = -3x + a \Rightarrow x = a \xrightarrow{y = -3x + a} A(a, -2a) \xrightarrow{2y + ax + 5 = 0}$$

$$a^2 - 4a + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ جواب ندارد}$$

شرط موازی بودن و عمود بودن دو خط

اگر دو خط باهم موازی باشند، شیب‌های برابر دارند.



نکته اگر دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ با هم موازی باشند،

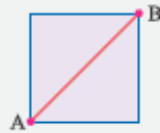
$$m = m' \Rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

آن‌گاه:

مثال ۱ فاصله دو نقطه $A(-1, 3)$ و $B(2, -1)$ را به دست آورید.

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} \\ = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

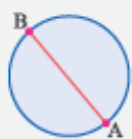
مثال ۲ اگر $A(2, 5)$ و $B(4, 3)$ مختصات دو رأس غیرمجاور یک



مربع باشند، مساحت مربع را به دست آورید. ابتدا اندازه قطر مربع را مشخص کرده و سپس مساحت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$AB = d = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$



مثال ۳ اگر $A(6, 2)$ و $B(2, 5)$ مختصات دو سر

قطر دایره باشند، محیط دایره را به دست آورید. ابتدا طول قطر را مشخص کرده، سپس مقدار محیط را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(6 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow 2r = 5 \Rightarrow$$

$$\text{محیط} = 2\pi r = 5\pi$$

مثال ۴ اگر $A(m, 2)$ و $B(-1, 5)$ باشد، کمترین فاصله این دو نقطه

از هم چقدر است؟

$$AB = \sqrt{(m+1)^2 + (2-5)^2} = \text{Min} \frac{(m+1)^2}{2} \Rightarrow \text{Min} AB = \sqrt{0+9} = 3$$

فاصله دو نقطه هم‌طول یا هم‌عرض

۱ اگر عرض نقاط A و B با هم برابر باشند، آنگاه اندازه پاره خط AB

برابر است با:

$$A(x_A, b), B(x_B, b) \Rightarrow AB = |x_A - x_B|$$

مثال اگر $A(5, 8)$ و $B(-2, 8)$ آنگاه، اندازه پاره خط AB را بنویسید.

$$AB = 5 - (-2) = 7$$

۲ اگر طول نقاط A و B با هم برابر باشند، آنگاه اندازه پاره خط AB

برابر است با:

$$A(a, y_A), B(a, y_B) \Rightarrow AB = |y_A - y_B|$$

مثال اگر $A(3, 7)$ و $B(3, 9)$ آنگاه اندازه پاره خط AB را بنویسید.

$$AB = 9 - 7 = 2$$

تست نقطه $(a, 2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$

است. شعاع این دایره کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (3) \quad 3\sqrt{2} \quad (4)$$

۱ باید فاصله نقطه $(a, 2a)$ از دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ برابر باشد.

پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2}$$

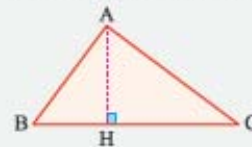
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 5a^2 - 8a + 5 = 5a^2 - 14a + 17 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

پس مختصات مرکز دایره $(2, 4)$ خواهد بود و فاصله این نقطه از هر کدام از دو نقطه داده شده، برابر شعاع است. از آنجایی که نقاط $(2, 4)$ و $(-1, 4)$ هم‌عرض هستند، پس فاصله آن‌ها برابر $3 = 2 - (-1) = r$ است.

۲ ابتدا نقطه A یعنی محل برخورد ضلع‌های AB و AC را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

حال شیب خط BC را قرینه و عکس می‌کنیم تا شیب AH به دست آید:



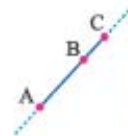
$$\Rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AH} = \frac{4}{3}$$

بنابراین معادله AH برابر است با:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}(x + \frac{1}{3}) \Rightarrow 3y - 1 = 4x + \frac{4}{3} \Rightarrow 9y - 3 = 4x + 4 \Rightarrow 9y - 4x = 7$$

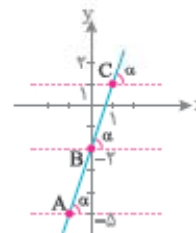
سه نقطه در یک راستا

اگر سه نقطه A, B, C روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از هر دو نقطه دلخواه به دست می‌آید، باهم برابر است؛ یعنی:



$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

مثلاً نقاط $A(-1, -5), B(0, -2), C(1, 1)$ روی یک خط راست واقع هستند، زیرا:



$$m_{AB} = \frac{-2 - (-5)}{0 - (-1)} = 3$$

$$m_{BC} = \frac{1 - (-2)}{1 - 0} = 3$$

$$m_{AC} = \frac{1 - (-5)}{1 - (-1)} = \frac{6}{2} = 3$$

تست اگر نقاط $A(2, 4), B(a, 5), C(2-a, 1)$ روی یک خط باشند،

مقدار a کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

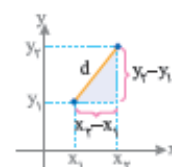
۳ شرط لازم و کافی برای این که نقاط A, B, C روی یک خط راست باشند، آن است که شیب پاره‌خط‌های AB و AC برابر باشد:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{5-4}{a-2} = \frac{1}{a-2} \\ m_{AC} = \frac{1-4}{(2-a)-2} = \frac{-3}{-a} = \frac{3}{a} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_{AB}=m_{AC}} \frac{1}{a-2} = \frac{3}{a} \Rightarrow 3a - 6 = a \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

فاصله دو نقطه

برای به دست آوردن فاصله بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:



$$\Rightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

تعیین نوع مثلث

اگر مختصات رأس‌های یک مثلث را داشته باشیم، برای تعیین نوع مثلث باید ابتدا طول اضلاع مثلث را به دست آوریم. سپس با توجه به طول اضلاع با سه حالت زیر مواجه می‌شویم:

- ۱ اگر فقط طول دو ضلع با هم برابر باشد، مثلث، متساوی‌الساقین است.
- ۲ اگر طول هر سه ضلع با هم برابر باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.
- ۳ برای تشخیص قائم‌الزاویه بودن مثلث، باید رابطه فیثاغورس را بین اضلاع بررسی کنیم.

تست نقاط $C(4, -4), B(3, 5), A(-1, 0)$ سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث کدام است؟

هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الساقین

۲) متساوی‌الاضلاع

۳) قائم‌الزاویه

۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۴ مختصات رئوس داده شده، بنابراین ابتدا طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$AC = \sqrt{(-1-4)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

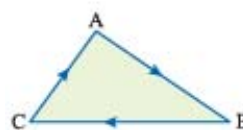
$$BC = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$

چون طول اضلاع AB و AC برابر است، مثلث، متساوی‌الساقین است. هم‌چنین رابطه فیثاغورس میان اضلاع آن برقرار است، پس

$$(\sqrt{41})^2 + (\sqrt{41})^2 = (\sqrt{82})^2$$

مثلث قائم‌الزاویه نیز هست:

مساحت مثلث



در هر مثلث دلخواه، با داشتن مختصات رئوس، می‌توانیم مساحت مثلث را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

تذکر برای نوشتن رابطه فوق کافیت، روی اضلاع مثلث، فلش‌هایی مثلاً در جهت ساعتگرد مشخص کنیم. سپس x هر رأس را در تفاضل y های دو رأس بعدی (در جهت فلش‌ها) ضرب و در نهایت این عبارت‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال مساحت مثلث زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} |2(0-0) + 5(0-3) + 1(3-0)| = \frac{1}{2} |-15 + 3| = 6$$

تست اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $x+y=0$,

$y = -2x + 2$, $y = x + 1$ هستند. مساحت مثلث کدام است؟

$$\frac{25}{12} \quad (4) \quad \frac{7}{12} \quad (3) \quad \frac{25}{6} \quad (2) \quad \frac{7}{6} \quad (1)$$

۴ محل برخورد دویه‌دوی خط‌ها را می‌یابیم تا مختصات رئوس

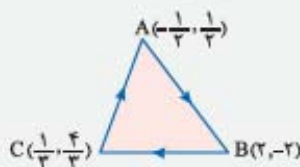
مثلث به دست آید:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow B(2, -2)$$

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$$

حال به کمک مختصات رئوس، مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:



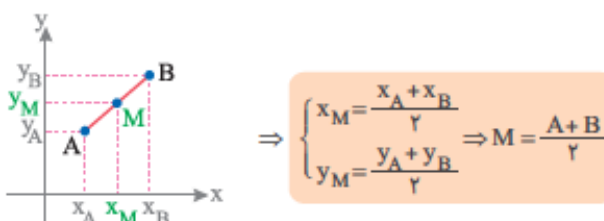
$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |(-\frac{1}{2})(-2 - \frac{4}{3}) + 2(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 2)|$$

$$= \frac{1}{2} |\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{6}| = \frac{1}{2} \times \frac{25}{6} = \frac{25}{12}$$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط و قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، طول نقطه M برابر میانگین طول‌های نقاط A و B ، و عرض نقطه M ، برابر میانگین عرض‌های نقاط A و B است:

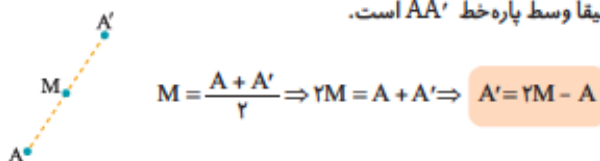


مثال اگر نقطه M وسط دو نقطه $A(3, -4)$ و $B(7, 6)$ باشد،

مختصات نقطه M را به دست آورید.

$$M(\frac{3+7}{2}, \frac{-4+6}{2}) \Rightarrow M(5, 1)$$

اگر قرینه نقطه A نسبت به نقطه M را نقطه A' بنامیم، آنگاه نقطه M ، دقیقاً وسط پاره خط AA' است.



مثلاً مختصات قرینه نقطه $A(2, 3)$ نسبت به نقطه $B(4, 1)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2B - A \Rightarrow A' = (8, 2) - (2, 3) \Rightarrow A'(6, -1)$$

تست نقاط $A(2, -1)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 1)$ سه رأس مثلث هستند.

طول میانه CM کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۴
(۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱ ابتدا مختصات نقطه M که وسط نقاط A و B قرار دارد را به دست می آوریم:

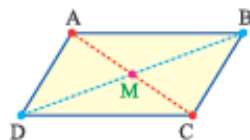
$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2} \right) = (1, 0)$$

حالا فاصله بین دو نقطه M(1, 0) و C(-1, 1) را به دست می آوریم:

$$CM = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع

می دانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می کنند؛ یعنی نقطه M هم وسط پاره خط AC است و هم وسط پاره خط BD. بنابراین:



$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$

به عبارت دیگر مختصات نقطه M، محل برخورد قطرها، برابر است با:

$$M(x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right)$$

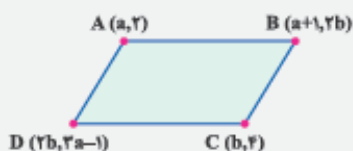
مربع، مستطیل و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع هستند.

از عبارت بالا می توان نتیجه گرفت در هر متوازی‌الاضلاع همواره رابطه $A+C=B+D$ برقرار است، به عبارت دیگر مجموع طول ها و عرض های دو سر قطر کوچک هر متوازی‌الاضلاع با مجموع طول ها و عرض های دو سر قطر بزرگ آن برابر است:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

تست در متوازی‌الاضلاع زیر، مقدار $a+b$ کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۶

(۴) ۷

۲ مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابر است:

$$1) x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow a + b = (a+1) + 2b \Rightarrow b = -1$$

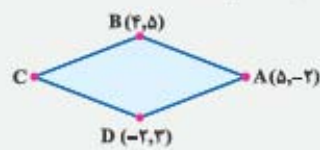
$$2) y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 4 = 2b + 2a - 1 \Rightarrow 2b + 2a = 7$$

با جای گذاری $b = -1$ در معادله (۲)، مقدار $a = 3$ به دست می آید،

$$a + b = 3 - 1 = 2$$

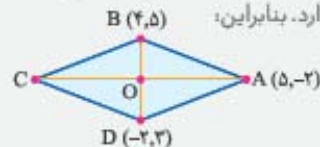
بنابراین:

تست در شکل زیر مختصات رأس C کدام است؟



- (۱) $(-4, 6)$
(۲) $(-3, 6)$
(۳) $(-4, 2)$
(۴) $(-3, 10)$

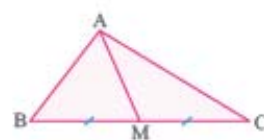
۴ رأس C قرینه نقطه A نسبت به O (نقطه تقاطع قطرهای لوزی) است. می دانیم که قطرهای لوزی یکدیگر را نصف می کنند پس نقطه O وسط رأس های B, D قرار دارد. بنابراین:



$$O = \frac{B+D}{2} \Rightarrow O = \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (1, 4)$$

$$O = \frac{A+C}{2} \Rightarrow C = 2O - A \Rightarrow C = (2, 8) - (5, -2) = (-3, 10)$$

میانه



در یک مثلث، پاره خطی که یک رأس را به نقطه وسط ضلع مقابل متصل می کند، میانه نام دارد. در شکل مقابل پاره خط AM میانه وارد بر ضلع BC است.

برای به دست آوردن طول میانه AM ابتدا مختصات نقطه وسط ضلع BC را تعیین می کنیم سپس با کمک رابطه فاصله دو نقطه، طول میانه AM را به دست آوریم.

مثال در مثلثی با رئوس $A(3, 5)$, $B(-2, 3)$, $C(1, 0)$ طول میانه AM را به دست آورید.

$$M = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3+0}{2} \right) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

اگر بخواهیم معادله خط گذرنده از میانه AM را به دست آوریم، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

نوشتن معادله میانه AM

مثال در مثلثی با رئوس $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 1)$ معادله میانه AM را به دست آورید.

(۱) ابتدا مختصات نقطه وسط ضلع BC را به دست می آوریم.

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (1, 0)$$

(۲) شیب پاره خط AM را به دست می آوریم.

$$m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

(۳) معادله پاره خط AM را به کمک نقطه A و m_{AM} می نویسیم.

[می توانیم از نقطه M نیز استفاده کنیم]

$$y - (1) = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - (-1)) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خطی به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تذکر برای استفاده از این رابطه، باید تمام جملات معادله خط را به یک طرف تساوی ببریم و طرف دیگر صفر باشد.

مثال فاصله نقطه $A(1, 4)$ از خط $y = \frac{3}{4}x + 2$ را به دست آورید.

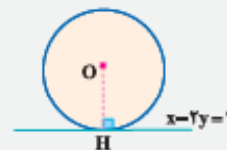
ابتدا معادله خط را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$y = \frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow 4y = 3x + 8 \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$$

حالا می‌توانیم فاصله نقطه A از این خط را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{|(3 \times 1) - (4 \times 4) + 8|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

تست در شکل مقابل، مرکز دایره روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. اگر شعاع دایره برابر $\sqrt{5}$ باشد، طول مرکز دایره کدام می‌تواند باشد؟



- ۱ (۴)
۲ (۶)
۳ (-۱)
۴ (-۳)

۱ می‌دانیم که فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر با اندازه شعاع دایره است، یعنی فاصله نقطه O از خط $x - 2y - 1 = 0$ برابر $\sqrt{5}$ است. نقطه O روی نیمساز ربع اول و سوم و در نتیجه مختصات آن به صورت (α, α) است، بنابراین:

$$r = OH = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|1 + \alpha|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |1 + \alpha| = 5 \Rightarrow 1 + \alpha = \pm 5 \Rightarrow \alpha = 4, \alpha = -6$$

با توجه به گزینه‌ها $\alpha = 4$ جواب صحیح است، چون $\alpha = -6$ در گزینه‌ها نیست.

یافتن فاصله نقطه از خطوط خاص

فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ از محورهای مختصات یا خطوط موازی محورهای مختصات، به صورت زیر به دست می‌آید:

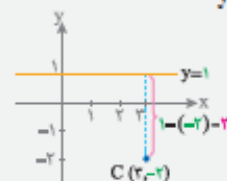
فاصله از خط $x = a$: $|\alpha - a|$

فاصله از خط $y = b$: $|\beta - b|$

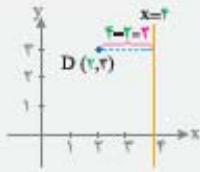
فاصله از محور ox : $|\beta|$

فاصله از محور oy : $|\alpha|$

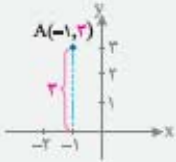
مثال ۱ فاصله نقطه $C(3, -2)$ از خط $y = 1$



مثال ۲ فاصله نقطه $D(2, 3)$ از خط $x = 4$



مثال ۳ فاصله نقطه $A(-1, 3)$ از محور x ها



مثال ۴ فاصله نقطه $B(-2, -1)$ از محور y ها

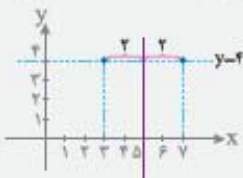


تست فاصله نقطه $A(a, 4)$ از خط $x = 5$ برابر ۲ است. مجموع

مقادیر a کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

۴ فاصله نقطه $A(a, 4)$ از خط $x = 5$ برابر با $|a - 5|$ است، بنابراین:



$$|a - 5| = 2 \Rightarrow a - 5 = \pm 2$$

$$\Rightarrow a = 7, a = 3$$

پس مجموع مقادیر a برابر $7 + 3 = 10$ است.

به دست آوردن طول ارتفاع AH

مثال در مثلثی با رئوس $A(3, 5), B(-2, 3), C(1, 0)$ اندازه ارتفاع AH را به دست آورید.

۱ ابتدا معادله خط گذرنده از رأس‌های C, B را به دست می‌آوریم.

$$m_{BC} = \frac{3 - 0}{-2 - 1} = -1 \Rightarrow \text{معادله خط } BC: y - 0 = (-1)(x - 1)$$

$$\Rightarrow y + x - 1 = 0$$

۲ فاصله نقطه A از خط BC برابر طول ارتفاع AH است.

$$AH = \frac{|1 + 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

تست مثلثی با رأس‌های $A(1, 5), B(7, 3), C(2, -2)$ مفروض است.

اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC کدام است؟ (داخل-۹۹)

- ۱ (۴) ۲ (۳\sqrt{2}) ۳ (۵) ۴ (4\sqrt{2})

۴ معادله خط گذرنده از ضلع BC را می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{3 - (-2)}{7 - 2} = 1 \Rightarrow \text{معادله خط } BC: y - (-2) = x - 2 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

حال فاصله نقطه $A(1, 5)$ از خط $x - y - 4 = 0$ را به دست می‌آوریم تا طول ارتفاع AH به دست آید:

$$AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

تست اگر $A(1,0)$ ، نقطه B واقع بر نیمساز ربع دوم و طول پاره خط

AB برابر $\sqrt{5}$ باشد، مختصات نقطه B کدام است؟

$$(1, -2) \quad (2, -1) \quad (3, -1) \quad (4, -2) \quad (1, 2) \quad (2, 1) \quad (3, 1) \quad (4, 2)$$

۲ با فرض این که طول نقطه B برابر a است، داریم:

$$x = a \xrightarrow{\text{نیمساز ربع دوم}} y = -a \Rightarrow B(a, -a)$$

پس طول پاره خط AB برابر است با:

$$\sqrt{(a-1)^2 + (-a-0)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow 2a^2 - 2a + 1 = 5$$

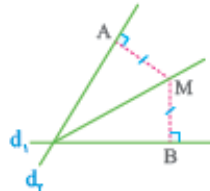
$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

پس فاصله هر دو نقطه $(-1, 1)$ ، $(2, -2)$ از نقطه $A(1, 0)$ برابر با $\sqrt{5}$ است. دقت کنید نقطه $(2, -2)$ روی نیمساز ربع چهارم قرار دارد و در نتیجه قابل قبول نیست.

نوشتن معادله نیمساز زاویه

اگر معادله ضلع‌های یک زاویه را داشته باشیم، برای نوشتن معادله

نیمساز زاویه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱ نقطه‌ای مانند $M(x, y)$ به مختصات

روی نیمساز در نظر می‌گیریم.

۲ با توجه به این که فاصله هر نقطه روی

نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک اندازه است،

معادله $|AM| = |BM|$ را تشکیل می‌دهیم

و ساده می‌کنیم.

تست معادله نیمساز زاویه حاصل از تقاطع دو خط $2x+3y=2$ و

$3x+2y=8$ کدام است؟

$$x-y=1 \quad (4) \quad x-y=3 \quad (3) \quad x+y=1 \quad (2) \quad x+y=2 \quad (1)$$

۱ می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع این

زاویه به یک فاصله است. بنابراین اگر نقطه $M(x, y)$ روی نیمساز

باشد خواهیم داشت:

$$\frac{|2x+3y-2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|3x+2y-8|}{\sqrt{9+4}} \Rightarrow 2x+3y-2 = \pm(3x+2y-8)$$

$$\begin{cases} d_1: 2x+3y-2 = 3x+2y-8 \Rightarrow d_1: x-y=6 \\ d_2: 2x+3y-2 = -3x-2y+8 \Rightarrow 5x+5y=10 \Rightarrow d_2: x+y=2 \end{cases}$$

d_1 و d_2 نیمسازهای دو زاویه حاصل از تقاطع دو خط داده شده

هستند که معادله خط d_2 در گزینه (۱) آمده است.

معادله عمود منصف

برای نوشتن معادله عمود منصف پاره خط AB به صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱ مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم.

۲ شیب پاره خط AB را پیدا می‌کنیم.

۳ شیب خط d عکس قرینه شیب AB است.

۴ با داشتن شیب خط d و نقطه M

معادله خط d را می‌نویسیم.

فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی $ax+by=c$ ، $ax+by=c'$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثلاً برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی $2x+y=3$ ، $4x+2y=5$ ،

ابتدا طرفین معادله $2x+y=3$ را در ۲ ضرب می‌کنیم. سپس معادله

$4x+2y=5$ را به صورت $4x+2y=5$ می‌نویسیم:

$$D_1: 2x+y=3 \xrightarrow{\times 2} 4x+2y=6$$

$$D_2: 4x+2y=5 \Rightarrow 4x+2y=5$$

بنابراین:

$$d = \frac{|6-5|}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

تست دایره‌ای بر دو خط به معادلات $y=\sqrt{3}x+2$ ، $\sqrt{3}y-3x+6=0$

مماس است، قطر دایره کدام است؟

$$\begin{aligned} D_1: & 2 - \sqrt{3} \quad (1) \\ & \sqrt{3} - 1 \quad (2) \\ D_2: & \sqrt{3} + 1 \quad (3) \\ & 2 + \sqrt{3} \quad (4) \end{aligned}$$

۳ دو خط داده شده موازی‌اند، ابتدا ضرایب x و y را یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \end{cases}$$

بنابراین فاصله دو خط برابر است با قطر دایره:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|C-C'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|6-(-2\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}} = \frac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \\ &= \frac{2(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

نقطه شناور

در بعضی از سؤالات، می‌خواهیم مختصات یک نقطه با ویژگی خاص که

روی خطی با معادله معلوم قرار دارد را پیدا کنیم یا معادله خطی را بیابیم

که ویژگی خاصی دارد:

اگر بخواهیم نقطه‌ای روی خطی با معادله معلوم پیدا کنیم، می‌توانیم طول

نقطه را مثلاً a در نظر بگیریم و با جای‌گذاری a به جای x در معادله خط

داده شده، y را بر حسب a به دست آوریم و سپس با اعمال ویژگی نقطه

مطلوب بر مختصات نقطه A ، مقدار a را حساب کرده و مختصات A را بیابیم.

مثلاً، نقطه A روی خط $y = 2x - 1$ است:

$$x_A = a \Rightarrow y_A = 2a - 1 \Rightarrow A(a, 2a - 1)$$

مثلاً می‌خواهیم نقطه‌ای مانند A روی خط $2x + 5y = 11$ پیدا کنیم که طولش

۲ واحد از عرضش بیشتر باشد. نقطه A روی این خط است. پس اگر

$x_A = a$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$2a + 5y_A = 11 \Rightarrow y_A = \frac{11-2a}{5}$$

$$x_A = y_A + 2 \Rightarrow a = \frac{11-2a}{5} + 2 \Rightarrow 5a = 11 - 2a + 10$$

$$\Rightarrow 7a = 21 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow A(3, 1)$$

$$m_{AC} = \frac{1 - (-1)}{-3 - (-1)} = -1 \Rightarrow m_{BH} = 1$$

$$BH \text{ معادله: } y - 3 = 1(x - 0) \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

حال نقطه وسط ضلع AC را به دست می‌آوریم و معادله عمود
منتصف آن را می‌نویسیم:

$$M = \left(\frac{-3 + (-1)}{2}, \frac{1 + (-1)}{2} \right) = (-2, 0)$$

$\Rightarrow AC$ معادله عمود منتصف: $y - 0 = 1(x + 2) \Rightarrow x - y + 2 = 0$
بنابراین فاصله ارتفاع BH و عمود منتصف AC برابر است با:

$$\frac{|3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

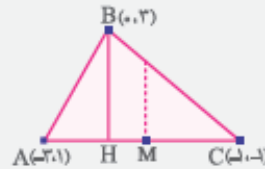
تست نقاط $A(-3, 1)$, $B(0, 3)$, $C(-1, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. فاصله عمود منتصف AC از ارتفاع BH کدام است؟

$$\sqrt{2} - 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

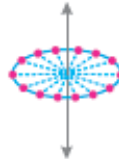


۳ برای نوشتن معادله ارتفاع BH ابتدا شیب خط AC را به دست می‌آوریم:

درس دوران و برش

دوران نقطه و خط حول یک محور

برای مشخص کردن شکلی که در اثر دوران یک نقطه حول یک محور پدید می‌آید، باید از آن نقطه عمودی بر محور دوران رسم کنیم، سپس این شعاع را به اندازه 360° درجه به‌طور عمود بر محور بچرخانیم. شکل حاصل، محیط دایره است.



اگر پاره‌خط AB را حول یک محور دوران دهیم، با توجه به وضعیت پاره‌خط AB و محور دوران، سطح‌های زیر ایجاد می‌شود:

برای حل سوالات این بخش، سطح جانبی و حجم چند شکل مهم که در دوران اشکال ممکن است مورد استفاده قرار گیرد، را یادآوری کنیم:

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$		حجم مخروط
$V = \pi R^2 h$		حجم استوانه
$V = \frac{4}{3} \pi R^3$		حجم کره
$S = \pi R L$		سطح جانبی مخروط قائم
$S = 2 \pi R h$		سطح جانبی استوانه
$S = \pi R^2$		سطح جانبی کره

وضعیت پاره‌خط AB و محور دوران	شکل حاصل از دوران	سطح حاصل از دوران
		سطح یک دایره
		سطح بین دو دایره
		سطح جانبی استوانه
		سطح مخروط ناقص
		سطح مخروط

دوران مثلث

از دوران مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائم، یک مخروط و حول وتر، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ضلع قائم			
وتر			

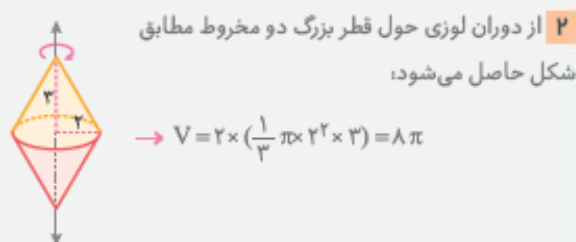
از دوران مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده، یک مخروط و حول قاعده، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده، حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ارتفاع وارد بر قاعده			
قاعده			

از دوران لوزی، حول قطر بزرگ یا قطر کوچک آن نیز دو مخروط از قاعده به هم چسبیده، پدید می‌آید.

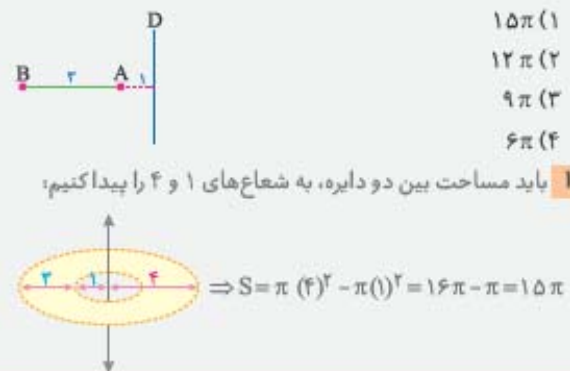
تست یک لوزی با طول قطرهای ۴ و ۶ را حول قطر بزرگ دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

- ۱) 4π ۲) 8π ۳) 12π ۴) 16π



تست مطابق شکل، امتداد پاره خط AB به طول ۳ عمود بر خط D است. اگر فاصله نقطه A تا خط D برابر ۱ باشد، از دوران AB حول D یک سطح حلقوی به وجود می‌آید. مساحت این سطح کدام است؟

- ۱) 15π ۲) 12π ۳) 9π ۴) 6π



دوران مربع و مستطیل حول یک محور

شکل حاصل از دوران یک مستطیل یا مربع، به محور دوران آن بستگی دارد که به صورت‌های زیر است:

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ضلع مربع یا مستطیل			
خطی موازی یک ضلع مربع یا مستطیل			
محور تقارن طول یا عرض مربع یا مستطیل			
قطر مربع			

تست اگر مربع به ضلع ۲ را حول یک ضلع دوران دهیم، شکل حاصل کدام است؟

- ۱) استوانه به ارتفاع ۴ ۲) استوانه به شعاع قاعده ۴
۳) استوانه به شعاع قاعده ۲ ۴) استوانه به ارتفاع ۸



دوران دایره، نیم‌دایره، ربع دایره

از دوران دایره و نیم‌دایره حول قطرهایشان، کره به‌وجود می‌آید.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
قطر			
قطر			

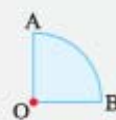
از دوران نیم‌دایره، حول محور تقارن و همچنین از دوران ربع‌دایره حول یکی از دو شعاع، نیم‌کره حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
محور تقارن			
شعاع			

از دوران دایره حول یک خط موازی با یکی از قطرهای آن، یک تونل استوانه‌ای (دونات) حاصل می‌شود.



تست یک ربع دایره مطابق شکل را حول پاره‌خط OA به طول ۳ دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟



- 22π (۱)
 18π (۲)
 14π (۳)
 12π (۴)



۲ از دوران ربع دایره حول یکی از شعاع‌ها، نیم‌کره به‌وجود می‌آید و حجم آن برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi$$

دوران دوزنقه

از دوران دوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق قائم و همچنین از دوران دوزنقه متساوی‌الساقین حول محور تقارن، مخروط ناقص حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ساق قائم (در دوزنقه قائم‌الزاویه)			
محور تقارن (در دوزنقه متساوی‌الساقین)			

تست یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده ۳ و ۵ و ساق قائم ۴ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. جسم حاصل کدام است؟

- ۱) مخروط قائم به شعاع قاعده ۵
 ۲) هرم قائم به شعاع قاعده ۵
 ۳) مخروط ناقص به ارتفاع ۴
 ۴) مخروط ناقص به شعاع قاعده ۴



۳ جسم حاصل یک مخروط ناقص به شعاع‌های قاعده ۳ و ۵ و ارتفاع ۴ است.

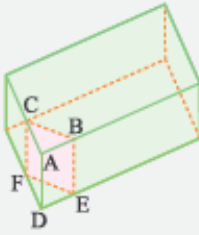
بُرش

منظور از بُرش، تقاطع دادن یک صفحه با یک جسم هندسی توپُر مانند کره توپُر، مخروط توپُر، استوانه توپُر و ... است و شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی توپُر حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود. سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، همواره یک دایره است.

نوع برش	برش مایل	برش قائم	برش افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	دایره	دایره	دایره

هرچه صفحه به مرکز نزدیک‌تر شود، دایره ایجاد شده نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس وقتی صفحه از مرکز کره بگذرد، دایره‌ای با بیش‌ترین مساحت ایجاد می‌شود.

۴ سطح مقطع حاصل، یک مستطیل است.



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 8 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$$

$$CF = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$$

برش استوانه

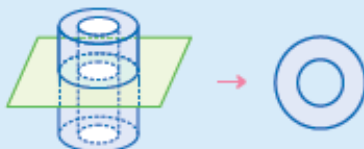
سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه‌های افقی، قائم و مایل به صورت زیر است:

نوع برش	مایل [هر دو قاعده را قطع نکند]	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	بیضی	مستطیل	دایره

در برش قائم، در حالتی که صفحه از وسط استوانه بگذرد، مستطیلی با بیش‌ترین مساحت ایجاد می‌شود. سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک نیم استوانه، به صورت شکل‌های زیر است:

نوع برش	مایل [هر دو قاعده را قطع نکند]	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	نیم بیضی	مستطیل	نیم دایره

تذکر در اثر برخورد صفحه‌ای موازی با استوانه توخالی، یک دایره توخالی پدید می‌آید:

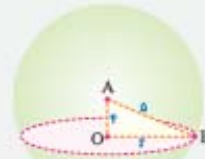


تست

یک کره چوبی توپر به شعاع ۵ واحد را با یک صفحه، به فاصله ۴ واحد از مرکز برش زده‌ایم. سطح مقطع حاصل چقدر است؟

- ۱) 4π ۲) 6π ۳) 7π ۴) 9π

۴ در مثلث قائم الزاویه مشخص شده، طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$5^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

بنابراین مساحت دایره ایجاد شده برابر

$$S = \pi r^2 = 9\pi$$

است با:

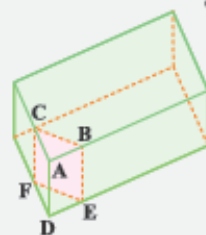
برش مکعب

نمونه‌هایی از برش افقی، قائم و مایل یک مکعب مستطیل به قاعده مربع که در کتاب درسی بحث شده، به صورت جدول زیر است:

نوع برش	نمایش برش	شکل حاصل از برش
برش قائم		مستطیل یا مربع
برش افقی		مستطیل
برش مایل		مثلث
		مستطیل
		مستطیل

تست

مکعب مستطیل مقابل به قاعده ۴ و ۸ واحد و ارتفاع $2\sqrt{2}$ واحد را مطابق شکل به طور عمودی طوری برش می‌زنیم که $AB = AC = 2$ شود. مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟



$$1) 4\sqrt{2}$$

$$2) 4$$

$$3) 8\sqrt{2}$$

$$4) 8$$

نوع برش	مایل	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	سهمی	دو زنگه	دایره

تست یک مخروط چوبی توپر به شعاع قاعده‌های ۱ و ۵ و مولد ۵ را توسط یک صفحه قائم که از مراکز قاعده‌های بالا و پایین می‌گذرد، برش زده‌ایم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟



- ۱) ۳۶
۲) ۲۴
۳) ۱۸
۴) ۱۲

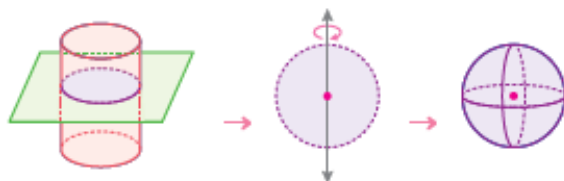
۳ قاعده‌های دو زنگه ۲ و ۱۰ و ساق آن ۵ است. چون دو زنگه متساوی‌الساقین است، با رسم دو ارتفاع به راحتی اندازه ارتفاع $h = ۳$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} (2 + 10) \times 3 = 18$$

ترکیب دوران و برش

در بعضی از سوالات، ابتدا یک جسم هندسی توپر، برش داده می‌شود و سپس سطح مقطع حاصل، حول یک محور خاص دوران داده می‌شود.

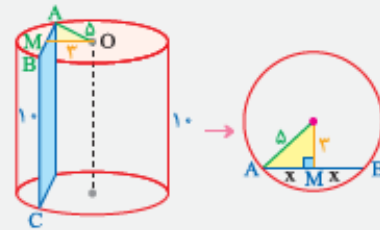
مثلاً اگر صفحه‌ای موازی با قاعده یک استوانه توپر، آن را قطع کند، سطح مقطع ایجاد شده دایره خواهد بود. سپس اگر این دایره را حول یکی از قطرهای آن دوران دهیم، یک کره پدید می‌آید:



در بعضی از سوالات، ابتدا یک شکل هندسی حول یک محور خاص دوران داده می‌شود و سپس شکل حاصل را با یک صفحه برش می‌دهند و سؤالی راجع به سطح مقطع حاصل پرسیده می‌شود.

تست یک استوانه توپر به ارتفاع ۱۰ واحد و شعاع قاعده ۵ واحد را در نظر بگیرید. این استوانه را با یک صفحه قائم که فاصله آن از مرکز قاعده ۳ واحد است، به طور عمودی برش می‌زنیم. مساحت مقطع ایجاد شده چقدر است؟

- ۱) ۴۰
۲) ۸۰
۳) ۳۰
۴) ۵۰
- ۲** سطح مقطع ایجاد شده، مستطیل است:



$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 2x = AB = 8$$

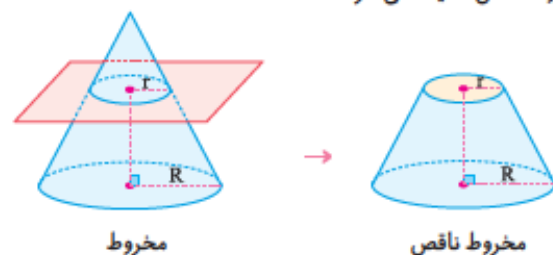
بنابراین مساحت مستطیل ABCD برابر $8 \times 10 = 80$ است.

برش مخروط

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک مخروط قائم، به صورت زیر است:

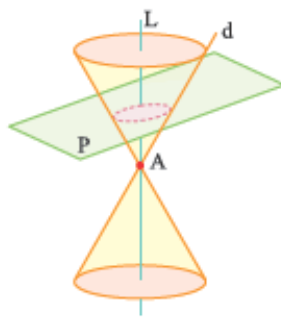
نوع برش	مایل	قائم گذرنده از رأس مخروط	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	سهمی	بیضی	مثلت

اگر مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعده آن قطع کنیم، مخروط به دو بخش تقسیم می‌شود که بخش بالایی و نوک تیز آن دوباره یک مخروط قائم است. بخش پایینی که هر دو قاعده آن دایره است، مخروط ناقص نامیده می‌شود.



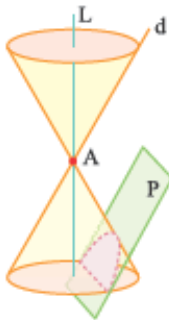
بیضی

صفحه P بر محور L عمود نبوده و غیرموازی با مولد d است.



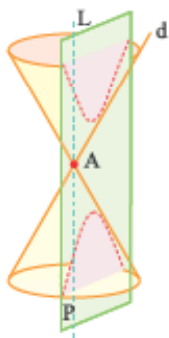
سهی

صفحه P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.



مذلولی

صفحه P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع می‌کند.



تذکر در حالتی که صفحه از رأس A عبور کند، ممکن است یک نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع ایجاد شود.

تست مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

(۱) موازی یک مولد

(۲) موازی محور

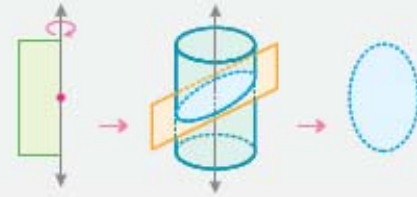
(۳) عمود بر یک مولد

(۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد

۱ اگر صفحه موازی با مولد مخروط، رویه مخروطی را قطع کند، سهی به وجود می‌آید.



مثال اگر یک مستطیل را حول ضلع بزرگ آن دوران دهیم، حجم حاصل یک استوانه خواهد بود. حال اگر این استوانه را با یک صفحه به طور مایل برش دهیم، سطح مقطع حاصل یک بیضی خواهد بود؛



تست مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ را حول طول آن دوران می‌دهیم. اگر حجم را با صفحه‌ای عمود بر طول این مستطیل برش دهیم، مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟



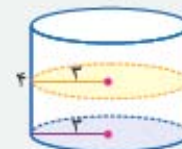
$$6\pi(2)$$

$$3\pi(1)$$

$$16\pi(4)$$

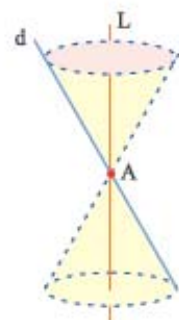
$$9\pi(3)$$

۳ شکل حاصل از دوران این مستطیل حول طول آن، یک استوانه به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۳ است. از طرفی، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه موازی با قاعده، یک دایره به شعاع ۳ است که مساحت آن برابر است با:



$$S = \pi R^2 = \pi (3)^2 = 9\pi$$

مقاطع مخروطی

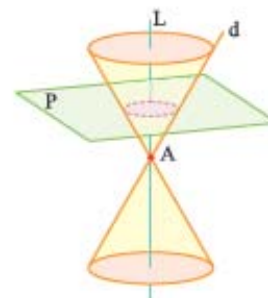


دو خط d و L را که در نقطه A مانند شکل متقاطع (غیر عمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط L ثابت باشد و خط d را حول خط L دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویه مخروطی [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط L را محور، خط d را مولد و نقطه A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم.

در اثر برخورد یک صفحه و سطح مخروطی، یک منحنی ایجاد می‌شود که به آن مقطع مخروطی می‌گویند. نوع مقطع ایجادشده، بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و L دارد که در زیر این حالات بررسی شده است:

۱ دایره

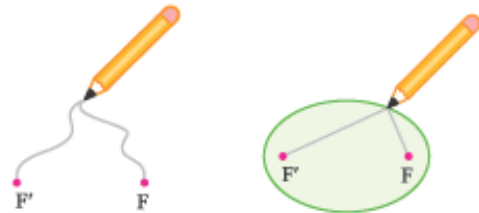
صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.



درس بیضی

تعریف بیضی

یک تکه نخ به طول $2a$ را در نظر می‌گیریم و یک سر آن را مطابق شکل در نقطه F و سر دیگر آن را در F' ثابت می‌کنیم، اگر یک مداد را همانند شکل داخل نخ کنیم و یک منحنی به‌گونه‌ای رسم کنیم که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد، شکل حاصل یک منحنی خواهد بود که بیضی نام دارد.



در واقع می‌توان گفت بیضی مجموعه‌ای نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت F و F' به نام کانون‌های بیضی همواره مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت همواره برابر با $2a$ است.

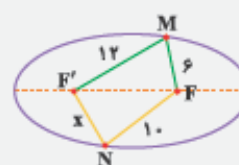


وضعیت نقطه و بیضی نسبت به هم

همان‌طور که گفتیم، اگر نقطه M روی یک بیضی باشد، مجموع فواصل آن از دو کانون بیضی، همواره برابر با $2a$ است. در حالت کلی نقطه دلخواه M می‌تواند روی بیضی، بیرون یا درون آن باشد:

M خارج بیضی	M روی بیضی	M درون بیضی
$MF + MF' > 2a$	$MF + MF' = 2a$	$MF + MF' < 2a$

تست در بیضی داده‌شده، F و F' کانون‌های بیضی هستند. مقدار x کدام است؟

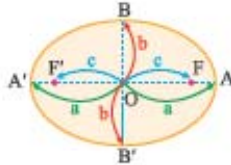


۲ M و N روی محیط بیضی قرار دارند. پس مجموع فواصل هر یک از آن‌ها از F و F' ثابت است.

$$MF + MF' = NF + NF' \Rightarrow 12 + 6 = x + 10 \Rightarrow x = 8$$

پارامترهای بیضی

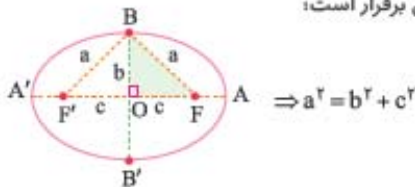
پاره خط AA' به طول $2a$ را قطر بزرگ بیضی، پاره خط BB' به طول $2b$ را قطر کوچک بیضی و پاره خط FF' به طول $2c$ را فاصله کانونی بیضی می‌نامند.



نقطه O مرکز بیضی نامیده می‌شود که وسط قطر بزرگ، قطر کوچک و دو کانون بیضی قرار دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$OA = OA' = a \quad OF = OF' = c \quad OB = OB' = b$$

فاصله نقطه B تا هر یک از کانون‌های بیضی، برابر a است. پس در مثلث OBF رابطه فیثاغورس برقرار است:



تذکر واضح است در هر بیضی، همواره قطر بزرگ از فاصله کانونی بزرگ‌تر است. پس:



تست در بیضی زیر با کانون‌های F و F' طول قطر کوچک برابر ۸ و محیط مثلث $MF'F$ برابر ۲۰ است. طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۳ می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی بیضی از کانون‌های F و F' برابر $2a$ است، پس محیط مثلث $MF'F$ برابر است با:

$$MF + MF' + FF' = 2a \Rightarrow a + c = 10$$

از طرفی طول قطر کوچک برابر $2b = 8$ است، پس:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 4^2 = (a + c)(a - c) \Rightarrow a - c = 1/6$$

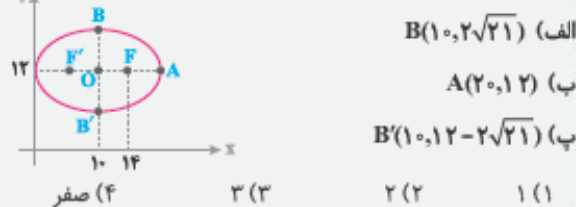
$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 10 \\ a - c = 1/6 \end{cases} \Rightarrow 2a = 11/6$$

حال با کمک رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ مقدار c را به دست می‌آوریم و مختصات کانون‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \begin{cases} F(2+3, 1) = (5, 1) \\ F'(2-3, 1) = (-1, 1) \end{cases}$$

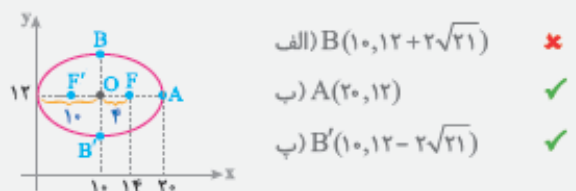
تست بیضی مقابل به مرکز $O(10, 12)$ بر محور y ها مماس است.

مختصات چه تعداد از نقاط آن به درستی آورده شده است؟

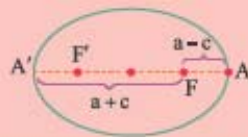


۲ مطابق شکل $a=10$ و $c=4$ است. پس:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \Rightarrow b = 2\sqrt{21}$$



نکته مطابق شکل، فاصله یک کانون از دورترین رأس بیضی برابر با $a+c$ و از نزدیک‌ترین رأس بیضی برابر با $a-c$ است.



تست در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین رأس بیضی برابر

۶ و اندازه قطر بزرگ ۸ است، اندازه قطر کوچک بیضی کدام است؟

$$۱) 2\sqrt{3} \quad ۲) 4\sqrt{3} \quad ۳) 3\sqrt{2} \quad ۴) 6$$

۲ فاصله یک کانون از دورترین رأس بیضی برابر $a+c$ و اندازه قطر

بزرگ $2a$ است، بنابراین:

$$۱) 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow c = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

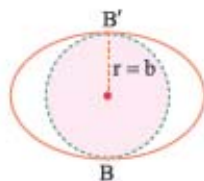
$$۲) a + c = 6$$

در نتیجه اندازه قطر کوچک بیضی برابر $2b = 4\sqrt{3}$ است.

شکل‌های محیط و محاط در بیضی

دایره‌ای که مرکز آن منطبق بر مرکز بیضی باشد، با توجه به اندازه شعاع دارای حالت‌های زیر است:

۱ اگر دایره‌ای در رأس‌های B و B' بر بیضی مماس شود، آن‌گاه شعاع دایره برابر $r = b$ است.



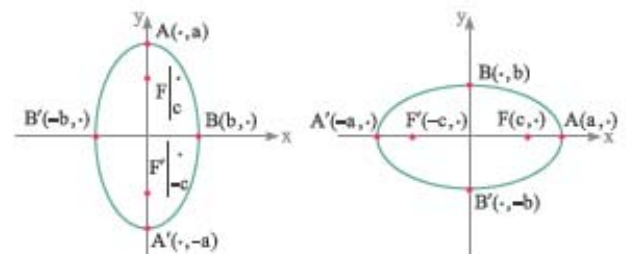
انواع بیضی

با توجه به وضعیت قرارگیری کانون‌های بیضی نسبت به هم، سه حالت داریم:



بیضی در دستگاه مختصات

اگر محورهای مختصات یک بیضی افقی یا قائم بر محورهای مختصات منطبق باشد، می‌توانیم مطابق شکل مختصات کانون‌ها و دو سر قطر بزرگ و کوچک را به راحتی مشخص کنیم:



مثال ۱ کانون‌های یک بیضی نقاط $(3, 0)$ و $(-5, 0)$ هستند و طول قطر بزرگ آن برابر ۱۰ است. مختصات دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.

چون دو نقطه $F(3, 0)$ و $F'(-5, 0)$ هم‌عرض هستند، پس بیضی افقی است و مختصات مرکز آن برابر است با:



از طرفی فاصله کانونی برابر ۸ و طول قطر بزرگ برابر ۱۰ است، پس $C=4$ و $a=5$ است و داریم:

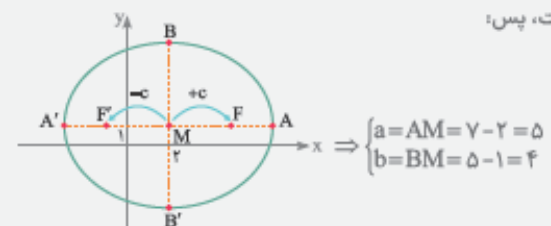
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

پس با توجه به شکل و مختصات مرکز، داریم:

$$A(4, 0), A'(-6, 0), B(0, 3), B'(0, -3)$$

مثال ۲ در یک بیضی نقطه $M(2, 1)$ مرکز بیضی، نقطه $A(7, 1)$ یک سر قطر بزرگ و نقطه $B(2, 5)$ یک سر قطر کوچک است. مختصات کانون‌های بیضی را به دست آورید.

فاصله مرکز بیضی تا نقطه A برابر a و فاصله آن تا نقطه B برابر b است، پس:



خروج از مرکز بیضی

نسبت $\frac{c}{a}$ در بیضی، خروج از مرکز نامیده می‌شود و آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

$$e = \frac{c}{a}$$

تذکره ۱ در هر بیضی همواره $0 < e < 1$ است، پس $0 < \frac{c}{a} < 1$ است.

تذکره ۲ خروج از مرکز یک بیضی، میزان کشیدگی آن را نشان می‌دهد.

هرچه $e = \frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر

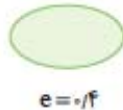
می‌شود و هرچه $e = \frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی

به دایره نزدیک‌تر خواهد شد. [اگر $e = 1$ باشد، بیضی به یک پارابول تبدیل

می‌شود و اگر $e = 0$ باشد، بیضی به یک دایره تبدیل می‌شود.]



$$e = 0$$



$$e = c/f$$



$$e = c/a$$

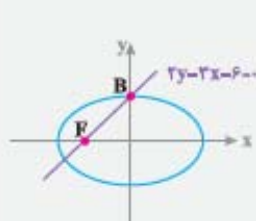


$$e = 1$$

نکته با داشتن نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ یعنی $\frac{b}{a}$ ، می‌توانیم خروج از مرکز بیضی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$c^2 + b^2 = a^2 \xrightarrow{+a^2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

تست در شکل مقابل، مبدأ مختصات مرکز بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$\frac{x^2}{\sqrt{26}} \quad (1)$$

$$\frac{y^2}{\sqrt{26}} \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{13}} \quad (3)$$

$$\frac{y^2}{\sqrt{13}} \quad (4)$$

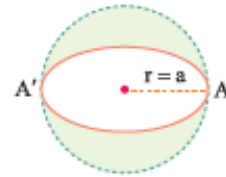
۳ رأس B با طول c و کانون F با عرض b روی خط قرار دارند:

$$B: x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow B(0, 3) \Rightarrow b=3, c=2$$

$$F: y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow F(-2, 0)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

۲ اگر دایره‌ای در رأس‌های A و A' بر بیضی مماس شود، آنگاه شعاع دایره برابر $r=a$ است.



۳ اگر دایره‌ای با قطر فاصله کانونی (یعنی شعاع برابر $c = r$ باشد) و هم‌مرکز با بیضی رسم شود، می‌تواند سه وضعیت مختلف نسبت به بیضی داشته باشد:

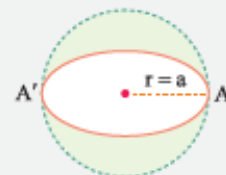
$c < b$		متداخل
$c = b$		مماس داخل
$c > b$		مقاطع

تست قطر یک دایره، بر قطر بزرگ یک بیضی منطبق است. اگر فاصله کانونی این بیضی برابر $2\sqrt{2}$ و قطر کوچک آن $6\sqrt{2}$ باشد، مساحت دایره چقدر است؟

$$10\pi \quad (1) \quad 20\pi \quad (2)$$

$$30\pi \quad (3) \quad 40\pi \quad (4)$$

۲ با توجه به صورت سؤال $2c = 2\sqrt{2}$ و $2b = 6\sqrt{2}$ است، پس:



$$c = \sqrt{2}, b = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

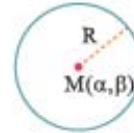
چون قطر دایره منطبق بر قطر بزرگ بیضی است، پس مطابق شکل

شعاع دایره برابر $a = r = 2\sqrt{5}$ است. پس مساحت دایره برابر است با:

$$S = \pi r^2 = \pi (2\sqrt{5})^2 = 20\pi$$

معادله استاندارد دایره

اگر مختصات مرکز دایره $M(\alpha, \beta)$ و شعاع آن R باشد، معادله استاندارد دایره به صورت زیر است:



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

بنابراین برای نوشتن معادله دایره باید مختصات مرکز و اندازه شعاع را داشته باشیم.

مثال ۱ معادله دایره‌های زیر را بنویسید.

الف) دایره C_1 به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲

ب) دایره C_2 به مرکز $M(2, -1)$ و شعاع ۳

الف) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

ب) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

مثال ۲ دایره به معادله $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ را در نظر بگیرید.

مختصات مرکز و شعاع این دایره را پیدا کنید.

برای پیدا کردن مختصات مرکز، عبارت‌های داخل هر پرانتز را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ y - 2 = 0 &\Rightarrow y = 2 \end{aligned} \Rightarrow M(1, 2)$$

در ضمن می‌دانیم عدد ۲۵ برابر R^2 است، پس شعاع دایره برابر $R = 5$ است.

اگر معادله استاندارد دایره یعنی $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ را باز کنیم و همه را به طرف چپ ببریم، معادله دایره به صورت زیر درمی‌آید که آن را معادله گسترده یا ضمنی دایره می‌نامند:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

مرکز و شعاع دایره در معادله گسترده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\text{مرکز} = M\left(-\frac{\text{ضریب } x}{2}, -\frac{\text{ضریب } y}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

مثال مختصات مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow M\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{2}{2}\right) = M(2, -1)$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

ب) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0 \Rightarrow M\left(-\frac{6}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = M(-3, 2)$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 - 3} = \sqrt{16} = 4$$

تست مساحت ناحیه محدود به منحنی $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 0$

کدام است؟

۱) 3π ۲) 5π ۳) 7π ۴) 9π

۲ طرفین معادله را بر ۲ تقسیم کرده و دایره‌ای با معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ به دست می‌آید و داریم:

$$O(1, -2), R = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \Rightarrow S = \pi R^2 = 5\pi$$

محل برخورد دایره با محورهای مختصات

برای پیدا کردن نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات، باید x یا y را مساوی صفر قرار دهیم:

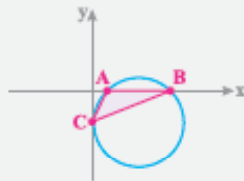
۱ نقاط برخورد با محور x ها؛ در معادله دایره $y = 0$ قرار می‌دهیم.

۲ نقاط برخورد با محور y ها؛ در معادله دایره $x = 0$ قرار می‌دهیم.

تست دایره $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ محور x ها را در دو نقطه A

و B قطع می‌کند و در نقطه C بر محور y ها مماس است. مساحت

مثلث ABC کدام است؟



۱) $4\sqrt{2}$

۲) $4\sqrt{3}$

۳) $5\sqrt{2}$

۴) $5\sqrt{3}$

۲ با جای‌گذاری $y = 0$ در $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ طول نقاط A و B و با جای‌گذاری $x = 0$ در آن عرض نقطه C را پیدا می‌کنیم:

$$y = 0: x^2 - 8x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=48} \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ x = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$$

$$x = 0: \frac{y^2 + 4y + 4}{(y+2)^2} = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times OC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$$

رسم دایره در صفحه مختصات

برای مشخص کردن موقعیت دایره در صفحه مختصات، ابتدا مرکز دایره را در صفحه مختصات پیدا می‌کنیم. سپس از مرکز دایره، به اندازه شعاع به چپ و راست و بالا و پایین حرکت می‌کنیم تا محدوده دایره مشخص شود.



با توجه به شکل واضح است اگر نقطه $M(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد، محدوده x به صورت $(\alpha - r, \alpha + r)$ و محدوده y به صورت $(\beta - r, \beta + r)$ است.

تست چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد دایره به معادله

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

الف) مختصات مرکز آن به صورت $M(2, -1)$ و شعاع آن برابر ۸ است.

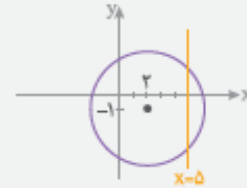
ب) از هر چهار ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد.

پ) خط $x=5$ را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

$$1) (1) \quad 2) (2) \quad 3) (3) \quad 4) \text{ صفر}$$

۲ مرکز دایره $M(2, -1)$ و شعاع دایره $R=4$ است و مطابق شکل

موارد (ب) و (پ) درست هستند و فقط مورد (الف) نادرست است.



شرط دایره بودن

در معادلاتی به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

۱ اگر $a^2 + b^2 - 4c > 0$ باشد، معادله مربوط به یک دایره است.

۲ اگر $a^2 + b^2 - 4c = 0$ باشد، معادله مربوط به یک نقطه است.

۳ اگر $a^2 + b^2 - 4c < 0$ باشد، معادله مربوط به دایره حقیقی نیست.

(دلیل موضوع بالا این است که شعاع دایره یک عدد حقیقی مثبت است، پس)

برای این‌که این معادله مربوط به یک دایره باشد، عبارت زیر را در رابطه

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

باید مثبت باشد.

نکته اگر $c \leq 0$ حاصل عبارت $a^2 + b^2 - 4c$ حتماً مثبت می‌شود.

بنابراین در این حالت، معادله قطعاً مربوط به یک دایره است.

تذکر توجه کنید در معادله دایره، ضرایب x^2 و y^2 باید با هم برابر باشند.

مثال مشخص کنید کدام یک از معادلات زیر مربوط به دایره هستند.

$$\text{الف) } x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$$

$$\text{ب) } x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$$

$$\text{پ) } 2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

الف) دایره نیست، زیرا $a^2 + b^2 - 4c < 0$ است؛

$$2^2 + 4^2 - 4 \times 7 = -8 < 0$$

ب) دایره است. در این جا نیازی به محاسبه $a^2 + b^2 - 4c$ نیست،

چون یاد گرفتیم هر معادله به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ یا

شرط $c \leq 0$ حتماً دایره است.

پ) دایره است. برای تشخیص، ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم

می‌کنیم و معادله را به شکل $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$ بازنویسی

می‌کنیم. در این معادله $2^2 + (-3)^2 - 4 \times 2 > 0$ است.

تست اگر معادله $x^2 + y^2 + (a-4)xy - 2x + 6y + a - 2b = 0$ مربوط

به دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

$$1) a = 8 \quad 2) a = -2 \quad 3) b < -3 \quad 4) b > -3$$

۴ ضریب xy باید برابر صفر باشد، پس $a = 4$ است و معادله دایره

به صورت $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 4 - 2b = 0$ است. در ضمن باید شعاع

مقداری حقیقی باشد، پس:

$$b > -3 \Rightarrow 2b > -6 \Rightarrow 4 - 2b > 10 \Rightarrow 4(4 - 2b) > 10 \Rightarrow 16 - 8b > 10 \Rightarrow -8b > -6 \Rightarrow b < \frac{3}{4}$$

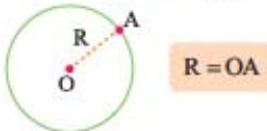
پیدا کردن مرکز و شعاع دایره با شرایط خاص

در بعضی از سؤالات، باید با کمک اطلاعات داده شده در صورت سؤال،

مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا کنیم:

۱ مرکز دایره و نقطه‌ای از آن داده شود

در این حالت اندازه شعاع دایره برابر فاصله مرکز تا نقطه A است:



تست معادله دایره به مرکز $M(2, -5)$ و گذرنده از نقطه $A(6, 4)$

کدام است؟

$$1) (x-2)^2 + (y+5)^2 = \sqrt{93}$$

$$2) (x-2)^2 + (y+5)^2 = 97$$

$$3) (x+5)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{97}$$

$$4) (x-5)^2 + (y-2)^2 = 93$$

۲ فاصله نقطه M تا نقطه A برابر شعاع دایره است، پس:

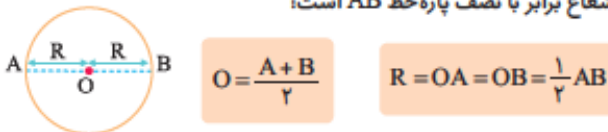
$$R = MA \Rightarrow R = \sqrt{(6-2)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{97}$$

پس معادله دایره به صورت $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 97$ است.

۲ مختصات دو سر یک قطر داده شود

در این حالت مختصات مرکز دایره، وسط پاره خط AB است و اندازه

شعاع برابر با نصف پاره خط AB است:



تست معادله دایره‌ای که نقاط $A(-1, 7)$ و $B(5, -1)$ دو سر یک

قطر آن هستند، کدام است؟

$$1) (x-2)^2 + (y+3)^2 = 90 \quad 2) (x-2)^2 + (y+5)^2 = 125$$

$$3) (x+5)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad 4) (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

۴ مختصات مرکز دایره، مختصات نقطه وسط A و B است، پس:

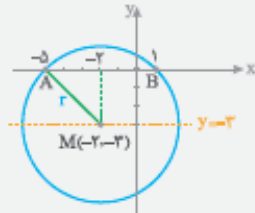
$$O = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{7-1}{2} \right) = (2, 3)$$

$$2R = AB \Rightarrow 2R = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10 \Rightarrow R = 5$$

پس معادله دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ است.

تست دایره C محور xها را در دو نقطه با طول $\Sigma = 1$ و $\Sigma = -5$ قطع می‌کند و مرکز آن روی خط $y = -3$ قرار دارد. معادله دایره کدام است؟

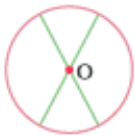
$$\begin{aligned} (x+2)^2 + (y+3)^2 &= 18 \quad (2) & (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 18 \quad (1) \\ (x+2)^2 + (y+3)^2 &= 16 \quad (4) & (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 16 \quad (3) \end{aligned}$$



۲ مرکز دایره روی عمود منصف وتر AB قرار دارد، پس طول مرکز برابر $x_M = \frac{-5+1}{2} = -2$ است.

از طرفی مرکز دایره روی خط $y = -3$ قرار دارد، پس مرکز دایره $M(-2, -3)$ است و داریم:

$$r = MA = \sqrt{(-2+5)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{18} \Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = 18$$



۳ معادله دو قطر دایره داده شود.

مرکز دایره، روی محل برخورد دو قطر قرار دارد.

تست دو خط به معادلات $y - x + 2 = 0$ و $y + 2x = 7$ دو قطر دایره C هستند. اگر این دایره، از مبدأ مختصات عبور کند، معادله این دایره کدام است؟

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+1)^2 &= \sqrt{10} \quad (2) & (x+3)^2 + (y+1)^2 &= 10 \quad (1) \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 &= \sqrt{10} \quad (4) & (x-3)^2 + (y-1)^2 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

۳ ابتدا محل تقاطع دو خط $y - x + 2 = 0$ و $y + 2x = 7$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1$$

پس نقطه $M(3, 1)$ مرکز دایره است و داریم:

$$R = OM \Rightarrow R = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

پس معادله دایره C به صورت $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ است.

نکته در سؤالاتی که مرکز دایره روی یک خط قرار دارد، طول مرکز دایره را فرض می‌کنیم و عرض مرکز را با قرار دادن α در معادله خط می‌نویسیم.

تست دایره‌ای از دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (خارج ۹۰-)

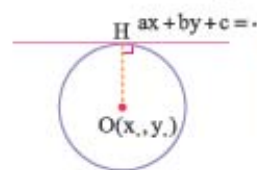
$$\sqrt{2} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad \sqrt{5} \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۳ می‌دانیم مرکز دایره روی قطر آن قرار دارد. حال چون معادله یک قطر دایره به صورت $y = x - 2$ است، پس مختصات مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha - 2)$ فرض می‌کنیم و با حل معادله $OA = OB$ داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2 + (\alpha-3)^2} &= \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\alpha-2)^2} \\ \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha + 9 &= 2\alpha^2 - 10\alpha + 13 \\ \Rightarrow 4\alpha &= 4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow R = OA = \sqrt{1^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

۴ مختصات مرکز دایره و معادله یک خط مماس بر آن داده شود.

شعاع دایره برابر فاصله مرکز دایره از خط مماس است:



$$R = OH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تست معادله دایره به مرکز $M(2, 5)$ و مماس بر خط $4x + 3y + 2 = 0$ کدام است؟

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad (2) \quad (x+2)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16 \quad (4) \quad (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad (3)$$

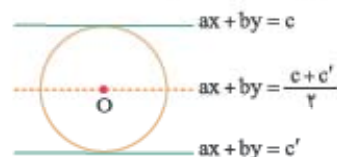
۳ چون دایره بر خط $4x + 3y + 2 = 0$ مماس است، داریم:

$$r = MH = \frac{|4+15+2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

پس معادله دایره $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ می‌باشد.

۴ معادله دو خط موازی و مماس بر دایره داده شود.

مرکز روی خط وسط آن‌ها و شعاع دایره نصف فاصله آن‌ها است:



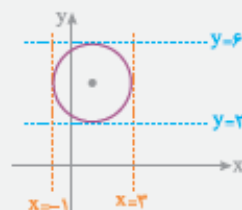
$$2R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تست دایره‌ای بر خطوط $x = -1$ و $x = 3$ و $y = 2$ و $y = 6$ مماس است. چه تعداد از نقاط زیر روی این دایره هستند؟

الف) $(-1, 4)$ ب) $(2, 3)$ پ) $(3, 1)$

۱) $(1, 1)$ ۲) $(2, 2)$ ۳) $(3, 3)$ ۴) هیچ

۱ با توجه به شکل، مرکز دایره $O(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+6}{2}) = O(1, 4)$ می‌باشد و فاصله هر دو خط موازی نیز برابر قطر دایره است، یعنی:

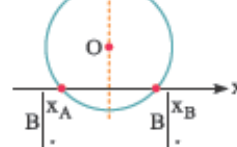


$$2R = 6 - 2 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

حال تنها مختصات نقطه $(-1, 4)$ در معادله این دایره صدق می‌کند.

۵ دایره یکی از محورهای مختصات را در دو نقطه قطع کند.

مرکز دایره روی عمود منصف پاره خط AB است:



$$x_{\text{مرکز}} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

دایره مماس بر یکی از محورهای مختصات

اگر دایره به مرکز $M(\alpha, \beta)$ فقط بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد، می‌توانیم فقط طول یا عرض مرکز دایره را پیدا کنیم:

۱ اگر دایره فقط بر محور x مماس باشد، اندازه عرض مرکز برابر شعاع دایره است: $|\beta| = r$



۲ اگر دایره فقط بر محور y مماس باشد، اندازه طول مرکز برابر شعاع دایره است: $|\alpha| = r$



تست دایره C به مرکز $M(7, -3)$ بر محور x مماس است. معادله این دایره کدام است؟

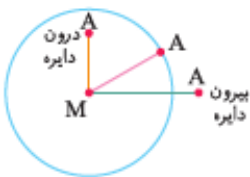
$$\begin{aligned} 1) & x^2 + y^2 - 14x + 6y + 21 = 0 \\ 2) & x^2 + y^2 - 14x + 6y + 49 = 0 \\ 3) & x^2 + y^2 - 14x + 6y - 21 = 0 \\ 4) & x^2 + y^2 - 14x + 6y - 49 = 0 \end{aligned}$$

۲ مرکز دایره C به صورت $M(7, -3)$ است و چون بر محور x مماس است، پس شعاع دایره برابر $R = 3$ است. پس معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 14x + 6y + 49 = 0$$

وضعیت نسبی نقطه و دایره

برای این‌که بفهمیم نقطه‌ای مانند $A(x, y)$ چه وضعی نسبت به دایره دارد، باید فاصله نقطه A را تا مرکز دایره پیدا کنیم و این فاصله را با شعاع دایره یعنی R مقایسه کنیم. اگر $AM < R$ باشد، نقطه A درون دایره، اگر $AM > R$ باشد، نقطه A بیرون دایره و اگر $AM = R$ باشد، نقطه A روی دایره قرار دارد.



نکته برای این‌که وضعیت نقطه $A(x, y)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را سریع‌تر تعیین کنیم، مختصات نقطه A را در معادله دایره قرار می‌دهیم و عدد به دست آمده را $f(A)$ می‌نامیم:

معادله دایره گذرنده از سه نقطه

برای نوشتن معادله دایره گذرا از سه نقطه C, B, A می‌توانیم معادله گسترده دایره یعنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را بنویسیم و مختصات نقاط داده شده را در آن جای‌گذاری کنیم تا مقادیر c, b, a پیدا شود.

تست اگر نقاط $A(0, 6)$ ، $B(-4, 0)$ و $C(1, 5)$ سه نقطه از یک شهر باشند، دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟ (برگرفته از کتاب دوسی)

$$1) (-3, 4) \quad 2) (3, -2) \quad 3) (-2, 3) \quad 4) (4, -3)$$

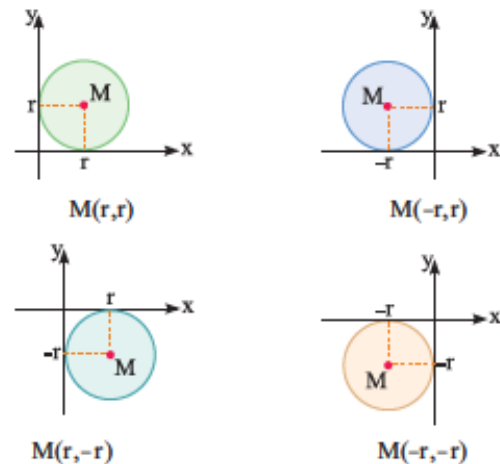
۳ دکل مخابراتی باید در مرکز دایره گذرنده از نقاط $A(0, 6)$ ، $B(-4, 0)$ و $C(1, 5)$ قرار بگیرد، حال معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ فرض می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} 1) & A(0, 6): 36 + 6b + c = 0 \\ 2) & B(-4, 0): 16 - 4a + c = 0 \\ 3) & C(1, 5): 1 + 25 + a + 5b + c = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 6b = -20 \\ 4a + 5b = -10 \end{cases}$$

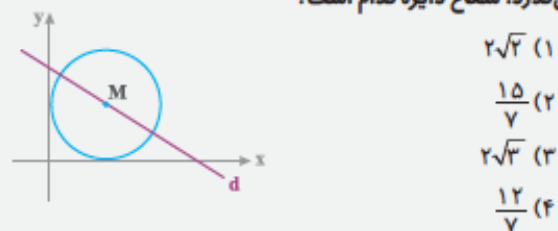
بنابراین $a = 4$ و $b = -6$ و $c = 0$ به دست می‌آید. پس معادله دایره $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ است. مرکز آن $M(-2, 3)$ است.

دایره مماس بر هر دو محور مختصات

اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس باشد، می‌توانیم مختصات مرکز آن را مطابق شکل‌های زیر پیدا کنیم:



تست در شکل مقابل، خط $d: 4x + 3y - 15 = 0$ از مرکز دایره می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟

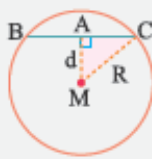


۲ مرکز دایره به صورت $M(r, r)$ است، از طرفی مرکز دایره روی خط $d: 4x + 3y - 15 = 0$ قرار دارد، پس:

$$d: y = -\frac{4}{3}x + 5 \xrightarrow{M(r, r)} r = -\frac{4}{3}r + 5 \Rightarrow \frac{7}{3}r = 5 \Rightarrow r = \frac{15}{7}$$

تست طول کوتاه‌ترین وتر گذرا از نقطه $A(1,0)$ درون دایره $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ کدام است؟

$$1) 3\sqrt{2} \quad 2) 2\sqrt{3} \quad 3) 3 \quad 4) 4\sqrt{3}$$



۲ مرکز دایره $M(2,1)$ و شعاع آن

$$R = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

در ضمن فاصله نقطه $A(1,0)$ از مرکز $M(2,1)$ برابر است با:

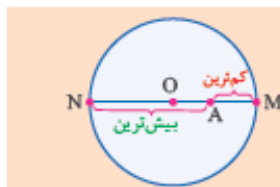
$$AM = d = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

پس با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث رنگی داریم:

$$AC = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

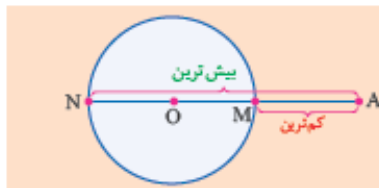
کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه تا دایره

برای به دست آوردن کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه A از دایره، باید شعاع دایره و فاصله نقطه A تا مرکز دایره را پیدا کنیم. حال با توجه به شکل‌های زیر داریم:



$$AM = R - OA$$

$$AN = R + OA$$



$$AM = OA - R$$

$$AN = OA + R$$

تست بیش‌ترین فاصله نقطه $A(2,4)$ از نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ کدام است؟

$$1) 2 \quad 2) 3 \quad 3) 5 \quad 4) 7$$

۴ بیش‌ترین فاصله نقطه $A(2,4)$ تا دایره $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

برابر است با $OA + R$ ، پس:

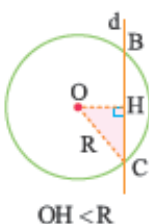
$$\begin{cases} O(-1,0) \Rightarrow OA = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-4)^2} = 5 \\ R = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow OA + R = 5 + 2 = 7$$

وضعیت نسبی خط و دایره

۱ خط و دایره در دو نقطه متقاطع‌اند

در این حالت، فاصله مرکز دایره تا خط d را به دست می‌آوریم و با کمک رابطه فیثاغورس، طول CH را پیدا می‌کنیم. پس:



$$BC = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$$

وضعیت نقطه نسبت به دایره	A داخل دایره	A روی دایره	A خارج دایره
شرایط	$f(A) < 0$	$f(A) = 0$	$f(A) > 0$

تست چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) نقطه $A(0,2)$ داخل دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$ قرار دارد.

ب) نقطه $B(-1,-2)$ خارج دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ قرار دارد.

پ) نقطه $C(0,0)$ روی دایره $x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0$ قرار دارد.

$$1) 1 \quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) 4 \quad \text{صفر}$$

۱ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

خارج دایره $\Rightarrow f(A) = (0-2)^2 + (2+1)^2 - 3 = 10 > 0$ (الف)

داخل دایره $\Rightarrow f(B) = (-1)^2 + (-2)^2 + 2(-1) + 2(-2) = -1 < 0$ (ب)

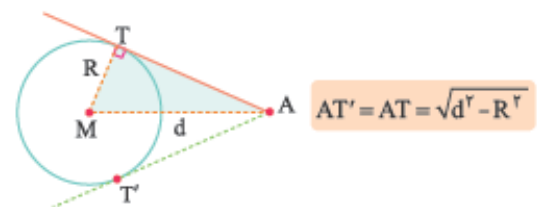
روی دایره $\Rightarrow f(C) = (0)^2 + (0)^2 + 3(0) + 2(0) = 0$ (پ)

پس فقط مورد (پ) صحیح است.

محاسبه طول قطعه مماس و طول وتر منیمم

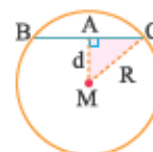
اگر نقطه A بیرون یا درون دایره باشد، موضوعات مهم زیر قابل نتیجه‌گیری است:

۱ نقطه A بیرون دایره باشد: می‌توان دو مماس هم‌اندازه بر دایره رسم کرد. طول این مماس‌ها با استفاده از رابطه فیثاغورس برابر است با:



۲ نقطه A درون دایره باشد: می‌توانیم طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه A را با کمک رابطه فیثاغورس به دست آوریم (کوتاه‌ترین وتر بر شعاع

گزیده از A عمود است).

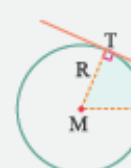


$$BC = 2\sqrt{R^2 - d^2}$$

تست طول خط مماسی که از نقطه $A(2,4)$ بر دایره

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ رسم می‌شود، چقدر است؟

$$1) 2 \quad 2) 3 \quad 3) 4 \quad 4) 5$$



۳ مرکز دایره $M(-2,1)$ و شعاع آن

فاصله $R = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4} = 3$ است.

نقطه $A(2,4)$ از مرکز $M(-2,1)$ برابر

است با:

$$AM = d = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-4)^2} = 5$$

چون در مثلث رنگی $d = 5$ و $R = 3$ است، پس با توجه به رابطه فیثاغورس $AT = 4$ است.

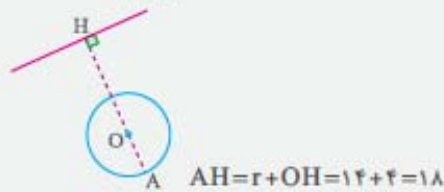
تست فاصله دورترین نقطه دایره $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ از خط $4y - 3x - 82 = 0$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۲ مطابق شکل فاصله دورترین نقطه دایره $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ از خط $4y - 3x - 82 = 0$ برابر $AH = r + OH$ است، پس داریم:

$$O(0, 3), R = \sqrt{0^2 + 9 + 7} = 4$$

$$OH = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 0 - 82|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{70}{5} = 14$$



وضعیت نسبی دو دایره

برای این که بفهمیم دو دایره نسبت به هم چه وضعیتی دارند، باید مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را به دست آوریم. سپس فاصله دو مرکز را با $R + R'$ و $|R - R'|$ مقایسه می کنیم تا ببینیم دو دایره در کدام یک از حالت های زیر قرار دارند:

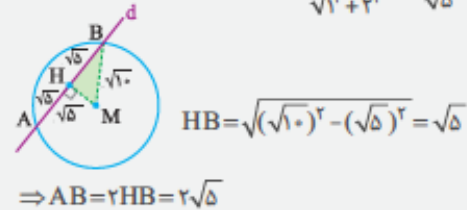
شکل	رابطه بین شعاع ها و خط المکزین
	(۱) متخارج $d > r + r'$
	(۲) مماس برون $d = r + r'$
	(۳) متقاطع $ r - r' < d < r + r'$
	(۴) مماس درون $d = r - r' $
	(۵) متداخل $d < r - r' $
	(۶) هم مرکز $d = 0$

تست اندازه وتری که خط $x - 2y = 3$ از دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ جدا می کند، چقدر است؟

۱) $3\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $3\sqrt{5}$

۳ نقطه $M(2, 2)$ مرکز دایره می باشد. حال شعاع دایره و فاصله مرکز دایره از خط $x - 2y = 3$ را به دست می آوریم:

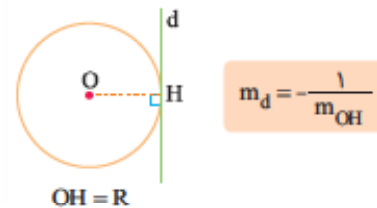
$$R = \sqrt{4 + 4 + 2} = \sqrt{10}, MH = \frac{|2 - 4 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



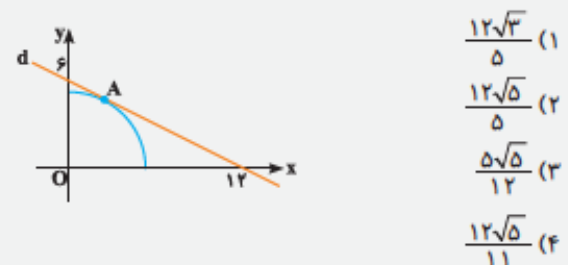
۲ خط و دایره در یک نقطه بر هم مماس اند

در نقطه تماس، شعاع بر خط مماس، عمود است [خط d و OH بر هم عمودند].

پس شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب خط OH است:



تست در شکل مقابل، خط d در نقطه A بر یک ربع دایره به مرکز $O(0, 0)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟

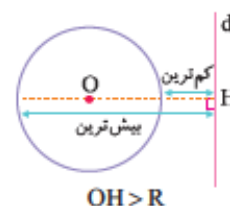


۲ معادله خط d به صورت $y = -\frac{1}{2}x + 6$ است. حال از آن جایی که نقطه $O(0, 0)$ مرکز ربع دایره است، پس $R = OA$ است:

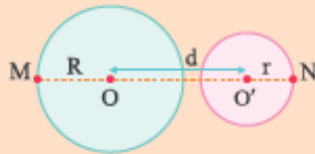
$$d: 2y + x - 12 = 0 \Rightarrow R = \frac{|0 + 0 - 12|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

۲ خط و دایره متقاطع نیستند و نقطه مشترک ندارند

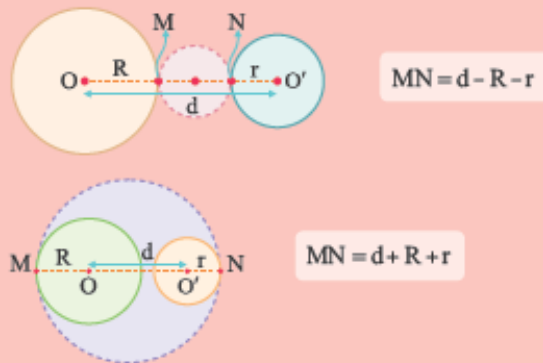
در این حالت، ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط d را به دست می آوریم. حال با توجه به شکل، کمترین فاصله نقاط دایره از خط برابر $OH - R$ و بیشترین فاصله نقاط دایره از خط برابر $OH + R$ است.



متخارج

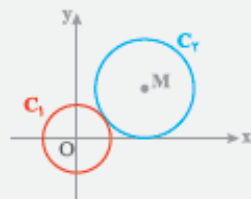


نکته دو دایره متخارج $C(O, R)$ و $C(O', r)$ را در نظر بگیرید، قطر بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین دایره مماس بر این دو دایره به صورت زیر است:

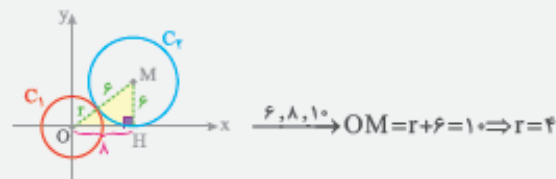


تست مطابق شکل، دو دایره $C_1: x^2 + y^2 = r^2$ و $C_2: (x-8)^2 + (y-6)^2 = R^2$ بر یکدیگر مماس‌اند. بیش‌ترین فاصله نقاط دو دایره کدام است؟

- ۴ (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)



۳ مرکز دایره C_1 نقطه $O(0,0)$ و شعاع آن r است. چون دایره C_2 بر محور x مماس‌ها مرکز آن نقطه $M(8,6)$ است. پس شعاع آن برابر عرض نقطه مرکز یعنی $R=6$ است. پس مطابق شکل داریم:



پس بیش‌ترین فاصله نقاط دو دایره برابر $12 + 8 = 20$ است.

به OO' خط‌المركزین می‌گوییم و طول آن را با d نمایش می‌دهیم.

تست دو دایره $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$

نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس خارج (۲) مماس داخل
(۳) متقاطع (۴) متخارج

۱ مرکز و شعاع دایره‌ها را به دست می‌آوریم و فاصله مرکز دو دایره را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} O_1(1, -3), R_1 = \sqrt{1+9+8} = 3\sqrt{2} \\ O_2(-4, 2), R_2 = \sqrt{16+4-12} = 2\sqrt{2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} |R_1 - R_2| = \sqrt{2} \\ R_1 + R_2 = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

از طرفی $d = O_1O_2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ می‌باشد، پس $d = R_1 + R_2$ بوده و دو دایره مماس خارج‌اند.

تست به ازای چند مقدار طبیعی a دو دایره $C_1: x^2 + y^2 = 9$ و

$C_2: (x-a)^2 + (y+8)^2 = 49$ متقاطع‌اند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

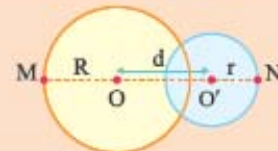
۲ در دو دایره متقاطع $|R_2 - R_1| < O_1O_2 < R_1 + R_2$ است، پس:

$$\begin{aligned} 1) C_1: O_1(0,0), R_1=3 \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{a^2+64} \\ 2) C_2: O_2(a,-8), R_2=7 \\ \Rightarrow |7-3| < \sqrt{a^2+64} < 3+7 \Rightarrow 16 < a^2+64 < 100 \\ \Rightarrow a^2 < 36 \Rightarrow a=1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

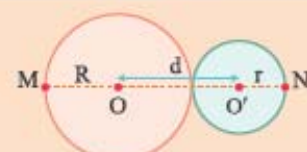
بیشترین فاصله نقاط دو دایره

در وضعیت‌های زیر، بیش‌ترین فاصله نقاط دو دایره برابر $MN = d + R + r$ است:

متقاطع



مماس بیرون



آمار

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: آمار از آن فصل‌هایی است که ارتباطی با بقیه فصل‌ها ندارد. نه پیش‌نیازی می‌خواهد و نه خودش پیش نیاز فصل دیگری است.

توصیه: درست است که تعداد تست‌های این فصل در کنکور بسیار کم است. اما مطالعه این فصل اصلاً زمان‌بر نیست. و هر موقع از سال می‌توانید آن را مطالعه کنید. معمولاً تست‌های این فصل در کنکور از واریانس یا انحراف معیار یا ضریب تغییرات طرح می‌شود. یکی از مهم‌ترین موضوع‌های این فصل هم مقایسه دقت کاری است. در سال‌های اخیر، تست‌های این بخش نیاز به تحلیل بیش‌تری داشته‌اند، پس به تست‌های جدیدی که طراحی کردیم خیلی توجه کنید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۱	صفر	۲	۱	۱	۱	۱	۱



درس مقدمه‌ای بر علم آمار، متغیر و انواع آن

آمار و علم آمار

مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، آمار نامیده می‌شود. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است. به عبارت دیگر مراحل علم آمار به صورت زیر است:



۳ مراحل علم آمار به ترتیب زیر است:

- مرحله (۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام؛ ثبت دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی
- مرحله (۲) سازماندهی و نمایش داده‌ها؛ سازماندهی و نمایش در ایستگاه‌ها
- مرحله (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها؛ تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی
- مرحله (۴) نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی؛ نظرات کارشناسان هواشناسی

تعاریف اولیه آمار

- هر ویژگی از اشیاء یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند، متغیر نامیده می‌شود.
- عددی که به آن ویژگی یک عضو از جامعه، نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر (مشاهده) می‌گویند.
- به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آن‌ها داده‌ها را گردآوری کنیم، جامعه آماری گفته می‌شود.
- به تعداد اعضای یک جامعه آماری، اندازه جامعه یا حجم جامعه می‌گوییم.
- به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، نمونه می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، اندازه نمونه یا حجم نمونه گفته می‌شود.

تست برای گزارش اخبار هواشناسی، باید دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی ثبت شود. سپس این اطلاعات سازماندهی و در ایستگاه‌ها به نمایش در بیاید تا کارشناسان نظرات خود را پیرامون وضعیت هوا اعلام کنند و نتیجه نهایی در اختیار مردم قرار گیرد. کدام مرحله، قبل از نظرات کارشناسان است؟

(برگرفته از کتاب درسی)



- جمع‌آوری اعداد و ارقام
- سازماندهی و نمایش داده‌ها
- تحلیل و تفسیر داده‌ها
- قضاوت و پیش‌بینی

انواع متغیر

متغیرها به دو دسته کمی و کیفی تقسیم‌بندی می‌شوند. متغیری که قابل اندازه‌گیری باشد، یعنی بتوان به آن عدد نسبت داد، متغیر کمی است و متغیری که قابل اندازه‌گیری نباشد، متغیر کیفی است. هر یک از این متغیرها به دو زیر گروه به صورت زیر تقسیم می‌شوند:



تست در کدام گزینه، نوع متغیر نادرست است؟

(۱) تعداد صندوق‌های سالن سینما؛ کمی گسسته

(۲) انواع حساب‌های بانکی؛ کیفی اسمی

(۳) میزان لذت از نقاشی کشیدن؛ کیفی ترتیبی

(۴) میزان درآمد از فروش محصولات؛ کمی گسسته

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) تعداد صندوق‌های سالن سینما قابل شمارش است و فقط می‌تواند عدد طبیعی باشد، پس کمی گسسته است.

(۲) به طور کلی متغیرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است، کیفی هستند. در ضمن چون انواع حساب‌های بانکی دارای ترتیب طبیعی نیست، پس این متغیر کیفی اسمی است.

(۳) میزان لذت (یا میزان سفتی، رضایت، علاقه‌مندی و ...) مفهوم کیفی دارد که می‌تواند کم، متوسط، زیاد و ... باشد، پس کیفی ترتیبی است.

(۴) میزان درآمد فروش (یا میزان بارش، مالیت و ...) مفهوم عددی دارد و یک متغیر کمی پیوسته است.

مثال

می‌خواهیم قد کارمندان یک اداره با ۳۰ کارمند را بررسی کنیم.

برای این منظور ۱۰ کارمند از آن‌ها را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و قد آن‌ها را اندازه می‌گیریم.

قد کارمندان متغیر تصادفی است، زیرا از یک عضو به عضو دیگر می‌تواند تغییر کند.

عدد قد هر کارمند، مقدار متغیر نام دارد.

۳۰ کارمند جامعه آماری است و اندازهٔ جامعه ۳۰ است.

۱۰ کارمند یک نمونه است و اندازهٔ نمونه ۱۰ است.

تست

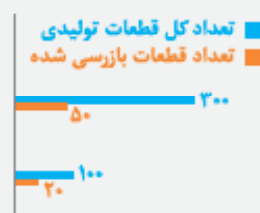
در نمودار زیر تعداد کل قطعات تولیدی یک کارخانه در ۲ روز و همچنین تعداد قطعات بازرسی شده توسط بازرسان نشان داده شده است. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

(برگرفته از کتاب دوسی)

(الف) اندازهٔ جامعه برابر ۴۰۰ است.

(ب) اندازهٔ نمونه برابر ۷۰ است.

(پ) جامعه آماری، قطعات بازرسی شده است.



(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

۲ تعداد کل قطعات تولیدی برابر $400 = 300 + 100$ و تعداد قطعات بازرسی شده برابر $70 = 50 + 20$ است. بنابراین اندازهٔ جامعه برابر ۴۰۰ و اندازهٔ نمونه برابر ۷۰ است، بنابراین (الف) و (ب) درست هستند، اما جامعه آماری، کل قطعات تولیدی هستند، پس (پ) نادرست است.

تذکر

واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فرد که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند، داده نام دارد.

روش‌های مطالعهٔ یک جامعه آماری

۱ معمولاً اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ نباشد، می‌توانیم همهٔ واحدهای آماری را مورد بررسی قرار دهیم. این روش را سرشماری می‌نامند.

۲ اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ باشد یا همهٔ اعضای آن در دسترس نباشند یا دسترسی به آن‌ها گران و وقت‌گیر باشد یا ممکن باشد در اثر مطالعه، نمونه‌ها از بین بروند، به جای سرشماری، بخشی از جامعه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، یعنی از نمونه‌گیری استفاده می‌کنیم.

درس معیارهای گرایش به مرکز

میانگین

میانگین هر تعداد داده برابر با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها می‌باشد. پس اگر n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، میانگین (مرکز ثقل) داده‌ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهند و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

تست اگر میانگین داده‌های $8, 1, 9, 4, 2, 2, 3, a, 8, 9$ برابر 5 باشد، میانگین داده‌های $1 + \frac{a}{4}, 3a, 7 - a, a + 6, a$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 3/2 & (1) & 4/8 & (2) & 6/4 & (3) & 7/6 & (4) \end{matrix}$$

۳ میانگین 10 داده آماری را برابر 5 قرار می‌دهیم تا مقدار a را پیدا کنیم:

$$\bar{x} = \frac{8+1+9+4+2+2+3+a+8+9}{10} = 5 \Rightarrow 46+a=50 \Rightarrow a=4$$

با توجه به مقدار a ، میانگین 5 داده جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\bar{x}_{\text{new}} = \frac{a+(a+6)+3a+(7-a)+(\frac{a}{4}+1)}{5} = \frac{4+10+12+3+3}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$$

نکته اگر داده‌ها تشکیل دنباله حسابی بدهند، میانگین کل داده‌ها با میانگین دو جمله‌ای که فاصله یکسانی از ابتدای دنباله دارند برابر است. مثلاً میانگین جمله اول و آخر یا میانگین جمله دوم و جمله ماقبل آخر یا ...

تست میانگین داده‌های $98, 14, 10, 6, 2$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 50 & (1) & 49 & (2) & 48 & (3) & 47 & (4) \end{matrix}$$

۱ چون داده‌ها تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت 4 داده‌اند، پس میانگین کل داده‌ها برابر میانگین داده اول و آخر است:

$$\bar{x} = \frac{2+98}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

نکته اگر داده‌ها همگی نزدیک عددی مانند a باشند، می‌توانیم از همه داده‌ها a واحد کم کنیم و پس از محاسبه میانگین اعداد حاصل، عدد a را به میانگین اضافه کنیم.

تست میانگین داده‌های $295, 298, 299, 302, 302, 304$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 301/5 & (1) & 299 & (2) & 300 & (3) & 301/5 & (4) \end{matrix}$$

۳ برای سادگی محاسبات، ابتدا از همه داده‌ها 300 واحد کم می‌کنیم و سپس به میانگین حاصل 300 واحد اضافه می‌کنیم:

$$x_1 - 300: -5, -2, -1, 2, 2, 4$$

$$\Rightarrow \bar{x} - 300 = \frac{(-5) + (-2) + (-1) + 2 + 2 + 4}{6} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 300$$

تذکر اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد، مجموع اختلاف همه داده‌ها از میانگین، همواره برابر صفر است:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

مثال اگر 7 داده آماری داشته باشیم و مقادیر اختلاف از میانگین آن‌ها به صورت $a, 2, 2, 5, 3, -1, -2$ باشد، مقدار a کدام است؟
مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس:

$$(-2) + (-1) + 3 + 5 + 2 + 2 + a = 0 \Rightarrow 9 + a = 0 \Rightarrow a = -9$$

نکته اگر عدد ثابتی به همه داده‌ها اضافه یا از همه داده‌ها کم شود، همان عدد عیناً به میانگین داده‌های اولیه اضافه و یا از آن کم می‌شود. و اگر عدد ثابتی در همه داده‌ها ضرب یا همه داده‌ها بر آن تقسیم شوند، همان عدد عیناً در میانگین داده‌های اولیه ضرب و یا بر آن تقسیم می‌شود.

نقشه اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $a\bar{x} + b$ است.

تست اگر میانگین داده‌های $1, x_1 - 1, x_2 - 1, \dots, x_n - 1$ برابر 5 باشد، میانگین داده‌های $3 + \frac{1}{4}x_1 + 3, 3 + \frac{1}{4}x_2 + 3, \dots, 3 + \frac{1}{4}x_n + 3$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 4 & (1) & 5 & (2) & 6 & (3) & 7 & (4) \end{matrix}$$

۳ فرض می‌کنیم میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ است. پس میانگین داده‌های $1, x_1 - 1, x_2 - 1, \dots, x_n - 1$ برابر $1 - \bar{x}$ است:

$$\bar{x} - 1 = 5 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

میانگین داده‌های $3 + \frac{1}{4}x_1 + 3, 3 + \frac{1}{4}x_2 + 3, \dots, 3 + \frac{1}{4}x_n + 3$ برابر است با:

$$\frac{1}{4}\bar{x} + 3 = \frac{1}{4}(6) + 3 = 6$$

اضافه و کم کردن تعدادی داده و تأثیر آن بر میانگین

داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ با میانگین $\bar{x}$ را در نظر بگیریم. می‌خواهیم تعدادی داده جدید به آن‌ها اضافه کنیم یا تعدادی داده از بین آن‌ها حذف کنیم. در این صورت دو حالت داریم:

۱ اگر میانگین داده‌های اضافه‌شده یا حذف‌شده، با میانگین داده‌های اولیه یعنی $\bar{x}$ برابر باشد، میانگین هیچ تغییری نمی‌کند.

۲ اگر میانگین داده‌های اضافه‌شده یا حذف‌شده برابر $\bar{x}$ نباشد، ابتدا با کمک رابطه میانگین، مجموع داده‌های اولیه را پیدا می‌کنیم. سپس داده‌های جدید را به مجموع داده‌های اولیه اضافه و یا از آن‌ها کم می‌کنیم و مجموع جدید را بر تعداد جدید داده‌ها تقسیم می‌کنیم.

تست میانگین 10 داده آماری برابر 15 است. اگر دو داده 3 و 7 را از بین آن‌ها حذف کنیم، میانگین 8 داده جدید کدام است؟

$$\begin{matrix} 18 & (1) & 17/5 & (2) & 17 & (3) & 16/5 & (4) \end{matrix}$$

۲ با توجه به رابطه میانگین، مجموع 10 داده با میانگین 15 برابر با $150 = 15 \times 10$ است. اگر دو داده 3 و 7 را از بین آن‌ها حذف کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{150 - (3 + 7)}{8} = \frac{140}{8} = 17\frac{1}{2}$$

۲ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \overbrace{1, 5, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 10}^{\text{نیمہ اول}} \quad \overbrace{10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10}^{\text{نیمہ دوم}} \\ \Rightarrow Q_1 = 6, Q_r = \frac{10+10}{2} = 10, Q_r = 10 \\ \Rightarrow Q_r - \frac{Q_r}{Q_1} = 10 - \frac{10}{6} = 8\frac{1}{3} \end{aligned}$$

تذکره اگر عددی به همة داده‌ها اضافه یا از همة داده‌ها کم شود، همان عدد عیناً به میانه اضافه یا از آن کم خواهد شد. و اگر عدد ثابتی در همة داده‌ها ضرب یا همة داده‌ها بر آن تقسیم شوند، همان عدد عیناً در میانه داده‌ها ضرب و یا تقسیم می‌شود.

نتیجه اگر میانۀ داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر Q_p باشد، میانۀ داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر با $aQ_p + b$ است.

تست اگر میانۀ داده‌های $۲, ۳x_1, ۳x_2, \dots, ۳x_{10}, ۲$ برابر ۱۱ باشد،

میانۀ داده‌های $x_1 + 3, x_2 + 3, \dots, x_n + 3$ کدام است؟

۱) ۶	۲) ۵	۳) ۲	۴) ۳
------	------	------	------

۱) میانۀ داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را Q_r در نظر می‌گیریم پس بانوجه به صورت سؤال، داریم:

$$3Q_r + 2 = 11 \Rightarrow Q_r = 3$$

بنابراین میانۀ داده‌های $x_1 + 3$ برابر است با:

$$Q_r' = Q_r + 3 = 3 + 3 = 6$$

دادۀ دورافتاده

داده‌ای که نسبت به بقیه داده‌ها، خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد را داده دورافتاده می‌گوییم.

داده‌دورافتاده بیش‌ترین تأثیر را بر میانگین دارد، در حالی‌که تأثیر کمی روی میانه می‌گذارد. پس وقتی داده‌دورافتاده داریم، میانه مناسب‌ترین معیار برای تشخیص حدود داده‌ها است.

تست زمان انتظار در هشت تماس تلفنی مختلف برای اتصال به

اپراتور یک موسسه برحسب دقیقه به صورت ۲۳ و ۱ و ۲۷ و ۲۴ و ۱۹ و ۲۲ و ۲۵ و ۲۸ است. با حذف داده دورافتاده، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

$$YF/\Delta(F) \quad YF/\Gamma(F) \quad YF(Y) \quad YF/Y\Delta(1)$$

۲ در بین این اعداد، عدد ۱ دادهٔ دورافتاده محسوب می‌شود، که با حذف آن، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{21 + 20 + 22 + 19 + 25 + 27 + 23}{7} = \frac{167}{7} = 23.86$$

میانہ

اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، میانه عددی است که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر باشد. میانه را با Q_2 نشان می‌دهند.

برای محاسبهٔ میانه با دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه برابر دادهٔ وسط است.

$$\overbrace{7, 8, 8, 9}^{\text{نیمہ اول}} \overbrace{9, 10, 11, 14, 15}^{\text{نیمہ دوم}} \Rightarrow Q_v = 9$$

اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو داده وسط است.

$$\overbrace{4,5,5,6}^{\text{نیمه اول}}, \overbrace{7,8,9,10,11}^{\text{نیمه اول}} \Rightarrow Q_Y = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

تست میانگین داده‌های آماری ۲۱، ۸، ۱۹، ۱۸، ۱۱، ۷، ۵، ۴، ۴ برابر ۱۱

است. میانه این داده‌ها کدام است؟

11 (F 1.15 (3 1.15 (2 1.0 (1

1 ابتدا مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{F+F+O+Y+11+1A+1Q+a+Z1}{9} = 11 \Rightarrow 1Q+a=99 \Rightarrow a=1.$$

حال داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و میانه را به دست می‌آوریم:

$$\overbrace{F, F, 5, 7, 1}^{\text{نیمه اول}}, \overbrace{1, 1, 1, 1, 9, 21}^{\text{نیمه دوم}} \Rightarrow Q_Y = 1.$$

چارک اول و سوم

میانۀ نیمۀ اول داده‌ها را چارک اول می‌نامند و با Q_1 نشان می‌دهند و میانۀ نیمۀ دوم داده‌ها را چارک سوم می‌نامند و با Q_3 نشان می‌دهند. میانۀ، خودش چارک دوم محسوب می‌شود.

نيمه اول داددها: 1, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 14, 15
 نيمه دوم داددها: 1, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 14, 15
 $Q_1 = \frac{2+2}{2} = 2$ $Q_3 = 7$ $Q_r = \frac{9+11}{2} = 10$

نيمه اول دادها: ۱, ۲, ۳, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸, ۹
 نيمه دوم دادها: ۱, ۲, ۳, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸, ۹
 $Q_1 = 2$ $Q_3 = 4$ $Q_5 = 7$

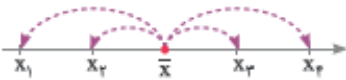
تست در داده‌های آماری ۸، ۱۵، ۸، ۴، ۶، ۱۰، ۵، ۱۰، ۱۵

مقدار $Q_3 - \frac{Q_2}{Q_1}$ کدام است؟

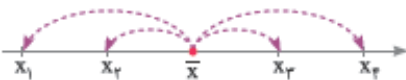
$$1. (F) \quad 9. (T) \quad 11. (F) \quad 13. (F)$$

درس معیارهای پراکندگی

۱ واریانس کوچک‌تر، پراکندگی کم‌تر



۲ واریانس بزرگ‌تر، پراکندگی بیش‌تر



تست در داده‌های آماری ۱۳، ۷، ۱۰، ۷، ۸، ۱۳، ۵، ۶، ۱۱، ۴ داده‌های کمتر از میانه را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۴/۵ (۴) ۳/۶ (۳) ۳/۴ (۲) ۲/۸ (۱)

۳ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

نیمه اول: ۵، ۶، ۷، ۷
نیمه دوم: ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۳

پس باید واریانس داده‌های رنگی را پیدا کنیم:

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 11 + 13 + 13}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(8-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (13-11)^2 + (13-11)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9 + 1 + 0 + 4 + 4}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

تذکر اگر تمام داده‌های آماری با هم برابر باشند، واریانس و انحراف معیار (و سایر شاخص‌های پراکندگی) برابر صفر است.

تست اگر انحراف معیار داده‌های a, b, c, d و $2a$ و 8 برابر

صفر باشد، واریانس داده‌های d و c و $2b$ و $a+1$ کدام است؟

۲/۵ (۴) ۲/۲ (۳) ۲ (۲) ۱/۸ (۱)

۴ چون انحراف معیار داده‌های a, b, c, d و $2a$ و 8 برابر صفر است، پس این داده‌ها با هم برابر هستند:

$$2a = fb = fc = ad = 8 \Rightarrow a = 4, b = 2, c = 2, d = 1$$

بنابراین داده‌های d و c و $2b$ و $a+1$ به صورت ۱ و ۲ و ۴ و ۵ هستند و برای به دست آوردن واریانس آن‌ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 4 + 5}{4} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{4} = \frac{4 + 1 + 1 + 4}{4} = 2.5$$

اعدادی که چگونگی پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهند، معیارهای پراکندگی نام دارند. دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم را به عنوان معیارهای پراکندگی بررسی می‌کنیم.

دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را دامنه تغییرات می‌گویند و آن را با R نشان می‌دهند.

$$R = \text{کوچک‌ترین داده} - \text{بزرگ‌ترین داده}$$

تذکر اگر دامنه تغییرات داده‌ها صفر باشد، تمام داده‌ها با هم برابر هستند و برعکس.

مثال اگر دامنه تغییرات داده‌های ۱۱ و ۶، ۵، ۱۰، ۱۵، ۹، ۸، ۷، ۳ برابر ۱۲ باشد، داده a چه تعداد از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱۴ (ب) ۸ (پ) ۲

در میان داده‌های معلوم، عدد ۳ و ۱۵ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده هستند که دامنه تغییرات برابر $15 - 3 = 12$ است. بنابراین a هر عدد در بازه $[3, 15]$ می‌تواند باشد، پس (الف) و (ب) قابل قبول هستند.

واریانس

اگر داده‌ها برابر $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشند، واریانس آن‌ها را با نماد σ^2 نشان می‌دهند و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

تست واریانس داده‌های ۶، ۸، ۲، ۰، ۴ کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

$$1) \bar{x} = \frac{6 + 8 + 2 + 0 + 4}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$2) \sigma^2 = \frac{(6-4)^2 + (8-4)^2 + (2-4)^2 + (0-4)^2 + (4-4)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{4 + 16 + 4 + 16 + 0}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

انحراف معیار

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌نامند و با σ نشان می‌دهند.

تذکر واریانس و انحراف معیار اعداد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) هستند.

هر چه واریانس و انحراف معیار کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشند، داده‌ها به هم نزدیک‌تر هستند و هر چه این شاخص‌ها بزرگ‌تر باشند، داده‌ها از هم دورتر هستند و پراکندگی بیش‌تری دارند.

مثال اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_6$ برابر ۶ باشد، انحراف معیار کدام یک از گروه‌های زیر برابر ۸ است؟

الف) $\frac{4}{3}x_1 + 4, \frac{4}{3}x_2 + 4, \dots, \frac{4}{3}x_6 + 4$

ب) $2x_1 - 4, 2x_2 - 4, \dots, 2x_6 - 4$

پ) $\frac{1}{4}x_1 + 5, \frac{1}{4}x_2 + 5, \dots, \frac{1}{4}x_6 + 5$

۱ می‌دانیم اگر همه داده‌های آماری را a برابر کنیم و سپس همه آن‌ها را با عدد b جمع کنیم، انحراف معیار $|a|$ برابر می‌شود. پس:

الف) $\sigma_A = \frac{4}{3} \times 6 = 8$

ب) $\sigma_B = 2 \times 6 = 12$

پ) $\sigma_C = \frac{1}{4} \times 6 = 3$

ضریب تغییرات

به میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین، ضریب تغییرات گفته می‌شود و با نماد CV نشان داده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

تذکر از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود.

تست ضریب تغییرات داده‌های ۱۰ و ۹ و ۶ و ۴ و ۳ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۱) ب) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ (۲) ج) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (۳) د) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ (۴)

۴ برای سادگی محاسبه واریانس، از همه داده‌ها ۶ واحد کم می‌کنیم:

۱) $\bar{x} - 6 = \frac{(-3) + (-2) + (-2) + 0 + 3 + 4}{6} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 6$

۲) $\sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 3^2 + 4^2}{6}$
 $= \frac{9 + 4 + 4 + 0 + 9 + 16}{6} = 7 \Rightarrow \sigma = \sqrt{7}$

۳) $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{7}}{6}$

تذکر ۱ اگر همه داده‌ها در یک عدد مثبت ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند، اما اگر همه داده‌ها در یک عدد منفی ضرب شوند، ضریب تغییرات قرینه می‌شود.

تذکر ۲ اگر داده‌ها از x_i به $ax_i + b$ تغییر کنند، ضریب تغییرات جدید

$$CV = \frac{|a|\sigma}{a\bar{x} + b}$$

برابر است با:

نکته ۱ در سؤالاتی که صحبت از مجموع مربعات داده‌ها است، می‌توانیم واریانس را از رابطه زیر (که نتیجه‌ای از رابطه اصلی است) به دست آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

نکته ۲ اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ اضلاع تعدادی مربع باشند، آن‌گاه میانگین اضلاع آن‌ها برابر $\bar{x}$ است و با توجه به رابطه بالا، داریم:

مربع میانگین اضلاع: $(\bar{x})^2$
 میانگین مساحت مربع‌ها: $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$

تست مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این

داده‌ها ۳۴۰ است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

الف) $1/25$ (۱) ب) $2/5$ (۲) ج) $3/25$ (۳) د) $4/25$ (۴)

۲ چون مجموع مربعات داده‌ها را داریم، از رابطه دوم واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{340}{40} - \left(\frac{100}{40}\right)^2 = 8.5 - (2.5)^2$$

$$= 8.5 - 6.25 = 2.25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2.25} = 1.5$$

نکته اگر n داده آماری تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، می‌توانیم انحراف معیار را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \times d$$

تست انحراف معیار داده‌های ۳۲ و ۲۷ و ۲۲ و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲

کدام است؟

الف) ۵ (۱) ب) $6/5$ (۲) ج) $8/5$ (۳) د) ۱۰ (۴)

۴ این داده‌ها، ۷ جمله متوالی یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۵ هستند:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \times d \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{7^2 - 1}{12}} \times 5 = \sqrt{4} \times 5 = 10$$

تذکر اگر همه داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم، واریانس و انحراف معیار هیچ تغییری نمی‌کنند. اما اگر همه داده‌ها را در a ضرب کنیم، واریانس داده‌ها در a^2 و انحراف معیار آن‌ها در $|a|$ ضرب می‌شود.

اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر σ^2 باشد، واریانس و انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر هستند با:

$$\sigma_{\text{new}}^2 = a^2 \sigma^2$$

$$\sigma_{\text{new}} = |a| \sigma$$

مقایسه دقت کاری

به وسیله ضریب تغییرات می‌توانیم میزان پراکندگی در دو گروه مختلف از داده‌ها را با هم مقایسه کنیم. گروهی که ضریب تغییرات کم‌تری داشته باشد، عملکرد و دقت کاری بالاتری دارد.

نکته اگر میانگین دو گروه یکسان باشد، برای مقایسه دقت کاری می‌توانیم به جای مقایسه ضریب تغییرات، واریانس آن‌ها را مقایسه کنیم. گروهی که واریانس آن کم‌تر باشد، دقت کاری بالاتری دارد.

تست در یک کارگاه دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۴۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۳۳ و ۹ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

(۱) گروه اول	(۲) گروه دوم
(۳) یکسان	(۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

۲ گروهی بهتر است که ضریب تغییرات کم‌تری داشته باشد:

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{25}}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{9}}{33} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$$

چون $CV_2 < CV_1$ است، بنابراین گروه دوم بهتر است.

تست ضریب تغییرات تعدادی داده آماری برابر ۱/۳۵ است. اگر به دو برابر این داده‌های آماری، عدد $\frac{1}{4}$ میانگین آن‌ها افزوده شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چقدر است؟ (خارج - ۹۴)

(۱) ۰/۹۶ (۲) ۱/۰۸ (۳) ۱/۱۵ (۴) ۱/۲

۴ ضریب تغییرات داده‌های اولیه برابر $\frac{\sigma}{\bar{x}} = ۱/۳۵$ است. حال در داده‌های جدید داریم:

$$CV_{\text{new}} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + \frac{1}{4}\bar{x}} = \frac{2\sigma}{\frac{9}{4}\bar{x}} = \frac{2}{9} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{9} \times ۱/۳۵ = ۱/۲$$

تست میانگین سن بازیکنان تیم ملی والیبال ایران ۲۴ سال است. اگر پس از گذشت ۶ سال، ضریب تغییرات سن بازیکنان ۰/۰۴ شود، انحراف معیار سن آن‌ها چقدر می‌شود؟

(۱) ۱/۱ (۲) ۱/۲ (۳) ۱/۲۵ (۴) ۱/۴

۲

پس از گذشت ۶ سال، میانگین سن بازیکنان برابر ۳۰ سال می‌شود و انحراف معیار سن آن‌ها تغییری نمی‌کند، پس:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۰/۰۴ = \frac{\sigma}{24+6} \Rightarrow \sigma = 3 \times ۰/۰۴ = ۱/۲$$

یادداشت:

شمارش، بدون شمردن

فصل

ارتباط با فصل‌های دیگر: برای شمارش بدون شمردن فقط نیاز است که چهار عمل اصلی را بلد باشید. شمارش بدون شمردن فصل ششم سال دهم می‌باشد که اساس فصل احتمال است و بدون تسلط کامل به این فصل هیچ‌کاری در احتمال پیش نخواهید برد. حل مسائل این فصل، به تفکر و خلاقیت بیش‌تری نسبت به سایر فصل‌ها نیاز دارد.

توصیه: در سال‌های اخیر تست‌های بسیار متنوعی از این فصل در کنکور مطرح شده است، که نشان‌دهنده انعطاف بالای سؤالات این بخش است. پیشنهاد می‌شود برای درک و تحلیل بهتر به مفهوم سؤال و حالت‌بندی موجود در حل، خیلی دقت کنید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۱	۱	۱	صفر	۱	۱	صفر	۱



درس شمارش

۲ اگر تولید شدن اتومبیل را یک کار در نظر بگیریم این کار از چهار بخش نوع دنده و حجم موتور و نام رنگ و مدل اتومبیل تشکیل می‌شود، پس تمام نوع اتومبیل تولیدی برابر است با:

$$\begin{matrix} \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{5} & \times & \boxed{3} \\ \text{دنده} & & \text{موتور} & & \text{رنگ} & & \text{مدل} \end{matrix} = 60$$

چون در این سؤال تعداد اتومبیل دنده اتوماتیک خواسته شده است، پس برای نوع دنده یک انتخاب داریم:

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{5} & \times & \boxed{3} \\ \text{دنده} & & \text{موتور} & & \text{رنگ} & & \text{مدل} \end{matrix} = 30$$

تست تعداد جملات حاصل ضرب $(z+t)(a+b+c)(x-y)$ چند تا است؟

۱۲ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

۱ تعداد جملات ضرب دو یا چند عبارت چند جمله‌ای در هم به شرطی که تمام جملات دو به دو غیر متشابه باشند برابر است با حاصل ضرب تعداد جملات آن عبارت‌ها:

$$(z+t)(a+b+c)(x-y)$$

۲ جمله‌ای سه جمله‌ای ۲ جمله‌ای

چون هر دوتایی از جملات غیر متشابه‌اند تعداد جملات برابر است با:

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

اصول شمارش

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، در مرحله دوم n روش وجود داشته باشد، تعداد راه‌های انجام این کار برابر با $m \times n$ است.

[اصل ضرب برای چند عمل هم قابل تعمیم است.]

تذکر اصل ضرب در زبان فارسی، معادل کلمه «و» است.

مثال شخصی دارای ۴ کاپشن با رنگ مختلف، ۳ پیراهن با رنگ مختلف و ۲ شلوار با رنگ مختلف است. او به چند طریق می‌تواند این لباس‌ها را بپوشد؟

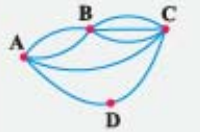
اگر پوشیدن این لباس‌ها را یک کار در نظر بگیریم، این کار از سه مرحله یعنی پوشیدن کاپشن، پوشیدن پیراهن و پوشیدن شلوار تشکیل شده است. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$2 \times 3 \times 4 = 24 = \text{تعداد حالت‌های پوشیدن لباس}$$

تست در یک کارخانه و خودرو سازی نوعی اتومبیل در ۳ مدل، ۵ رنگ، ۲ حجم موتور و ۲ نوع دنده اتوماتیک و غیر اتوماتیک تولید می‌شود. در این کارخانه چند نوع اتومبیل دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟

۲۰ (۱) ۳۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴)

تست شهرهای A, B, C, D مطابق راه‌های مشخص شده به هم متصل شده‌اند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟ (از هر شهر فقط یک بار عبور کنید.)



- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

۳ برای رفتن از شهر A به شهر D می‌توان از یکی از سه مسیر زیر استفاده کرد:

مسیر ۱: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

از A به B دو مسیر و از B به C سه مسیر و از C به D یک مسیر است، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های رفتن از مسیر ۱ برابر است با:

$$2 \times 3 \times 1 = 6$$

مسیر ۲: $A \rightarrow C \rightarrow D$

از A به C یک مسیر و از C به D نیز یک مسیر موجود است، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های رفتن از مسیر ۲ برابر است با:

$$1 \times 1 = 1$$

مسیر ۳: $A \rightarrow D$

از A به D یک مسیر مستقیم موجود است، پس تعداد حالت مسیر ۳ برابر ۱ است. بنابراین از مسیر ۱، یا مسیر ۲ یا مسیر ۳ استفاده می‌شود. پس طبق اصل جمع داریم:

$$6 + 1 + 1 = 8$$

عددنویسی

برای ساختن یک عدد n رقمی با ارقام داده شده، ابتدا n جای خالی در نظر می‌گیریم و معمولاً خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم.

حال به نکات زیر توجه کنید:

۱ رقم سمت چپ هیچ عددی، صفر نیست.

مثال با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

یکی از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در خانه سمت چپ قرار می‌دهیم. سپس به کمک چهار رقم دیگر و صفر، خانه وسط را پُر می‌کنیم و در آخر خانه سمت راست را پُر می‌کنیم:

$$\boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 100$$

غیر صفر

۲ اگر خانه‌ای دارای محدودیت با شرایط خاصی باشد، باید اول سراغ آن خانه‌ها برویم و آن‌ها را پُر کنیم. [مثلاً برای سافتن عدد زوج، مضرب ۵ و ... باید ابتدا خانه سمت راست را پُر کنیم.]

مثال با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

خانه سمت راست را با کمک یکی از ارقام ۲ یا ۴ پُر می‌کنیم. سپس بقیه خانه‌ها را با کمک چهار رقم باقی مانده پُر می‌کنیم:

$$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 24$$

{2, 4}

توجه اگر عبارات دارای جملات متشابه باشند، ممکن است تعداد جملات مانده پس از ضرب و ساده کردن کمتر باشد.

مثلاً اگر تعداد جملات $(a+b)(a+2+b)$ را بخواهیم:

$$a^2 + 2a + \underbrace{ab + ab + 2b + b^2}_{2ab} = a^2 + 2a + 2ab + 2b + b^2$$

حاصل ضرب برابر ۵ جمله شد.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر m + n روش وجود دارد. [اصل جمع برای چندین عمل هم قابل تعمیم است.]

تذکر اصل جمع در زبان فارسی، معادل کلمه «یا» است.

مثال ۱ علی دارای ۵ شلوار جین، ۳ شلوار پارچه‌ای و ۶ شلوار کتان است. او به چند طریق می‌تواند یکی از آنها را بپوشد؟

علی نمی‌تواند شلوارها را با هم بپوشد. در واقع علی یا شلوار جین می‌پوشد یا شلوار پارچه‌ای یا شلوار کتان. پس از اصل جمع استفاده می‌شود.

$$\text{تعداد شلوار کتان} + \text{تعداد شلوار پارچه‌ای} + \text{تعداد شلوار جین} = \text{تعداد کل حالات}$$

$$= 5 + 3 + 6 = 14$$

بنابراین علی به ۱۴ طریق مختلف می‌تواند شلوار بپوشد.

مثال ۲ مطابق شکل، سه شهر A, B, C توسط راه‌های مشخص شده به هم متصل شده‌اند. به چند طریق می‌توان:



الف) از شهر A به شهر C رفت؟

برای رفتن از A به B، ۲ راه و برای رفتن از B به C، ۳ راه وجود دارد. پس طبق اصل ضرب، به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت.

ب) از شهر A به شهر C رفت و برگشت؟

به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌توان از A به C رفت و به $3 \times 2 = 6$ طریق می‌توان از C به A برگشت. پس طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های رفت و برگشت برابر $6 \times 6 = 36$ است.

پ) از شهر A به شهر C رفت و برگشت به طوری که مسیر رفت و برگشت متمایز باشد؟

به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌توان از A به C رفت. اما اگر برای رفت از

مسیر A → B → C برویم، برای برگشت نباید از این مسیر برگردیم و از تعداد مسیرهای برگشت، یک واحد کم می‌شود. پس تعداد مسیرهای رفت و برگشت، برابر $6 \times (6 - 1) = 30$ است.

ت) از شهر A به شهر C رفت و برگشت به طوری که از هیچ جاده‌ای دو بار عبور نکنیم؟

اگر برای رفت از مسیر A → B → C برویم، برای برگشت

نمی‌توانیم از مسیرهای A → B و B → C استفاده کنیم؛ پس:

$$12 = (2 \times 3) \times (2 \times 1) = 12$$

تعداد راه‌های رفت و برگشت

تست با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز

می‌توان نوشت؟

۱۴۴ (۱) ۶۰ (۲) ۲۰۴ (۳) ۱۹۶ (۴)

۳ می‌دانیم یکان این عدد باید زوج باشد. اگر رقم سمت راست صفر باشد، محدودیتی برای سایر خانه‌ها نداریم ولی اگر یکی از اعداد {۲، ۴، ۶} خانه سمت راست را پُر کنند، رقم خانه سمت چپ نباید صفر باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{5} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{1} & + & \textcircled{2} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{3} \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \{0\} & & \text{غیر صفر} & & & & & & \{2, 4, 6\} \end{array}$$

$$= 60 + 144 = 204$$

۴ برای ساختن کُد (رمز) رقم سمت چپ می‌تواند صفر باشد، در حالی‌که رقم سمت چپ هیچ عددی صفر نیست.

مثال به چند طریق می‌توان یک رمز با چهار کاراکتر تشکیل داد

به طوری‌که دو کاراکتر سمت چپ از بین ارقام {۰، ۱، ۲، ۳، ۴} و دو کاراکتر سمت راست از بین حروف {a, b, c} باشند؟ محدودیتی برای استفاده از کاراکترهای تکراری نداریم، پس:

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{5} & \times & \textcircled{5} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{3} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \{0, 1, 2, 3, 4\} & & \{a, b, c\} & & \end{array} = 225$$

تست شیدا رمز ۴ رقمی کارت بانکی خود را فراموش کرده است. او می‌داند در رمزش فقط از ارقام {۰، ۸، ۵} استفاده کرده است. اگر چک کردن هر رمز ۳ ثانیه زمان بگیرد، حداکثر پس از چند ثانیه به رمز کارت بانکی خود می‌رسد؟

۹۲۷ (۴) ۲۴۳ (۳) ۷۲۹ (۲) ۸۱ (۱)

۳ در رمز گذاری محدودیتی نداریم بنابراین هر کدام از ۴ خانه رمز می‌توانند با یکی از ارقام {۰، ۸، ۵} پُر شوند.

$$\textcircled{3} \times \textcircled{3} \times \textcircled{3} \times \textcircled{3} = 81$$

چون چک کردن هر رمز ۳ ثانیه طول می‌کشد، حداکثر زمان مورد نیاز برابر است با: $81 \times 3 = 243$ ثانیه

در چه سؤالاتی تکرار ارقام مجاز است؟

در سؤالات ساختن عدد، باید در صورت سؤال به مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام به وضوح اشاره شود. اما اگر صحبتی در رابطه با مجاز بودن تکرار ارقام نشود، تکرار ارقام مجاز است. البته بیان جملاتی مانند «با کنار هم قرار گرفتن ارقام ...» یا «تعداد جایگشت‌های موجود با ارقام ...» یا «تعداد اعدادی که با ارقام عدد ... می‌توان ساخت» تکرار ارقام را غیرمجاز می‌کند.

مثال با ارقام ۲، ۳، ۷، ۱ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

چون صحبتی از مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام نشده است، پس تکرار ارقام را مجاز در نظر می‌گیریم، بنابراین برای هر خانه تمام ارقام {۲، ۳، ۷، ۱} می‌توانند استفاده شوند.

$$\textcircled{4} \times \textcircled{4} \times \textcircled{4} = 64$$

تست با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ چند عدد چهار رقمی فرد با ارقام متمایز

می‌توان ساخت؟

۱۴۴ (۴) ۲۴ (۳) ۴۸ (۲) ۹۶ (۱)

۱ خانه سمت راست را با یکی از ارقام {۳، ۵} پُر می‌کنیم، سپس خانه سمت چپ با یکی از اعداد {۲، ۴، ۶} و عدد مانده بین ۳ و ۵ پُر می‌شود، بقیه خانه‌ها با چهار رقم باقی‌مانده پُر می‌شوند.

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{4} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{2} \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \{2, 4, 6\} \end{array} = 96$$

و یکی بین ۳ و ۵

در برخی مسائل شمارش، باید تعداد اعداد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از عدد خاصی را پیدا کنیم.

مثال چند عدد ۵ رقمی با رقم‌های زوج و متمایز می‌توان ساخت که

کوچک‌تر از ۵۰۰۰۰ باشند؟

چون می‌خواهیم با رقم‌های زوج عدد نویسی انجام دهیم، مجموعه ارقام {۰، ۲، ۴، ۶، ۸} است. برای اینکه عدد ساخته‌شده کوچک‌تر از ۵۰۰۰۰ باشد، باید رقم سمت چپ از اعداد {۲، ۴} انتخاب شود و سایر خانه‌ها با ارقام باقی‌مانده پُر می‌شوند.

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{2} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{2} & \times & \textcircled{1} \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & \{2, 4\} & & \end{array} = 48$$

تست چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰

وجود دارد؟

۷۲ (۴) ۹۶ (۳) ۴۸ (۲) ۲۵۰ (۱)

۳ چون می‌خواهیم عدد نویسی را با ارقام فرد انجام دهیم، مجموعه ارقام {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} است.

برای اینکه عدد ساخته‌شده بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ باشد، رقم سمت چپ نمی‌تواند {۱} باشد، پس یکی از اعداد {۳، ۵، ۷، ۹} است، با کم شدن یکی از این اعداد سایر خانه‌ها با ۴ رقم باقی‌مانده پُر می‌شوند.

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{4} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{3} & \times & \textcircled{2} \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \{3, 5, 7, 9\} \end{array} = 96$$

۳ برای ساختن عدد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار ارقام، اگر بین ارقام داده شده صفر وجود داشته باشد، مسئله را در ۲ حالت حل می‌کنیم؛ یعنی تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر نیست را جداگانه و تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر است را جداگانه محاسبه می‌کنیم و در نهایت جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با

ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

اگر رقم سمت راست صفر باشد، برای بقیه خانه‌ها محدودیتی وجود ندارد. اما اگر رقم سمت راست ۵ باشد، رقم سمت چپ نباید صفر باشد، پس:

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{5} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{1} & + & \textcircled{4} & \times & \textcircled{4} & \times & \textcircled{1} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & \{0\} & & \text{غیر صفر} & & & & \{5\} \end{array} = 20 + 16 = 36$$

اصل متمم (اصل تفریق)

در بعضی مسائل، محاسبه تعداد حالت‌هایی که مسئله نمی‌خواهد، از محاسبه تعداد حالت‌های موردنظر راحت‌تر است؛ پس می‌توانیم ابتدا تعداد حالت‌های نامطلوب را محاسبه کنیم و از تعداد کل حالت‌های ممکن کم کنیم. این اصل را اصل تفریق یا متمم می‌نامند.

مثال با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت به طوری که شامل رقم ۳ باشد؟

تعداد کل اعداد چهاررقمی با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به دست می‌آوریم و تعداد اعداد چهاررقمی فاقد ۳ را کنار می‌گذاریم:

$$۹۶ = ۱۲۰ - ۲۴ = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ - ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

تست چند عدد سه رقمی وجود دارد که حداقل یک بار در آن، رقم ۶

استفاده شده است؟

$$۶۴۸ (۱) \quad ۶۵۲ (۲) \quad ۲۶۸ (۳) \quad ۲۵۲ (۴)$$

۱۴ ابتدا تعداد تمام اعداد سه رقمی را محاسبه می‌کنیم:

$$۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$$

به جز صفر

سپس تعداد تمام اعداد سه رقمی فاقد ۶ را به دست می‌آوریم، یعنی تعداد اعداد سه رقمی‌ای را که با ارقام {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹} قابل ساختن‌اند را به دست می‌آوریم:

$$۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸$$

بنابراین تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک ۶ دارند برابر است با: تعداد سه رقمی‌هایی که فاقد ۶ اند - تعداد کل سه رقمی‌ها
 $= ۹۰۰ - ۶۴۸ = ۲۵۲$

درس فاکتوریل و جایگشت

فاکتوریل

فاکتوریل: حاصل ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را به صورت n! نشان می‌دهند و آن را «n فاکتوریل» می‌خوانند. بنابراین:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

تذکر با توجه به تعریف فاکتوریل می‌دانیم $1! = 1$ است. طبق قرارداد $0! = 1$ است. بهتر است فاکتوریل‌های زیر را حفظ باشید:

$$۱! = ۱ \quad ۲! = ۲ \quad ۳! = ۶ \quad ۴! = ۲۴ \quad ۵! = ۱۲۰ \quad ۶! = ۷۲۰$$

مثال درستی یا نادرستی عبارات زیر را تشخیص دهید.

الف) $۳! + ۳! = ۶!$ (ب) $۴! + ۲! = ۸!$

پ) $۴! = (۲!)^۲$ (ت) $(n+1)! = (n+1) \times n!$

الف) نادرست است.

$$\begin{cases} ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰ \\ ۳! + ۳! = (۳ \times ۲ \times ۱) + (۳ \times ۲ \times ۱) = ۱۲ \end{cases}$$

توجه در حالت کلی $(a+b)! \neq a! + b!$ است.

(ب) نادرست است.

$$\begin{cases} ۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴۰۳۲۰ \\ ۴! + ۲! = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) + (۲ \times ۱) = ۲۶ \end{cases}$$

توجه در حالت کلی $(ab)! \neq a! + b!$ است.

(پ) نادرست است. $(۲!)^۲ = (۲ \times ۱)^۲ = ۲^۲ = ۴$
 $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

توجه در حالت کلی $(a^n)! \neq (a!)^n$ است.

(ت) درست است.

$$(n+1)! = (n+1) \times \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1}_n = (n+1) \times n!$$

جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها در کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

مثلاً، سه نفر با اسامی A و B و C به حالت‌های زیر می‌توانند در یک ردیف بنشینند:

ABC ACB BAC BCA CBA CAB

برای محاسبه تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، n خانه در نظر می‌گیریم. خانه اول را به n طریق، خانه بعدی را به $n-1$ طریق و ... و خانه آخر را به ۱ طریق می‌توان پُر کرد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

مثلاً، تعداد حالت‌هایی که ۴ نفر می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، برابر $۴! = ۲۴$ است.

تست با حروف کلمه «FACTOR» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت

که با حروف صدادار شروع و به حرف T ختم شود.

$$۲۴ (۱) \quad ۴۸ (۲) \quad ۹۶ (۳) \quad ۱۴۴ (۴)$$

۲ سؤال جای حرف T را مشخص کرده پس در خانه آخر ۱ حالت داریم. برای پُر کردن خانه اول نیز باید یکی از دو حرف صدادار {A, O} را انتخاب کنیم. ۴ خانه وسط نیز با ۴ حرف باقی‌مانده به ۴! حالت تکمیل می‌شود.

$$۴! \times ۲ = ۴۸$$

$$\{A, O\} \quad \{T\}$$

ب) اگر تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشند، به دو حالت می‌توانیم آن‌ها را کنار هم قرار دهیم. در این حالت باید تعداد جایگشت‌های هر گروه را محاسبه و جواب را در ۲ ضرب کنیم.

$$\begin{array}{cccccc} \square & \circ & \square & \circ & \square & \circ \\ \circ & \square & \circ & \square & \circ & \square \end{array} \Rightarrow 2 \times 3! \times 3!$$

تست با جابه‌جایی ارقام «۵۷۶۲۲۲» چند عدد شش‌رقمی می‌توان

تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

$$9(1) \quad 12(2) \quad 18(3) \quad 34(4)$$

۲ چون می‌خواهیم ۲ها یکی در میان قرار گیرند، دو حالت داریم:

$$2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \text{ یا } 2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \Rightarrow 3! + 3! = 12$$

تست حروف "KETABIQ" را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار

داد، به طوری که حروف صدادار و بی صدا یک در میان باشند؟

$$144(1) \quad 160(2) \quad 196(3) \quad 180(4)$$

۱ از میان ۷ حرف داده شده، ۳ حرف صدادار {E, A, I} و ۴ حرف بی صدا {K, T, B, Q} هستند. پس مطابق حالت اول درسنامه این گروه یک واحد اختلاف دارند و تنها حالت چیدمان آنها به صورت زیر است:



که تعداد حالت آن برابر است با: $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

۳ کنار هم بودن: اگر بخواهیم جایگشت ۱۱ شیء را پیدا کنیم به طوری که چند شیء مشخص کنار هم باشند، ابتدا آن اشیاء را درون یک بسته قرار می‌دهیم و این بسته را به عنوان یک عضو در نظر می‌گیریم و جایگشت آن را با بقیه اعضا محاسبه می‌کنیم، سپس حاصل را در جایگشت اشیاء درون بسته ضرب می‌کنیم.

مثال ۳ دختر و ۴ پسر به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم

قرار گیرند، به طوری که:

الف) دخترها کنار هم باشند؟

۳ دختر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت بسته و ۴ پسر را محاسبه و آن را در جایگشت دخترها ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{د} & \boxed{د} & \boxed{د} & پ & پ & پ & پ \end{array} \Rightarrow 5! \times 3! = 720$$

ب) هر ۳ دختر کنار هم نباشند؟

تعداد جایگشت‌هایی که ۳ دختر کنار هم هستند را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$$7! - 5! \times 3! = 7 \times 6 \times 5! - 6 \times 5! = (7-1) \times 6 \times 5! = 4 \times 3 \times 2 \times 5! = 4320$$

در مثال قبل، اگر بخواهیم هیچ دو دختری کنار هم نباشند باید بین پسرهای جای خالی در نظر بگیریم و جایگشت ۴ پسر را حساب کنیم. حال پنج جای خالی ایجاد شده است که باید ۳ دختر را طبق اصل ضرب در آن‌ها قرار دهیم.

دختر اول ۵ انتخاب دارد، دختر دوم ۴ انتخاب و دختر بعدی ۳ انتخاب، یعنی:

$$\begin{array}{ccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \Rightarrow 4! \times 5 \times 4 \times 3 \end{array}$$

دخترها

انواع جایگشت

۱ جایگشت با تکرار: اگر بخواهیم جایگشت ۱۱ شیء را پیدا کنیم که ۱۱ تایی آن‌ها شبیه هم، ۱۱ تایی دیگر نیز شبیه هم، ... و ۱۱ تایی آن‌ها شبیه هم باشند، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

تست با حروف کلمه «DAMDAR» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

$$360(1) \quad 180(2) \quad 96(3) \quad 360(4)$$

۳ از حرف A دو تا و از حرف D نیز دو تا داریم، پس: $\frac{6!}{2!2!} = 180$

تست با حروف کلمه «MANDANA» چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

$$180(1) \quad 360(2) \quad 420(3) \quad 210(4)$$

۲ کلمه MANDANA دارای ۳ حرف A و دو حرف N است، بنابراین: $n = 7$ تعداد کل حروف

$$n_1 = 3 \text{ تعداد تکرارهای حرف A}$$

$$\Rightarrow \frac{7!}{3! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 420$$

$$n_2 = 2 \text{ تعداد تکرارهای حرف N}$$

نکته تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی از n شیء با تعداد جایگشت‌های n تایی آن‌ها برابر است. این نکته هم برای اشیاء تکراری و هم برای اشیاء غیرتکراری برقرار است.

تست با حروف کلمه «Colour» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

$$360(1) \quad 320(2) \quad 290(3) \quad 270(4)$$

۴ کلمه «Colour» از ۶ حرف تشکیل شده است؛ بنابراین تعداد کلمات ۵ حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد کلمات ۶ حرفی است، پس:

$$\frac{6!}{2!} = 360 = \text{تعداد جایگشت‌های ۶ تایی} = \text{تعداد جایگشت‌های ۵ تایی}$$

مثال با ارقام ۳۳۴۴۲۲۲ چند عدد فرد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

چون می‌خواهیم عدد فرد باشد، رقم یکان حتماً ۳ است. پس با ۶ رقم باقی‌مانده سایر خانه‌ها را پر می‌کنیم.

$$\begin{array}{c} 3, 4, 4, 2, 2, 2 \\ \boxed{3} \end{array} \Rightarrow \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

یکان تکرار رقم ۲ تکرار رقم ۴

۲ جایگشت یکی در میان: برای این که بتوانیم دو گروه از اشیاء را به صورت

یکی در میان کنار هم قرار دهیم، دو حالت داریم:

الف) اگر تعداد اعضای دو گروه، یک واحد اختلاف داشته باشد، باید چیدن با گروهی شروع شود که تعداد عضو بیش‌تری دارد. در این حالت جایگشت‌های هر گروه را محاسبه کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \Rightarrow 4! \times 3! \end{array}$$

مثال با حروف کلمه «وطن پرستی» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت که:

الف) «وطن» دیده شود؟

در این حالت کلمه وطن را یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت آن با سایر حروف {پ، ر، س، ت، ی} را محاسبه می‌کنیم:

$$۷! = ۷ \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ۵۰۴۰$$

ب) در آن حروف کلمه «وطن» کنار هم باشند؟

در این حالت حروف کلمه {وطن} را درون یک بسته قرار می‌دهیم و جایگشت این بسته را و ۵ حرف {پ، ر، س، ت، ی} را محاسبه می‌کنیم:

$$۶! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ۷۲۰$$

۴ جایگشت دایره‌ای: اگر n نفر بخواهند دور یک میز دایره‌ای بنشینند، تعداد کل حالت‌های ممکن برابر با $(n-1)!$ است.

مثال ۳ دختر و ۲ پسر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد قرار گیرند؟

چون هیچ محدودیتی برای قرار گرفتن این ۵ نفر دور میز گرد وجود ندارد، پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۵! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ۱۲۰$$

نکته در میز گرد، اگر شخص (یا اشخاصی) در جای مشخصی دور میز قرار گیرند، جایگشت بقیه افراد را مانند جایگشت خطی در نظر می‌گیریم.

مثال ۴ پسر و ۴ دختر به چند طریق می‌توانند به صورت یک در میان دور یک میز گرد قرار بگیرند؟

ابتدا ۴ پسر به $(4-1)!$ حالت دور میز گرد قرار می‌گیرند. اما چون جایگاه پسرها در میز گرد مشخص شد، ۴ دختر باید به $4!$ حالت در ۴ جای خالی بنشینند و دیگر با میز گرد مواجه نیستند.

$$۴! \times 3! = 24 \times 6 = ۱۴۴$$

تست ۴ زن و شوهر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، به طوری که هر مرد کنار همسرش باشد؟

$$۲۴(۱) \quad ۴۸(۲) \quad ۹۶(۳) \quad ۱۱۲(۴)$$

۳ هر زن و شوهر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت دوری ۴ بسته را در جایگشت هر زن و شوهر درون بسته ضرب می‌کنیم:



$$۹۶ = ۶ \times ۱۶ = ۶ \times (۴!) \times (۲!)^4$$

نکته می‌دانیم $n!$ شی به $n!$ حالت جایگشت داده می‌شود. ممکن است سؤال بخواهد ترتیب خاصی بین این $n!$ شی برقرار باشد، مثلاً شی خاصی قبل یا بعد از شی دیگری بیاید، تعداد حالتی که r تا از n شی ترتیب خاصی داشته باشند، برابر است با:

$$\frac{n!}{r!}$$

مثال علی و حسن به همراه ۳ نفر دیگر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند، در چند حالت علی بعد از حسن سخنرانی می‌کند؟

این نفرات کلاً ۵ نفر هستند که دو نفر آنها «علی و حسن» ترتیب خاصی دارند.

بنابراین می‌نویسیم:

$$۶! = \frac{۵!}{۲} = ۱۲۰ \rightarrow \text{کل نفرات}$$

$$\rightarrow \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰ \rightarrow \text{ترتیب خاص برای ۲ نفر}$$

درس ترکیب و ترتیب

ترکیب و ترتیب

فرض کنید n شیء متمایز داریم و می‌خواهیم r تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. دو حالت داریم:

۱ ترتیب: اگر ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم باشد، باید تعداد جایگشت‌های آن r شیء را حساب کنیم ($r < n$). تعداد حالات ممکن طبق اصل ضرب برابر است با:

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

در واقع منظور از ترتیب، انتخاب همراه با جایگشت است. (البته می‌توانیم از اصل ضرب هم استفاده کنیم.)

مثال به چند طریق می‌توان از بین ۵ کتاب متمایز، ۳ کتاب را انتخاب و در یک قفسه کنار هم قرار داد؟

ابتدا باید ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب کنیم و آن‌ها را به شکل‌های مختلف کنار هم بچینیم. پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$p(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = ۶۰$$

البته می‌توانستیم سه خانه در نظر بگیریم و از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

تست ۶ دوست می‌خواهند عکس یادگاری ۵ و ۶ نفره بگیرند. تعداد

حالت‌های عکس ۵ نفره چند برابر عکس ۶ نفره است؟

$$۱(۱) \quad ۲(۲) \quad ۳(۳) \quad ۴(۴) \quad ۵(۵)$$

۱ عکس ۶ نفره به $6!$ حالت قابل انجام است و برای عکس ۵ نفره $p(6, 5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$p(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = ۶!$$

پس تعداد دو حالت با هم برابر است.

یادآوری: تعداد جایگشت‌های n و $(n-1)$ تایی از n شی با هم برابر است.

۲ ترکیب: اگر ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، تعداد راه‌های ممکن

را که با نماد $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در واقع انتخاب‌هایمان بدون جایگشت هستند.

تذکر حفظ بودن ترکیب‌های زیر، در حل سریع‌تر تست‌ها کمک‌کننده است:

$$\begin{aligned} \binom{3}{2} &= 3 & \binom{4}{2} &= 6 & \binom{5}{2} &= 10 & \binom{6}{2} &= 15 \\ \binom{4}{3} &= 4 & \binom{5}{3} &= 10 & \binom{6}{3} &= 20 & \binom{7}{3} &= 35 \end{aligned}$$

نکته برای محاسبه سریع‌تر $\binom{n}{r}$ می‌توانیم تعداد r خط کسری در نظر بگیریم و کسر اول را به صورت $\frac{n}{r}$ بنویسیم. سپس یک واحد از صورت کسر و یک واحد از مخرج کسر کم کنیم و اعداد حاصل را در کسر بعدی بنویسیم و این کار را ادامه دهیم تا مخرج آخرین کسر ۱ شود.

$$\binom{6}{3} = \frac{6}{\cancel{3}} \times \frac{5}{\cancel{2}} \times \frac{4}{1} = 20$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9}{\cancel{4}} \times \frac{8}{\cancel{3}} \times \frac{7}{\cancel{2}} \times \frac{6}{1} = 126$$

تست در یک پرواز داخلی ۳ جای خالی در هواپیما موجود است و ۷ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر را سوار هواپیما کرد؟

$$28 \quad (4) \quad 35 \quad (3) \quad 15 \quad (2) \quad 21 \quad (1)$$

۳ به ترتیب خاصی برای سوار شدن اشاره نشده، پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{1} = 35$$

نکته در خیلی از سوالات ترکیب، انتخاب‌ها از بین چند گروه انجام می‌شود که نیاز به حالت بندی و سپس استفاده از اصل جمع دارد.

تست به چند طریق می‌توان از بین ۸ عدد مثبت و ۶ عدد منفی، ۳ عدد انتخاب کرد، به طوری که حاصل ضرب آن‌ها منفی باشد؟

$$154 \quad (4) \quad 164 \quad (3) \quad 188 \quad (2) \quad 125 \quad (1)$$

۲ برای این که ضرب سه عدد منفی باشد، دو حالت داریم: الف) هر سه عدد منفی باشند؛

ب) یک عدد منفی و دو عدد مثبت باشند.

$$\binom{6}{3} = \frac{6}{3} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{1} = 20$$

(ب) یک عدد منفی و دو عدد مثبت باشند.

$$\binom{6}{1} \times \binom{8}{2} = \frac{6}{1} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{1} = 6 \times 28 = 168$$

پس حالت الف) یا حالت ب) باید رخ دهد:

$$20 + 168 = 188$$

مثال به چند طریق می‌توان از بین پنج نفر، یک کمیته ۳ نفری تشکیل داد؟

چون ترتیب افراد انتخاب شده اهمیتی ندارد، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

نکته اگر ارزش بعضی از اشیاء متفاوت باشد، باید آن‌ها را در مرحله‌های جداگانه انتخاب کنیم.

مثال به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر، یک کمیته ۴ نفری تشکیل داد، به طوری که اولی رئیس و دومی معاون باشد؟

ابتدا رئیس را جداگانه انتخاب می‌کنیم، سپس معاون را جداگانه انتخاب می‌کنیم و در آخر ۲ نفر دیگر را با هم انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{2} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

قوانین محاسبه ترکیب

فرض کنید n شیء متمایز داریم:

۱ اگر بخواهیم همه را انتخاب کنیم یا هیچ‌کدام را انتخاب نکنیم، فقط یک راه وجود دارد. یعنی:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

۲ اگر بخواهیم یکی از آن‌ها یا $(n-1)$ تا از آن‌ها را انتخاب کنیم، n راه مختلف وجود دارد. یعنی:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

۳ در حالت کلی رابطه مقابل برای هر $r \leq n$ برقرار است:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

از این قانون، نتیجه می‌گیریم اگر $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2}$ باشد، آن‌گاه:

$$r_1 = r_2 \text{ یا } r_1 + r_2 = n$$

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $\binom{8}{x+2} = \binom{8}{2x-3}$ باشند، مقدار $x_1^2 + x_2^2$ کدام است؟

$$42 \quad (4) \quad 38 \quad (3) \quad 34 \quad (2) \quad 27 \quad (1)$$

۲ از تساوی $\binom{8}{x+2} = \binom{8}{2x-3}$ دو نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$1) x+2 = 2x-3 \Rightarrow x=5$$

$$2) (x+2) + (2x-3) = 8 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

تست از معادله $C(n,2) + P(n,2) = 18$ مقدار $\binom{2n}{3}$ کدام است؟

$$56 \quad (4) \quad 35 \quad (3) \quad 20 \quad (2) \quad 10 \quad (1)$$

$$C(n,2) + P(n,2) = 18 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 18$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 18 \Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow \frac{4 \times 3 = 12}{n=4}$$

$$\binom{2n}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

انتخاب شامل و فاقد

اگر بخواهیم از بین n شیء r شیء را انتخاب کنیم به طوری که:

۱ شامل k شیء مشخص باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

۲ فاقد k شیء مشخص باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k}{r}$$

۳ شامل k_1 شیء و فاقد k_2 شیء مشخص باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k_1-k_2}{r-k_1}$$

مثال از مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ به چند طریق می‌توان یک

زیرمجموعه ۳ عضوی انتخاب کرد، به طوری که:

الف) شامل عضو a باشد؟

عضو a را انتخاب و در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. پس زیرمجموعه را

به صورت $\{a, -, -\}$ در نظر می‌گیریم و ۲ عضو دیگر زیرمجموعه را

از بین اعضای $\{b, c, d, e\}$ انتخاب می‌کنیم، پس:

$$\binom{4}{2} = 6$$

ب) فاقد عضو b باشد؟

عضو b را کنار می‌گذاریم و ۳ عضو زیرمجموعه را از بین اعضای

$\{a, c, d, e\}$ انتخاب می‌کنیم، پس:

$$\binom{4}{3} = 4$$

پ) شامل عضو a و فاقد عضو b باشد؟

عضو a را انتخاب و در زیرمجموعه قرار می‌دهیم و عضو b را کنار

می‌گذاریم، پس زیرمجموعه را به صورت $\{a, -, -\}$ در نظر

می‌گیریم و ۲ عضو دیگر این زیرمجموعه را از بین اعضای $\{c, d, e\}$

انتخاب می‌کنیم، پس:

$$\binom{3}{2} = 3$$

قاعده پاسکال: هر انتخاب r شیء از n شیء، یا شامل یک شیء مشخص

است یا فاقد آن، بنابراین داریم:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

مثلاً:

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$$

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$$

مثال از تساوی $\binom{5}{n+1} + \binom{5}{n} = \binom{6}{n}$ چند مقدار برای n وجود دارد؟

با استفاده از قاعده پاسکال، سمت چپ تساوی را ساده‌تر می‌نویسیم.

$$\binom{5}{n+1} + \binom{5}{n} = \binom{6}{n+1}$$

حالا تساوی زیر را حل می‌کنیم:

$$\binom{6}{n+1} = \binom{6}{4} \Rightarrow \begin{cases} n+1=4 \Rightarrow n=3 \\ n+1=2 \Rightarrow n=1 \end{cases}$$

پس دو مقدار برای n داریم.

نکته یکی از کاربردهای ترکیب، گروه‌بندی اشیاء است. فرض کنید

می‌خواهیم ۶ نفر را به سه گروه ۱، ۲، ۳ نفره تقسیم کنیم، می‌توان به

دلخواه ابتدا اعضای یکی از گروه‌ها را انتخاب کرد و بعد سراغ انتخاب

گروه بعدی رفت.

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 60$$

انتخاب ۱ نفر از ماندگها
انتخاب ۲ نفر از ماندگها
انتخاب ۳ نفر از ۶ نفر

و یا:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} = 60$$

انتخاب ۲ نفر از ماندگها
انتخاب ۱ نفر از ماندگها
انتخاب ۳ نفر از ۶ نفر

واضح است که با هر اولییتی به ۶۰ حالت می‌رسیم.

مثال می‌خواهیم با ۴ نفر از ۷ بازیکن والیبال، یک بازی با گروه سه

نفره و تک نفره انجام دهیم، چند طریق برای این کار داریم؟

$$\binom{7}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 35 \times 4 \times 1 = 140$$

انتخاب ۴ نفر از ۷ بازیکن
انتخاب ۳ نفره از ۴ نفر
انتخاب ۱ نفره از ۱ نفر

تعداد زیرمجموعه

اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک

مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

مثلاً مجموعه ۸ عضوی، ۵۶ زیرمجموعه ۳ عضوی دارد چون:

$$\binom{8}{3} = 56$$

تست مجموعه A دارای ۲۱ زیرمجموعه ۲ عضوی است. تعداد

زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه A کدام است؟

$$40 \quad (4) \quad 35 \quad (3) \quad 30 \quad (2) \quad 25 \quad (1)$$

$$\binom{n}{2} = 21 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow \binom{7}{4} = 35$$

۳

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است. بنابراین:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تست تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۲ عضوی یک مجموعه ۸ عضوی

چند تا است؟

$$247 \quad (4) \quad 119 \quad (3) \quad 128 \quad (2) \quad 256 \quad (1)$$

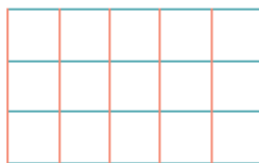
۴ تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر 2^8 است. پس:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8$$

چون تعداد حداقل دو عضوی را می‌خواهیم می‌توان نوشت:

$$\binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 - 1 - 8 = 256 - 9 = 247$$

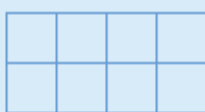
۳ در صفحه شطرنجی زیر، هر مستطیل با انتخاب ۲ خط افقی و ۲ خط عمودی به دست می‌آید. بنابراین اگر یک شبکه از m خط افقی و n خط عمودی تشکیل شده باشد، تعداد مستطیل‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\text{تعداد مستطیل‌ها} = \binom{m}{2} \binom{n}{2}$$

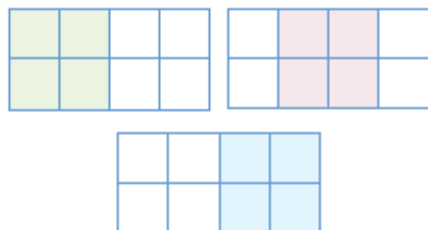
شبکه بالا از ۴ خط افقی و ۶ خط عمودی تشکیل شده است. برای شمارش تعداد مستطیل‌ها باید دو خط افقی و دو خط عمودی انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2} \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90$$



تذکر فرض کنید مطابق شکل یک صفحه شطرنجی داریم و می‌خواهیم تعداد مربع‌های آن را پیدا کنیم. تعداد مربع‌های 1×1 مطابق شکل برابر $4 \times 2 = 8$ است.

برای شمارش تعداد مربع‌های 2×2 یک مربع به عنوان نمونه، در نظر می‌گیریم. اگر این مربع را به سمت راست انتقال دهیم، تعداد مربع‌های 2×2 مطابق شکل‌های زیر برابر $3 \times 1 = 3$ است.

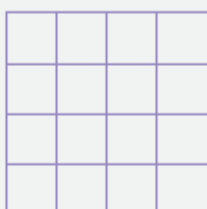


نتیجه پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با:

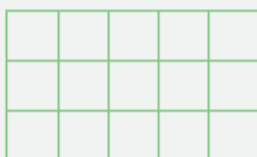
$$4 \times 2 + 3 \times 1 = 11$$

یکی کمتر
یکی کمتر

مثال تعداد مربع‌ها را در هر یک از صفحه‌های شطرنجی زیر به دست آورید. با توجه به الگوی به دست آمده از مثال بالا، داریم:



$$\Rightarrow 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 30$$



$$\Rightarrow 5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = 26$$

مسائل هندسی

۱ برای ساختن یک چندضلعی با استفاده از تعدادی نقطه، اگر نقطه‌ها روی یک خط راست نباشند، می‌توانیم بدون هیچ محدودیتی نقطه‌ها را به هم وصل کنیم و چندضلعی مورد نظر را بسازیم. اما توجه داشته باشید که: الف) با سه نقطه روی یک خط راست، نمی‌توان مثلث تشکیل داد.

مثال با نقاط داده شده در هر شکل، چند مثلث می‌توان ساخت؟

الف) $\Rightarrow \binom{4}{1} \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \binom{3}{1} = 4 \times 3 + 6 \times 3 = 30$

ب) $\Rightarrow \binom{7}{3} - \binom{4}{3} = 35 - 4 = 31$

ب) با چهار نقطه روی یک خط راست یا سه نقطه روی یک خط راست و یک نقطه خارج آن خط، نمی‌توان چهارضلعی تشکیل داد.

مثال با نقاط داده شده در هر شکل، چند چهارضلعی می‌توان ساخت؟

الف) $\Rightarrow \binom{4}{2} \binom{3}{2} = 6 \times 3 = 18$

ب) $\Rightarrow \binom{4}{1} \binom{3}{3} + \binom{4}{2} \binom{3}{2} = 4 \times 1 + 6 \times 3 = 22$

تست با نقاط داده شده روی شکل مقابل،

چند مثلث می‌توان ساخت؟



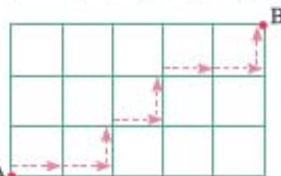
$$152(2) \\ 165(4)$$

$$146(1) \\ 160(3)$$

۳ می‌دانیم با هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنیم، می‌توانیم یک مثلث بسازیم، مگر آن‌که آن سه نقطه روی یک خط راست باشند، پس تعداد مثلث‌ها برابر است با:

$$\binom{11}{3} - \binom{3}{3} - \binom{4}{3} = 165 - 1 - 4 = 160$$

۲ در یک شبکه $m \times n$ تعداد کوتاه‌ترین مسیرها بین دو گوشه A و B برابر است با:



$$\text{تعداد کوتاه‌ترین مسیرها} = \binom{m+n}{m}$$

(واضحه برای طی کوتاه‌ترین مسیر، نیاز هستیم فقط به راست و بالا حرکت کنیم.) مثلاً در شکل بالا، اگر بخواهیم با طی کوتاه‌ترین مسیر از A به B برویم، باید ۵ حرکت به راست و ۳ حرکت به بالا انجام دهیم. پس تعداد کوتاه‌ترین مسیرها برابر است با:

$$\binom{5+3}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

احتمال

فصل

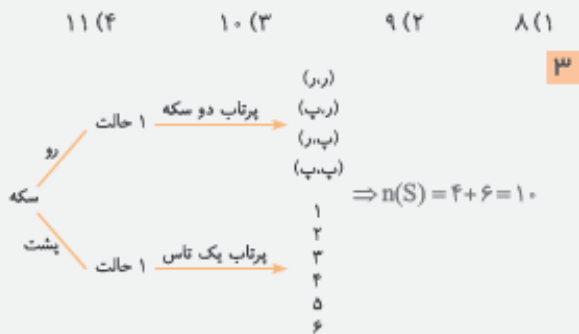
ارتباط با فصل‌های دیگر: پیش‌نیاز قطعی احتمال فصل شمارش بدون شمردن است که بخش مهمی از حل هر سؤال احتمال به دانش شما از شمارش بدون شمردن برمی‌گردد.

توصیه: در سال‌های اخیر سؤالات چالشی و جدیدی از احتمال در کنگور مطرح شده که پیشنهاد ما این است که برای تسلط بهتر روی این فصل با تحلیل کامل سؤالات و یادگیری مفهومی، از حفظ کردن روش‌ها بپرهیزید.

کنکور	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)	۱۴۰۴ (نوبت اول)
تعداد تست	۱	۲	۱	۳	۲	۲	۲	۲

درس آزمایش تصادفی، فضای نمونه و پیشامد

تست سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شود، دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر پشت ظاهر شود، یک تاس پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟



برای به دست آوردن تعداد اعضای فضای نمونه یعنی $n(S)$ یا باید فضای نمونه‌ای را بنویسیم و تعداد عضوهای آن را بشماریم و یا از روش‌های «شمارش» مانند اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت و ... استفاده کنیم.

پیشامد و برآمد

برآمد: به هر عضو از فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوییم. مثلاً فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه که به صورت $\{(ر,ر), (ر,پ), (پ,ر), (پ,پ)\}$ است دارای ۴ برآمد (۴ عضو) می‌باشد.

پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گویند. مثلاً فضای نمونه‌ای فرزندان یک خانواده تک‌فرزندی به شکل $S = \{\text{دوپ}, \text{دو پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{د}, \text{د}\}$ است که دارای ۴ پیشامد $\{\text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د}\}$ می‌باشد.

آزمایش تصادفی: به آزمایشی گفته می‌شود که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش مشخص نیست، ولی مجموعه حالات ممکن برای نتیجه آزمایش قابل پیش‌بینی است. به عنوان مثال پرتاب کردن یک تاس، یک آزمایش تصادفی است، چون نمی‌دانیم چه عددی رو می‌شود، ولی می‌دانیم عدد رو شده یکی از اعداد ۱ تا ۶ است. حالا اگر روی تمام وجوه یک تاس عدد ۳ نوشته شده باشد، پرتاب این تاس، یک آزمایش تصادفی نیست، چون نتیجه آن از قبل مشخص است.

فضای نمونه: به مجموعه همه نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه آن آزمایش تصادفی می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهند. مثلاً، در آزمایش پرتاب یک تاس، فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

مثال فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های زیر را بنویسید.

الف) پرتاب دو سکه

$$S = \{(ر,ر), (ر,پ), (پ,ر), (پ,پ)\} \Rightarrow n(S) = 4$$

در پرتاب دو سکه، فرض کنید سکه‌ها متمایز هستند. پس حالت $(ر, پ)$ یعنی سکه اول «پشت» آمده و سکه دوم «رو» آمده که با حالت $(پ, ر)$ فرق دارد.

ب) یک خانواده سه‌فرزندی

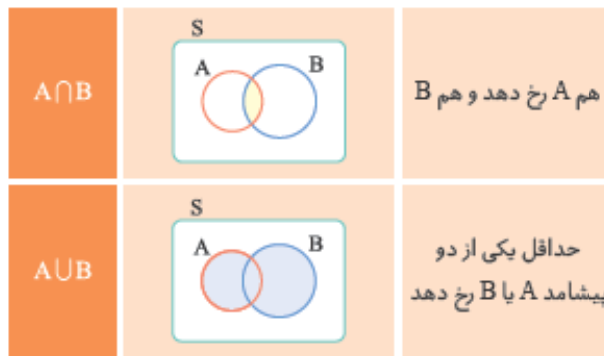
$$S = \{(د,د,د), (د,د,پ), (د,پ,د), (د,پ,پ), (پ,د,د), (پ,د,پ), (پ,پ,د), (پ,پ,پ)\} \Rightarrow n(S) = 8$$

در این ماهم $(پ, د, د)$ یعنی فرزند اول و دوم دختر و فرزند سوم پسر است. اما حالت $(د, د, پ)$ یعنی فرزند اول پسر و فرزند دوم و سوم دختر است.

پ) پرتاب دو تاس

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(S) = 6 \times 6 = 36$$

در این ماهم حالت $(1, 5)$ با حالت $(5, 1)$ فرق دارد.



مثال در یک خانواده سه فرزندی، اگر A پیشامد «حداکثر یک پسر» و B پیشامد «یکی در میان دختر و پسر» باشد، هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

$$A \cap B \text{ (ب)}$$

$$A \cup B \text{ (الف)}$$

$$A' \cap B' \text{ (ت)}$$

$$A - B \text{ (پ)}$$

پیشامدهای A و B به صورت زیر هستند:

$$A = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

$$B = \{(د, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

بنابراین پیشامدهای خواسته شده به صورت زیر هستند:

$$A \cup B = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

$$(پ, د, د), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, پ)\}$$

$$A \cap B = \{(د, د, پ)\}$$

$$A - B = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

$$A' \cap B' = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

تست در پرتاب دو تاس با هم، پیشامد این که «مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۴ باشد» یا «اعداد ظاهر شده، یکسان باشند» دارای چند عضو است؟

$$۱۲ (۱) \quad ۱۰ (۲) \quad ۹ (۳) \quad ۸ (۴)$$

۴ پیشامدهای A و B به صورت زیر هستند:

$$A = \{(۱, ۳), (۲, ۲), (۳, ۱)\}$$

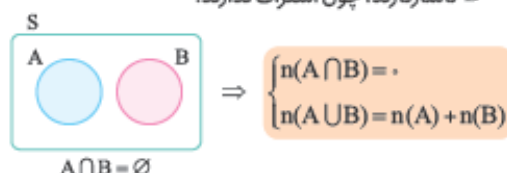
$$B = \{(۱, ۱), (۲, ۲), \dots, (۶, ۶)\}$$

این دو پیشامد در عضو (۲, ۲) مشترک اند و ما باید تعداد عضوهای پیشامد $A \cup B$ را پیدا کنیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۳ + ۶ - ۱ = ۸$$

پیشامدهای ناسازگار (جدا از هم)

اگر دو پیشامد A و B از فضای نمونه S هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، آن‌ها را ناسازگاری نامند؛ مثلاً، در پرتاب یک تاس پیشامدهای $A = \{۱, ۳, ۵\}$ و $B = \{۲, ۴\}$ ناسازگارند، چون اشتراک ندارند.



تذکر از فصل شمارش به خاطر داریم که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است، پس تعداد پیشامدهای فضای نمونه‌ای S با تعداد اعضای n(s) برابر $2^{n(s)}$ می‌باشد.

مثال ۱ در پرتاب دو تاس با هم، پیشامد این که مجموع اعداد رو شده برابر ۶ باشد، را بنویسید.

$$A = \{(۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۵, ۱)\}$$

مثال ۲ در یک خانواده ۳ فرزندی، پیشامد این که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد، را بنویسید.

$$A = \{(د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

تست در ظرفی ۳ مهره قرمز، ۴ آبی و ۲ سفید وجود دارد، به تصادف ۳ مهره برمی‌داریم. پیشامد این که یک مهره قرمز و حداقل یک مهره آبی باشد، چند عضو دارد؟

$$۳۰ (۱) \quad ۳۶ (۲) \quad ۴۰ (۳) \quad ۴۲ (۴)$$

۴ باید یک مهره قرمز از بین ۳ مهره قرمز و یک یا دو مهره آبی از بین ۴ مهره آبی انتخاب شود، پس داریم:

$$n(A) = \binom{۳}{۱} \binom{۴}{۱} + \binom{۳}{۱} \binom{۴}{۲} = ۴۲$$

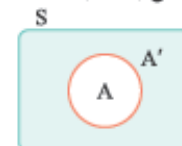
تذکر در هر فضای نمونه مانند S، خود S را پیشامد قطعی و $\emptyset$ را پیشامد غیرممکن می‌نامند.

ژخداد پیشامد

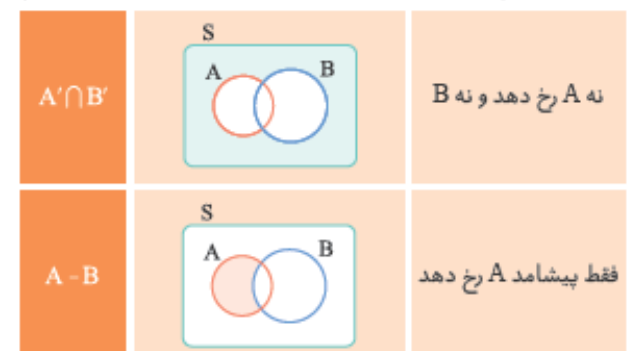
هنگامی می‌گوییم یک پیشامد ژخ داده است که نتیجه آزمایش، یکی از عضوهای آن پیشامد باشد.

اعمال روی پیشامدها

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه S باشد، متمم A یعنی A' شامل عضوهایی از S است که متعلق به A نباشد.



حالا می‌خواهیم اجتماع، اشتراک، تفاضل و... را روی پیشامدها تعریف کنیم.



درس احتمال رخداد یک پیشامد

احتمال ساده

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه هم‌شانس S باشد، در این صورت احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهند و برابر است با نسبت تعداد عضوهای پیشامد مطلوب به تعداد عضوهای فضای نمونه و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکر هر چه تعداد عضوهای پیشامد A بیش‌تر باشد، شانس رخداد پیشامد A بیش‌تر می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$1 \ P(\emptyset) = 0 \quad 2 \ P(S) = 1 \quad 3 \ 0 \leq P(A) \leq 1$$

اصل متمم

در بعضی از مسائل احتمال، پیدا کردن حالت‌هایی که مسئله نمی‌خواهد، از پیدا کردن حالت‌های موردنظر راحت‌تر است. پس می‌توانیم احتمال رخ دادن حالت‌هایی که مدنظر مسئله نیست را پیدا کنیم و سپس جواب را از ۱ کم کنیم:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

در ادامه، تیپ‌های مختلف سؤالات مربوط به احتمال ساده را بررسی می‌کنیم.

پرتاب تاس

اگر یک تاس سالم (همگن) پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و در نتیجه $n(S) = 6$ است. پس احتمال ظاهر شدن هر وجه برابر $\frac{1}{6}$ است.

تست یک تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد اول یا مضرب ۳ ظاهر می‌شود؟

$$\frac{1}{6} (1) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{1}{3} (3) \quad \frac{1}{2} (4)$$

۲ اعداد اول در تاس $\{2, 3, 5, 6\}$ و اعداد مضرب ۳ عبارت‌اند از $\{3, 6\}$ ، پس اجتماع آن‌ها $A = \{2, 3, 5, 6\}$ است و احتمالش برابر است با:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

در پرتاب دو تاس با هم، فضای نمونه‌ای دارای $n(S) = 6 \times 6 = 36$ عضو است. در سؤالات مربوط به پرتاب دو تاس، از عبارت‌های زیر استفاده می‌شود که در حل مسائل، آن‌ها را معادل در نظر می‌گیریم:

یک تاس آبی و یک تاس قرمز می‌اندازیم

اول یک تاس می‌اندازیم، سپس دیگری را می‌اندازیم

یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم

دو تاس با هم پرتاب می‌کنیم

مثال در پرتاب دو تاس با هم، با کدام احتمال:

(الف) هر دو عدد رو شده، مضرب ۳ هستند؟

$$A = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

البته می‌توانستیم از اصل ضرب استفاده کنیم و احتمال خواسته

$$\text{شده را به صورت } P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \text{ به دست آوریم.}$$

(ب) اعداد رو شده، متمایز هستند؟

اعداد رو شده در حالت‌های $\{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$ یکسان‌اند و

در بقیه حالت‌ها متمایز هستند، پس:

$$P = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

نکته در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم $12 \leq \text{مجموع دو عدد} \leq 12$ است.

برای به دست آوردن تعداد حالتی که مجموع دو عدد رو شده برابر n می‌شود، می‌توانیم اختلاف n را با عدد ۱ و عدد ۱۳ به دست آوریم. عدد کوچک‌تر، تعداد اعضای پیشامد را به ما می‌دهد؛ مثلاً، این که مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۶ باشد، دارای $6 - 1 = 5$ حالت و مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۱۰ باشد دارای $10 - 1 = 9$ حالت است.

تست در پرتاب دو تاس با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد

ظاهر شده مضرب ۵ است؟

$$\frac{1}{2} (1) \quad \frac{1}{5} (2) \quad \frac{7}{36} (3) \quad \frac{11}{36} (4)$$

۳ اعداد مضرب ۵ در مجموع دو تاس ۵ و ۱۰ هستند. چون ۵ به ۱ نزدیک‌تر است، پس دارای $5 - 1 = 4$ حالت و چون ۱۰ به ۱۳ نزدیک‌تر است، دارای $13 - 1 = 12$ حالت است، پس:

$$P = \frac{4+12}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

تذکر در پرتاب ۲ تاس حالت‌های $(1, 3)$ و $(3, 1)$ با یکدیگر متمایزند. اما

تنها یک عضو $(3, 3)$ داریم، چون عدد رو شده هر دو تاس یکسان است و تفاوتی ندارد که کدام یک از تاس‌ها اول ۳ بیاید و کدام یک دوم ۳ بیاید.

در پرتاب سه تاس با هم، فضای نمونه‌ای دارای $n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$ عضو می‌باشد. در مسائلی که مربوط به پرتاب سه تاس می‌باشد، معمولاً مسئله را از طریق اصل ضرب یا نوشتن اعضای پیشامد مطلوب حل می‌کنیم.

مثال در پرتاب سه تاس با هم احتمال آنکه اعداد رو شده متمایز

باشند کدام است؟

تاس اول می‌تواند هر ۶ حالت بیاید، تاس دوم باید با تاس اول متفاوت بیاید، پس ۵ حالت دارد و تاس سوم هم باید با تاس اول و دوم متفاوت بیاید، پس ۴ حالت دارد، بنابراین:

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6, n(A) = 6 \times 5 \times 4 \Rightarrow P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{9}$$

کیسه و مهره‌های شماره‌دار

اگر در یک کیسه، چند مهره شماره‌دار داشته باشیم، شماره‌ها را پشت سر هم می‌نویسیم و از فلش زنی استفاده می‌کنیم. در این سوالات دقت کنید که:

۱ چون از هر شماره فقط یک مهره در کیسه داریم، پس امکان ندارد که مثلاً دو مهره با شماره ۳ و ۳ خارج شده باشند!

۲ ترتیب مهره‌های خارج شده مهم نیست. مثلاً (۱, ۲) و (۲, ۱) فرقی با هم ندارند، چون در این جا مهم این است که مهره‌های با شماره ۱ و ۲ از کیسه خارج شده‌اند.

تست در کیسه‌ای شش مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ وجود دارد. دو مهره به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد خارج شده برابر ۶ است؟

$$\frac{4}{15} (4) \quad \frac{2}{15} (3) \quad \frac{1}{5} (2) \quad \frac{1}{3} (1)$$

۳ به کمک فلش زنی داریم:

$$\Rightarrow P = \frac{2}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15}$$

توجه کنید در روش فلش زنی، هر شماره را با شماره‌های بقیه آن چک می‌کنیم و به مهره‌های قبلی نگاه نمی‌کنیم.

اگر در کیسه‌ای دو گروه مهره شماره‌دار موجود باشد، شماره یک گروه را با اعداد فارسی و شماره گروه دیگر را با اعداد انگلیسی نشان می‌دهیم. سپس مهره‌ها را به صورت زیر چک می‌کنیم:

۱ شماره‌های فارسی با فارسی

۲ شماره‌های فارسی با انگلیسی

۳ شماره‌های انگلیسی با انگلیسی

مسائل مربوط به شمارش

در این مدل از تست‌ها تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای فضای مطلوب را با دانشی که از فصل شمارش داریم، با کمک اصل ضرب، اصل جمع، انتخاب و ... محاسبه کرده، سپس احتمال پیشامد موردنظر را به دست می‌آوریم.

مثال ۵ نفر می‌خواهند سخنرانی کنند. احتمال آن‌که احمد بعد از علی

(نه لزوماً بلافاصله) سخنرانی کند چقدر است؟

تعداد کل حالاتی که ۵ نفر می‌توانند سخنرانی کنند، برابر $n(S) = 5! = 120$ است. حالا برای آنکه احمد بعد از علی سخنرانی کند (نه لزوماً بلافاصله)، کافیست از جایگشت آن‌ها نسبت به هم جلوگیری کنیم، پس:

$$n(A) = \frac{5!}{2!} = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

مثال در پرتاب همزمان سه تاس، با کدام احتمال حاصل ضرب اعداد رو شده عددی زوج است؟

متمم حالتی است که عدد روشده هر سه تاس عددی فرد باشد، یعنی یکی از اعداد {۱, ۳, ۵} بیاید، پس:

$$P(A) = 1 - \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

پرتاب سکه - جنسیت فرزندان یک خانواده

فضای نمونه پرتاب یک سکه، مشابه فضای نمونه به دنیا آمدن فرزندی در یک خانواده است. وقتی یک سکه پرتاب می‌کنیم، احتمال ظاهر شدن «رو» برابر $\frac{1}{2}$ و احتمال ظاهر شدن «پشت» نیز برابر $\frac{1}{2}$ است. وقتی فرزندی به دنیا می‌آید، احتمال پسر بودن یا دختر بودنش برابر $\frac{1}{2}$ است. مسائل مربوط به پرتاب سکه یا جنسیت فرزندان به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند:

۱ تعداد

در n بار پرتاب یک سکه (یا پرتاب کردن n تا سکه) احتمال این‌که k بار رو (یا پشت) بیاید، و یا در یک خانواده n فرزندی، احتمال این‌که خانواده دارای k فرزند پسر (یا دختر) باشد، برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

۲ جایگاه

اگر درباره جایگاه فرزندان یا سکه‌ها صحبت شود، از قانون ضرب احتمال‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال ۱ در یک خانواده سه فرزندی، با کدام احتمال تعداد پسرها بیش‌تر از دخترها است؟

باید احتمال این‌که خانواده دارای ۲ یا ۳ پسر باشد را حساب کنیم:

$$P = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{3}}{2^3} = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲ در یک خانواده چهار فرزندی، با کدام احتمال فرزند اول و آخر پسر و خانواده دقیقاً دارای ۲ پسر است؟

باید احتمال این‌که فرزند اول و آخر پسر و دو فرزند وسط دختر باشند را حساب کنیم:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

کیسه و مهره‌های رنگی

در مسائل کیسه و مهره رنگی، برای محاسبه تعداد حالات مطلوب و هم‌چنین تعداد کل حالات از انتخاب استفاده می‌کنیم. در این مسائل به نحوه خارج کردن مهره‌ها از کیسه توجه کنید.

تست در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز، ۴ مهره سبز و ۳ مهره آبی وجود دارد.

سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟

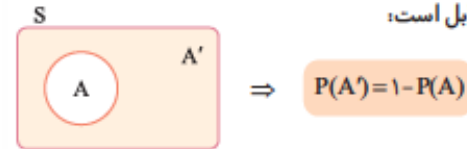
$$\frac{4}{11} (4) \quad \frac{7}{22} (3) \quad \frac{3}{11} (2) \quad \frac{5}{22} (1)$$

۲ باید ۱ مهره قرمز، ۱ مهره سبز و ۱ مهره آبی خارج کنیم:

$$P = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{5 \times 4 \times 3}{220} = \frac{3}{11}$$

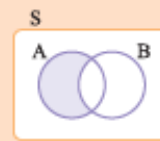
قوانین احتمال

اگر A یک پیشامد ناتهی از فضای نمونه S باشد، احتمال این که A رخ ندهد به صورت مقابل است:



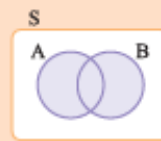
با توجه به قوانین مجموعه‌ها، برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S داریم:

فقط پیشامد A رخ دهد.



$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

حداقل یکی از A ، پیشامد رخ دهد.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

یافت فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.



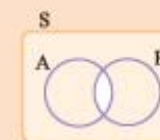
$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

هم A رخ دهد و هم B



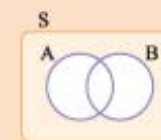
$$P(A \cap B)$$

حداکثر یکی از دو پیشامد رخ دهد.



$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

نه A رخ دهد و نه B رخ دهد.



$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

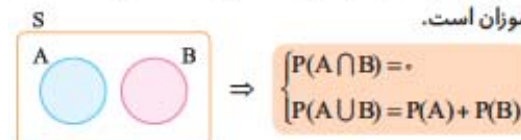
تذکره از مجموعه‌ها می‌دانیم $A \cap B' = A - B$ است، پس:

$$P(A \cap B') = P(A - B)$$

دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند هرگاه نتوانند همزمان رخ بدهند. به عبارت دیگر وقوع یکی به معنای عدم وقوع دیگری باشد. مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامد زوج آمدن و پیشامد فرد آمدن تاس دو پیشامد ناسازگار هستند، چون نمی‌توانند با هم رخ دهند، (واضح است که عدد رو شده نمی‌تواند هم زوج باشد هم فرد).

همچنین مثلاً پیشامد رتبه ۱ کنکور شدن دانش‌آموزها با یکدیگر ناسازگار است، چون اگر یکی از دانش‌آموزها رتبه ۱ شود به معنای رتبه ۱ نشدن بقیه دانش‌آموزان است.



تست اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه S باشند و

$P(A') + P(B') = 1/4$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $3/4$ (۲) $1/6$ (۳) $5/6$ (۴) $1/7$

۲ چون دو پیشامد ناسازگار هستند، پس $P(A \cap B) = 0$ داریم:

$$P(A') + P(B') = 1/4 \Rightarrow 1 - P(A) + 1 - P(B) = 1/4$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = 3/4$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{3/4} - \underbrace{P(A \cap B)}_0 = 3/4$$

نکته اگر دو پیشامد A و B به همراه متمم‌هایشان در یک تست مطرح شده باشند، نمودار ون را مطابق شکل زیر، به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنیم و

احتمال هر ناحیه را درون مربع مربوط به خودش می‌نویسیم، با توجه به این‌که می‌دانیم مجموع همه احتمالات در یک فضای نمونه برابر ۱ است، احتمال قسمت یا قسمت‌های مجهول را به دست می‌آوریم.

	A	A'
B		
B'		

تست اگر $P(A - B) = 1/4$ و $P(A \cap B) = 1/3$ باشد، آنگاه $P(A')$ کدام است؟

- (۱) $7/12$ (۲) $3/4$ (۳) $5/12$ (۴) $2/3$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = \underbrace{1/4}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{1/3}_{\frac{1}{3}} = \frac{7}{12}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

تست اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S و $P(A - B) = 1/4$ و

$P(A') = 1/3$ باشند، آنگاه $P(B - A')$ کدام است؟

- (۱) $1/6$ (۲) $5/6$ (۳) $1/3$ (۴) $2/3$

۱ با توجه به صورت سؤال $P(A) = 1 - P(A') = 2/3$ است، پس:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(B - A') = P(B \cap A) = \frac{1}{6}$$

مثال در یک دانشگاه ۶۰ درصد دانشجویان، پسر و ۲۰ درصد

دانشجویان، متأهل هستند و ۱۵ درصد دانشجویان، متأهل و دختر هستند. چند درصد از دانشجویان، مجرد و دختر هستند؟

	دختر	پسر
متأهل	۱۵%	
مجرد		

→

	دختر	پسر
متأهل	۱۵%	۵%
مجرد		

→

	دختر	پسر
متأهل	۱۵%	۵%
مجرد	۲۵%	۵۵%

بنابراین ۲۵٪ دانشجویان، دختر و مجرد هستند.

درس ۳ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی

فرض کنید در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر، قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. واضح است احتمال برنده شدن هر یک از افراد، برابر $\frac{1}{20}$ است. حال اگر مجری پس از انتخاب کارت اعلام کند عدد برنده یک‌رقمی است، در این صورت شانس برنده شدن افرادی که شماره کارت آن‌ها ۱۰ تا ۲۰ است، صفر می‌شود، اما شانس برنده شدن افرادی که شماره کارتشان از ۱ تا ۹ است برابر $\frac{1}{9}$ می‌شود. در این حالت فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ به $S_{\text{new}} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ تغییر می‌کند.

فرمول احتمال شرطی

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، می‌دانیم احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{n(A)}{n(S)}$ است، حالا اگر بدانیم پیشامد B رخ داده است (مثلاً بدانیم تاس عددی زوج آمده است) آنگاه تغییراتی در احتمال پیشامد A خواهیم داشت:

۱ نخست آنکه چون می‌دانیم پیشامد B رخ داده است، فضای نمونه‌ای دیگر کل S نیست، بلکه فقط درون B است.

۲ دوم آنکه ناحیه مطلوب دیگر تمام A نیست، بلکه به خاطر رخ دادن B ، فقط قسمتی از A قابل قبول است که با سازگار باشد، یعنی قسمت مطلوب (پیشامد مطلوب) می‌شود $A \cap B$.

پس احتمال رخداد پیشامد A ، اگر بدانیم پیشامد B رخ داده است، برابر است با:

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

حالا اگر در رابطه فوق صورت و مخرج کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم فرمول احتمال شرطی به دست می‌آید.

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نماد $P(A|B)$ را به صورت احتمال رخ دادن A به شرط رخ دادن B می‌خوانیم.

مسائل احتمال شرطی

به مسائلی از احتمال که در آن، طراح با دادن اطلاعات یا گفتن جمله‌ای، قسمتی از فضای نمونه را افشا می‌کند، مسائل احتمال شرطی می‌گوییم.

مسائل احتمال شرطی را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد:

۱ برخی از مسائل احتمال شرطی را می‌توان بدون استفاده از فرمول و با محدود کردن فضای نمونه حل کرد. معمولاً از این روش در فضای نمونه‌ای پرتاب تاس و سکه و فرزند استفاده می‌کنیم. برای درک بهتر به مثال بعدی توجه کنید.

دادن اطلاعات

مثال یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد ظاهر شده، زوج است، با کدام احتمال شماره ۴ یا ۶ ظاهر شده است؟

احتمال خواسته شده

چون می‌دانیم عدد ظاهر شده زوج است، پس اعداد فرد را از فضای نمونه پرتاب یک تاس کنار می‌گذاریم و فضای نمونه جدید به صورت $S_{\text{new}} = \{2, 4, 6\}$ است. در این فضای نمونه جدید، احتمال ظاهر شدن ۴ یا ۶ برابر $P = \frac{2}{3}$ است.

تذکر

در مسائل احتمال شرطی، معمولاً طراح از واژه‌هایی مانند «اگر، می‌دانیم، مشروط بر آن‌که، در صورتی که بدانیم و ...» استفاده می‌کند.

تست

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم جمع دو عدد رو شده برابر ۷ است، با کدام احتمال هر دو عدد رو شده، اول هستند؟

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{4}$$

۲ چون می‌دانیم جمع دو عدد رو شده برابر ۷ است، پس فضای نمونه جدید به صورت زیر است:

$$S_{\text{new}} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

در این فضای نمونه جدید، پیشامد این‌که هر دو عدد رو شده اول باشند، به صورت $A = \{(2, 5), (5, 2)\}$ است، پس:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تست

در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر هستند؟

$$\frac{1}{4} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{8}$$

۲ چون یکی از فرزندان پسر است، پس عضو $(د, د, د)$ را از فضای نمونه کنار می‌گذاریم:

$$n(S_{\text{new}}) = 2^3 - 1 = 7$$

$$A = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ)\} \Rightarrow P = \frac{3}{7}$$

۲ در برخی مسائل ناگزیر به استفاده از فرمول احتمال شرطی هستیم که می‌توان آن‌ها را به دو تیپ زیر تقسیم کرد:

الف) در این مسائل که دارای شکل جبری هستند، به صورت مستقیم از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌شود.

مثال

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به‌طوری‌که $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{5}$ است. چه تعداد از عبارات‌های زیر درست است؟

$$\text{الف) } P(A|B) = \frac{1}{4} \quad \text{ب) } P(A'|B) = \frac{1}{4} \quad \text{پ) } P(B|A) = \frac{2}{3}$$

ابتدا $P(A \cap B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=1/5} = \underbrace{P(A)}_{=1/3} + \underbrace{P(B)}_{=1/4} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

تست امیر و بهروز به ترتیب با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر $\frac{1}{5}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟ (خارج-۹۸)

$$(۱) \frac{9}{14} \quad (۲) \frac{4}{7} \quad (۳) \frac{11}{14} \quad (۴) \frac{6}{7}$$

۱ پیشامد شرکت کردن امیر را با A و پیشامد شرکت کردن بهروز را با B نمایش می‌دهیم. با توجه به صورت سؤال $P(A|B) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{6}$ است، پس:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

بنابراین احتمال شرکت کردن امیر به شرط شرکت نکردن بهروز برابر است با:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{15}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{20}$$

مثال درون ظرفی ۳ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. دو مهره یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره، آبی هستند؟

احتمال این‌که مهره اول آبی باشد، $\frac{5}{8}$ است. حال چون مهره‌ها یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری خارج شده‌اند، پس در مرحله دوم یکی از آبی‌ها کم می‌شود، بنابراین:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

تست یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ۶ ظاهر شود شخص A برنده می‌شود و اگر عدد ۱ ظاهر شود شخص B برنده می‌شود. با کدام احتمال، در پرتاب سوم یکی از افراد A یا B برنده می‌شود؟

$$(۱) \frac{1}{9} \quad (۲) \frac{2}{9} \quad (۳) \frac{4}{27} \quad (۴) \frac{5}{27}$$

۳ برای این‌که در پرتاب سوم، یکی از افراد A یا B برنده شود، باید در پرتاب اول و دوم، عدد ۱ و ۶ ظاهر نشود و در پرتاب سوم یکی از اعداد ۱ یا ۶ ظاهر شود، پس:

$$P = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{27}$$

دو پیشامد مستقل

دو پیشامد وقتی مستقل هستند که روی هم تأثیر نداشته باشند. به بیان دیگر، رخ دادن پیشامد B احتمال رخ دادن پیشامد A را تغییر ندهد:

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}$$

مثلاً، وقتی یک تاس پرتاب می‌کنیم، احتمال ظاهر شدن عدد ۲ برابر $\frac{1}{6}$ است. حال اگر این تاس را یک بار دیگر پرتاب کنیم، احتمال این‌که در بار دوم ۶ ظاهر شود، برابر $\frac{1}{6}$ است؛ یعنی آگاهی از عدد ظاهر شده در پرتاب اول، احتمال ظاهر شدن ۶ در پرتاب دوم را تغییر نمی‌دهد و در نتیجه این پیشامدها نسبت به هم مستقل هستند.

حال عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{الف) } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\text{ب) } P(A|B) = \frac{P(B \cap A')}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0 \quad \times$$

$$\text{پ) } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

قانون ضرب احتمال‌ها

اگر فرمول احتمال شرطی را طرفین وسطین کنیم، می‌توانیم $P(A \cap B)$ را به دست آوریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

طبق این فرمول که به آن قاعده ضرب احتمال می‌گویند، اگر بخواهیم دو پیشامد A و B رخ دهند، ابتدا پیشامد A رخ می‌دهد و سپس پیشامد B با فرض رخ دادن A ، اتفاق می‌افتد.

تست اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{10}, P(B|A) = \frac{1}{5}$$

کدام است؟

$$(۱) \frac{9}{8} \quad (۲) \frac{9}{4} \quad (۳) \frac{8}{9} \quad (۴) \frac{4}{9}$$

۲ ابتدا مقدار $P(A \cap B)$ را به کمک قانون ضرب احتمال به دست می‌آوریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

حال مقادیر $P(A \cup B)$ و $P(A|B)$ را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$۱) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{2}{25} = \frac{1}{5}$$

$$۲) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + P(A \cup B)}{P(A|B)} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{9}{4}$$

ب) آن دسته از مسائلی که به صورت داستانی مطرح می‌شوند و برای حل آن‌ها از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌کنیم:

تست احتمال ابری بودن هوا در یک روز خاص $\frac{1}{4}$ است. احتمال این‌که

در این روز هوا ابری و بارانی باشد برابر $\frac{1}{2}$ است. اگر بدانیم هوا ابری است، با کدام احتمال بارانی نیز است؟

$$(۱) \frac{1}{2} \quad (۲) \frac{3}{4} \quad (۳) \frac{1}{5} \quad (۴) \frac{1}{6}$$

۳ پیشامد ابری بودن را با A و پیشامد بارانی بودن را با B نمایش می‌دهیم. با توجه به صورت سؤال $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ است، پس:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{1} = 2$$

تذکر پیشامدهایی که در ظاهر با هم ارتباطی ندارند، مستقل اند، مثلاً، پرتاب دو سکه، جنسیت فرزندان یک خانواده، پرتاب یک سکه و یک تاس، قبولی دو نفر در یک آزمون، تولد افراد در روزهای مختلف هفته یا سال یا فصل‌ها و ماه‌های مختلف.

تست احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان در این آزمون قبول می‌شوند؟ (خارج - ۹۶)

(۱) ۰/۹۲ (۲) ۰/۹۴ (۳) ۰/۹۶ (۴) ۰/۹۸

۳ قبولی دو فرد در یک آزمون، مستقل از هم است. حال احتمال این‌که لااقل یکی از آن‌ها قبول شود، برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0.84 + 0.75 - 0.84 \times 0.75 = 0.96$$

تست دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ (داخل - ۹۶)

(۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۱ پیشامد ظاهر شدن دو «رو» در پرتاب دو سکه را با A و پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ در تاس را با B نشان می‌دهیم. با توجه به این‌که این دو پیشامد مستقل اند، پس:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{6+4-1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

شرط مستقل بودن

دو پیشامد ناتپی A و B در صورتی مستقل اند که احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل ضرب احتمال آن‌ها باشد:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل اند}$$

تست اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند، به‌طوری‌که

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \text{ و } P(B) = \frac{1}{3} \text{ آنگاه } P(A \cup B) \text{ کدام است؟}$$

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۱ چون A و B مستقل هستند، پس:

$$1) P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$$

$$2) P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

نکته اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه:

$$1) A \text{ و } B' \text{ مستقل اند: } P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

$$2) A' \text{ و } B \text{ مستقل اند: } P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$$

$$3) A' \text{ و } B' \text{ مستقل اند: } P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

مثلاً وقتی یک سکه و یک تاس پرتاب می‌کنیم، پیشامد ظاهر شدن «۲» و ظاهر شدن «پشت» ربطی به هم ندارند و مستقل از هم محسوب می‌شوند، پس ظاهر نشدن «۲» در پرتاب تاس نیز به «پشت» آمدن سکه ربطی ندارد و مستقل محسوب می‌شوند.

درس احتمال کل

فرمول احتمال کل

اگر فضای نمونه S از اجتماع پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ تشکیل شده باشد و A یک پیشامد از این فضای نمونه باشد، آنگاه:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots$$

مفهوم احتمال کل

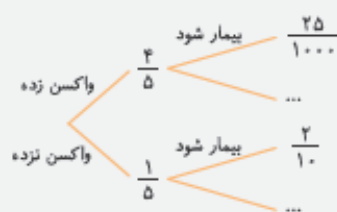
در مسائل احتمال کل، چند اتفاق پشت سر هم رخ می‌دهد و نتیجهٔ اولی روی اتفاق دوم تأثیرگذار است. در این مسائل، فضای نمونه به دو یا چند بخش تقسیم‌بندی شده است که معروف‌ترین آن‌ها: چند کیسه، چند کارخانه، زن و مرد، دانشجویان پسر و دختر و ... هستند.

تذکر برای حل این مسائل می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم و البته پس از تسلط بر مسائل، می‌توانیم شاخه‌ها را به طور ذهنی تجسم کنیم و آن‌ها را رسم هم نکنیم!

تست احتمال انتقال یک بیماری ویروسی به افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر، ۰/۲ است. $\frac{4}{5}$ دانش‌آموزان یک کلاس واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از دانش‌آموزان ملاقات کند، با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟

(۱) $\frac{1}{200}$ (۲) $\frac{2}{100}$ (۳) $\frac{3}{100}$ (۴) $\frac{3}{50}$

۴ احتمال انتقال بیماری به افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۲۵ و به افرادی که واکسن نزده‌اند ۰/۲ است، پس:



$$P = \frac{4}{5} \times \frac{25}{1000} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{100} = \frac{1}{50} + \frac{2}{500} = \frac{3}{500}$$

مسائل کیسه و مهره

سوالات مربوط به کیسه و مهره در احتمال کل به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند:

۱ در بعضی مسائل، چند کیسه داریم و می‌خواهیم از یکی از این کیسه‌ها، مهره‌ای با رنگ خاص خارج کنیم.

تست دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و

دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. با چشم بسته یکی از دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$$\frac{39}{50} (1) \quad \frac{18}{35} (2) \quad \frac{37}{70} (3) \quad \frac{49}{70} (4)$$

۲ احتمال انتخاب هر ظرف برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{14} = \frac{21+15}{70} = \frac{18}{35}$$

۲ در بعضی مسائل، ابتدا یک یا چند مهره از کیسه اول به کیسه دوم منتقل می‌کنیم و سپس از کیسه دوم یک مهره خارج می‌کنیم.

تست دو ظرف یکسان داریم. در اولی ۳ مهره آبی و ۲ مهره قرمز و در

دومی ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره آبی است؟

$$\frac{23}{40} (1) \quad \frac{5}{8} (2) \quad \frac{27}{40} (3) \quad \frac{29}{40} (4)$$

۱ مهره منتقل شده به ظرف دوم به احتمال $\frac{3}{5}$ آبی و به احتمال

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{8} = \frac{23}{40}$$

قرمز است، پس:

۳ در مدل سوم، تعدادی مهره از کیسه اول و دوم خارج می‌کنیم و در کیسه سوم قرار می‌دهیم. سپس از کیسه سوم یک مهره خارج می‌کنیم.

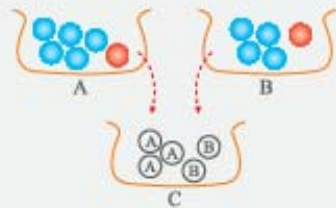
یادداشت:

تست ظرف A شامل ۵ مهره آبی و ۱ مهره قرمز و ظرف B شامل ۴ مهره آبی و ۱ مهره قرمز است. از ظرف A، ۳ مهره و از ظرف B، دو مهره به تصادف انتخاب و در ظرف C قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف C انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره آبی است؟

$$\frac{39}{50} (1) \quad \frac{41}{50} (2) \quad \frac{43}{50} (3) \quad \frac{47}{30} (4)$$

۲ مهره انتخابی از ظرف C با احتمال $\frac{3}{5}$ ، متعلق به ظرف A و با احتمال $\frac{2}{5}$ ، متعلق به ظرف B است. در ضمن مهره انتخابی از A با احتمال $\frac{5}{6}$ آبی و مهره انتخابی از B نیز با احتمال $\frac{4}{5}$ آبی است، پس:

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{8}{25} = \frac{41}{50}$$



برداشتن مهره، بدون دیدن

اگر تعدادی مهره از یک کیسه خارج کنیم و بدون دیدن کنار بگذاریم، فرض می‌کنیم آن مهره‌ها از کیسه خارج نشده‌اند و هنوز درون کیسه هستند.

تست در ظرفی ۴ مهره سبز، ۲ مهره زرد و ۵ مهره قرمز موجود است. یک مهره به تصادف از این ظرف انتخاب کرده و بدون مشاهده رنگ آن، مهره‌ای دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، این مهره سبز است؟

$$\frac{4}{11} (1) \quad \frac{5}{11} (2) \quad \frac{6}{11} (3) \quad \frac{7}{11} (4)$$

۱ پس چون مهره اول بدون مشاهده خارج شده، داریم:

