

چند نکته در مورد این کتاب و نحوه استفاده از آن

- ۱ در نگارش کتاب سعی شده خط به خط کتاب درسی با بیانی ساده و قابل فهم ارائه شود، طوری که برای هر دانش آموز سخت کوش و با هر سطح معلوماتی مفید باشد.
- ۲ همه سؤال ها و تمرین های کتاب درسی به طور کامل پوشش داده شده است.
- ۳ امتحانات نهایی معمولاً با پرسش هایی با عنوان «تشخیص درستی یا نادرستی عبارت ها» یا «تکمیل جاهای خالی با عبارت مناسب» شروع می شوند که با وجود نکات ریزی که در بعضی از آن ها قرار گرفته برای خیلی از دانش آموزان چالش جدی محسوب می شود. به همین دلیل پرسش های این قسمت و پاسخ آن ها متنوع و با دقت و وسواس بیش تری طرح و تشریح شده اند.
- ۴ برای استفاده بهتر دانش آموزان، چینش سؤال ها در هر مبحث غالباً از ساده به سخت می باشد.
- ۵ سؤال هایی که با نشان 🌟 مشخص شده اند ممکن است از سطح امتحانات نهایی بالاتر باشد، به همین دلیل فقط به دانش آموزانی که زمان بیش تری در اختیار دارند و علاقه مند هستند توصیه می شود.
- ۶ **کلید نهایی** برای این که جزئیات بارم بندی پاسخ های تشریحی را مشاهده کنید، چند نمونه از پاسخ های تشریحی آموزش و پرورش را در انتهای کتاب عیناً قرار داده ایم.

و در نهایت:

امیدواریم با استفاده از این کتاب و درک عمیق مفاهیم آن، فرمول بیست شدن در امتحان نهایی را فرا گرفته و به اوج تسلط و آمادگی برسید و خوشحال می شویم موفقیت تان را با ما به اشتراک بگذارید. خواهشمندیم جهت بهبود کیفیت کتاب نظرات و پیشنهادات خود را با ما در میان بگذارید.

فهرست مطالب

فصل ۱ جبر و معادله

۵۵	۴۵	۳۷	۲۰	۱۰
درس ۵ آشنایی با هندسه تحلیلی	درس ۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن	درس ۳ معادلات گویا و گنگ	درس ۲ معادلات درجه دوم	درس ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

فصل ۲ تابع

۹۶	۸۵	۷۲	۶۴
درس ۴ اعمال روی توابع	درس ۳ وارون تابع	درس ۲ انواع توابع	درس ۱ آشنایی بیشتر با تابع

فصل ۳ مثلثات

۱۵۲	۱۴۷	۱۴۰	۱۳۱
درس ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا	درس ۳ توابع مثلثاتی	درس ۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا	درس ۱ رادیان

فصل ۴ توابع نمایی و لگاریتمی

۱۲۵	۱۱۸	۱۰۹
درس ۳ ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی	درس ۲ تابع لگاریتمی و لگاریتم	درس ۱ تابع نمایی

فصل ۵ حد و پیوستگی

۱۸۷	۱۸۱	۱۷۲	۱۶۵	۱۵۷
درس ۵ پیوستگی	درس ۴ محاسبه حد توابع کسری	درس ۳ قضایای حد	درس ۲ حدهای یکطرفه (حد چپ و حد راست)	درس ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی

امتحان نهایی

۳۵۹	۳۵۸	۳۵۶	۳۵۵	۳۵۴
آزمون ۵ خرداد ۱۴۰۳	آزمون ۴ شهریور ۱۴۰۲	آزمون ۳ خرداد ۱۴۰۲ (ویژه غائبین)	آزمون ۲ خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)	آزمون ۱ خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)

پاسخنامه تشریحی

۱۹۵
پاسخنامه تشریحی



مدرسہ
اینٹرنی
گاج

گاج لایو



جلسه



درس ۱
سؤالات
۳۲ تا ۴۵



جلسه



درس ۱
سؤالات
۱۶ تا ۳۱



جلسه



درس ۱
سؤالات
۱ تا ۱۵



جلسه



درس ۲
سؤالات
۸۰ تا ۱۰۵



جلسه



درس ۲
سؤالات
۶۱ تا ۷۹



جلسه



درس ۱
سؤالات
۴۶ تا ۶۰



جلسه



درس ۳
سؤالات
۱۴۵ تا ۱۵۳



جلسه



درس ۲
سؤالات
۱۲۹ تا ۱۴۴



جلسه



درس ۲
سؤالات
۱۰۶ تا ۱۲۸



جلسه



درس ۴
سؤالات
۱۷۸ تا ۱۹۷



جلسه



درس ۳
سؤالات
۱۶۵ تا ۱۷۷



جلسه



درس ۳
سؤالات
۱۵۴ تا ۱۶۴



جلسه



درس ۵
سؤالات
۲۴۰ تا ۲۶۱



جلسه



درس ۵
سؤالات
۲۲۲ تا ۲۳۹



جلسه



درس ۴
سؤالات
۱۹۸ تا ۲۲۱





جلسه

۳

درس ۲
سؤالات
۳۱۴ تا ۲۹۶



جلسه

۲

درس ۱
سؤالات
۲۹۵ تا ۲۸۳



جلسه

۱

درس ۱
سؤالات
۲۸۲ تا ۲۶۲



جلسه

۶

درس ۲
سؤالات
۳۶۵ تا ۳۵۴



جلسه

۵

درس ۲
سؤالات
۳۵۳ تا ۳۳۲



جلسه

۴

درس ۲
سؤالات
۳۳۱ تا ۳۱۵



جلسه

۱۰

درس ۴
سؤالات
۴۳۲ تا ۴۱۹



جلسه

۹

درس ۳
سؤالات
۴۱۸ تا ۳۹۹



جلسه

۸

درس ۳
سؤالات
۳۹۸ تا ۳۸۴



جلسه

۷

درس ۳
سؤالات
۳۸۳ تا ۳۶۶



جلسه

۱۱

درس ۴
سؤالات
۴۹۵ تا ۴۸۲



جلسه

۱۳

درس ۴
سؤالات
۴۸۱ تا ۴۶۱



جلسه

۱۲

درس ۴
سؤالات
۴۶۰ تا ۴۴۳



جلسه

۱۱

درس ۴
سؤالات
۴۴۲ تا ۴۳۳



جلسه

۳

درس ۲
سؤالات
۵۶۱ تا ۵۴۰



جلسه

۲

درس ۱
سؤالات
۵۳۹ تا ۵۲۰



جلسه

۱

درس ۱
سؤالات
۵۱۹ تا ۴۹۶



جلسه

۷

درس ۳
سؤالات
۶۲۹ تا ۶۱۴



جلسه

۶

درس ۳
سؤالات
۶۱۳ تا ۵۹۸



جلسه

۵

درس ۳
سؤالات
۵۹۷ تا ۵۷۹



جلسه

۴

درس ۲
سؤالات
۵۷۸ تا ۵۶۲



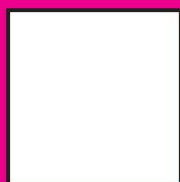
 جلسه ۳ درس ۲ سؤالات ۶۶۸ تا ۶۸۹	 جلسه ۲ درس ۱ سؤالات ۶۵۰ تا ۶۶۷	 جلسه ۱ درس ۱ سؤالات ۶۳۰ تا ۶۴۹
 جلسه ۶ درس ۳ سؤالات ۷۲۰ تا ۷۳۶	 جلسه ۵ درس ۳ سؤالات ۷۰۲ تا ۷۱۹	 جلسه ۴ درس ۲ سؤالات ۶۹۰ تا ۷۰۱
 جلسه ۷ درس ۴ سؤالات ۷۴۷ تا ۷۶۶	 جلسه ۸ درس ۴ سؤالات ۷۳۷ تا ۷۴۶	

 جلسه ۳ درس ۲ سؤالات ۸۱۰ تا ۸۲۴	 جلسه ۲ درس ۱ سؤالات ۷۸۹ تا ۸۰۹	 جلسه ۱ درس ۱ سؤالات ۷۶۷ تا ۷۸۸
 جلسه ۶ درس ۳ سؤالات ۸۵۹ تا ۸۷۸	 جلسه ۵ درس ۳ سؤالات ۸۴۰ تا ۸۵۸	 جلسه ۴ درس ۲ سؤالات ۸۲۵ تا ۸۳۹
 جلسه ۹ درس ۴ سؤالات ۹۱۳ تا ۹۳۶	 جلسه ۸ درس ۴ سؤالات ۸۹۵ تا ۹۱۲	 جلسه ۷ درس ۴ سؤالات ۸۷۹ تا ۸۹۴
 جلسه ۱۲ درس ۵ سؤالات ۹۶۷ تا ۹۸۱	 جلسه ۱۱ درس ۵ سؤالات ۹۵۵ تا ۹۶۶	 جلسه ۱۰ درس ۵ سؤالات ۹۳۷ تا ۹۵۴

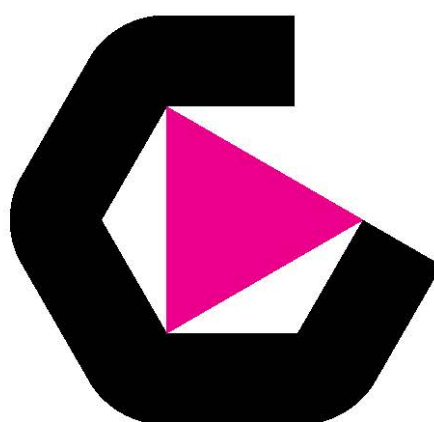


حسابان ۱

حل تصویری تک تک سوالات
کتاب فرمول ۲۰ در گاج لایو



برای مشاهده ویدیوها در سایت gajlive.ir
برچسب را خراش داده و از کد زیر استفاده کنید



پشتیبانی
۰۲۱-۶۴۲۰

www.gajlive.ir

1

بخش



درستامه

و سؤالات تشریحی

درس اول: مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی (قسمت اول)

دنبالہ حسابی و مجموع جملات آن

$$a_1, \overbrace{a_1 + d}^{a_2}, \overbrace{a_1 + 2d}^{a_3}, \overbrace{a_1 + 3d}^{a_4}, \dots, \overbrace{a_1 + (n-1)d}^{a_n}$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$a, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}_\text{جمله } m, b$
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $a_1 \qquad \qquad \qquad a_{m+1}$

بین اعداد ۲۰ و ۸۰، چهار واسطه حسابی درج کنید.

روش اول اگر جمله اول را ۲۰ فرض کنیم، چون چهار واسطه درج می شود، پس عدد ۸۰ جمله ششم دنباله خواهد بود:



$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 80 = 20 + 5d \Rightarrow d = 12$$

۳۲، ۴۴، ۵۶، ۶۸

بنابراین واسطه ها به صورت روبه رو می شوند:

روش دوم در این روش از نکته زیر استفاده می کنیم:

نکته برای درج m واسطه حسابی بین دو عدد a و b، به کمک رابطه زیر، قدرنسبت را به دست می آوریم:



$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

پس در این سوال داریم:

$$d = \frac{80-20}{4+1} = \frac{60}{5} = 12 \Rightarrow \text{واسطه ها: } 32, 44, 56, 68$$

راستشو بخواید من خودم از روش اول استفاده می کنم و به طور کلی علاقه ای به حفظ کردن نکات غیرضروری ندارم.

نکته جمله عمومی یک دنباله حسابی، عبارتی درجه اول بر حسب n است:

$$a_n = a + (n-1)d = a + nd - d \Rightarrow a_n = \underbrace{d}_{A}n + \underbrace{a-d}_{B} = An + B$$

ملاحظه می شود که در رابطه جمله عمومی دنباله حسابی، ضریب n، برابر قدرنسبت می باشد.

کدام یک از عبارات زیر می تواند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد؟

پ) $c_n = -\frac{n}{4} + 3$

ب) $b_n = \frac{n}{n+1}$

الف) $a_n = n^2 + 2n$

عبارات «الف» و «ب» چون چند جمله ای درجه اول نیستند، پس نمی توانند جمله عمومی دنباله حسابی باشند، اما $c_n = -\frac{n}{4} + 3$ جمله عمومی یک

دنباله حسابی با قدرنسبت $-\frac{1}{4}$ می باشد (ضریب n، برابر قدرنسبت است).

مجموع جملات دنباله حسابی

برای این که رابطه مجموع جملات دنباله حسابی را به دست آوریم، از یک مثال ساده شروع می کنیم.

مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به دست آورید.

مجموع اعداد ۱ تا n را برابر S در نظر گرفته، سپس این اعداد را از آخر به اول می نویسیم:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

حال، دو رابطه بالا را با هم جمع می کنیم:

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ تا}} \Rightarrow 2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

پس می توان گفت:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

با توجه به مثال قبل، برای تعیین مجموع جملات یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

مجموع n جمله اول دنباله را S_n می‌نامیم:

$$S_n = a + (a + d) + \dots + (a + (n-2)d) + (a + (n-1)d)$$

حال، جملات S_n را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$S_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d) + \dots + (a + d) + a$$

با جمع جملات متناظر در عبارت بالا، $2S_n$ را تعیین می‌کنیم:

$$2S_n = \underbrace{(2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \dots + (2a + (n-1)d)}_{n \text{ بار}}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

بنابراین مجموع جملات دنباله حسابی برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

در این رابطه، a_1 جمله اول، d قدرنسبت و n تعداد جملات است.

فرمول دوم برای تعیین S_n : می‌دانیم $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

در نتیجه داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ (جمله آخر + جمله اول) } \times \text{ نصف تعداد جملات}$$

(شبه‌نهایی ۱۴۰۳)

❓ در دنباله حسابی $2, 6, 10, \dots$ حداقل چند جمله اول آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن بیشتر از 450 شود؟

✔️ قدرنسبت این دنباله حسابی برابر $d = 6 - 2 = 4$ و جمله اول آن $a_1 = 2$ است، پس مجموع n جمله اول برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2(2) + (n-1) \times (4)) = \frac{n}{2}(4 + 4n - 4) = 2n^2$$

حال مقدار n را طوری به دست می‌آوریم که مجموع جملات از 450 بیشتر شود:

$$S_n > 450 \Rightarrow 2n^2 > 450 \Rightarrow n^2 > 225 \Rightarrow n > 15 \Rightarrow n \geq 16$$

در نتیجه باید حداقل ۱۶ جمله را با هم جمع کنیم.

(کتاب درسی)

❓ مجموع همه اعداد طبیعی سه‌رقمی که مضرب شش هستند، چقدر می‌شود؟

✔️ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی مضرب ۶ به ترتیب $102 = 17 \times 6$ و $996 = 166 \times 6$ است. اعداد سه‌رقمی مضرب ۶ تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول 102 و قدرنسبت ۶ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$102, 108, \dots, 996$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 996 = 102 + (n-1)(6) \Rightarrow 894 = 6(n-1) \Rightarrow n-1 = 149 \Rightarrow n = 150$$

این دنباله، ۱۵۰ جمله دارد، حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{150} = \frac{150}{2}(102 + 996) = 75 \times 1098 = 82350$$

تذکره برای تعیین تعداد جملات، چون دنباله به صورت $166 \times 6, \dots, 18 \times 6, 17 \times 6$ است، پس می‌توان گفت $n = 166 - 17 + 1 = 150$.

در رابطه S_n ، مجموع $n-1$ جمله اول، یعنی $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ با S_{n-1} ، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$$

بنابراین با در اختیار داشتن S_n می‌توان به کمک رابطه زیر، جمله عمومی دنباله را تعیین کرد:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

❓ در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = n^2 - 8n$ به دست می آید. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

🔍 روش اول با توجه به این که $S_1 = a_1$ و $S_2 = a_1 + a_2$ است، داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 1 - 8 = -7 \Rightarrow a_1 = -7 \\ S_2 = 4 - 16 = -12 \Rightarrow a_1 + a_2 = -12 \xrightarrow{a_1 = -7} a_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -5 - (-7) = 2$$

جمله عمومی: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -7 + (n-1)(2) \Rightarrow a_n = 2n - 9$

🔍 روش دوم از رابطه $a_n = S_n - S_{n-1}$ استفاده می کنیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 8n) - ((n-1)^2 - 8(n-1)) = (n^2 - 8n) - (n^2 - 2n + 1 - 8n + 8) =$$

$$= (n^2 - 8n) - (n^2 - 10n + 9) \Rightarrow a_n = 2n - 9$$

📌 نکته مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی (S_n) ، عبارتی درجه دوم بر حسب n است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = an + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d \Rightarrow S_n = \underbrace{\frac{d}{2}}_A n^2 + \underbrace{(a - \frac{d}{2})}_B n = An^2 + Bn$$

ملاحظه می شود که در رابطه S_n ، عدد ثابت وجود ندارد و ضریب n^2 برابر نصف قدرنسبت است.

❓ در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = (k-1)n^2 + 2kn^2 - 5n$ به دست می آید. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

🔍 رابطه S_n بر حسب n ، از درجه دوم است، پس $k-1=0$ و در نتیجه $k=1$ می شود. بنابراین:

$$S_n = 2n^2 - 5n$$

می دانیم $S_1 = a_1$ و $S_2 = a_1 + a_2$ ، پس داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 2 - 5 = -3 \Rightarrow a_1 = -3 \\ S_2 = 8 - 10 = -2 \Rightarrow a_1 + a_2 = -2 \xrightarrow{a_1 = -3} a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 1 - (-3) = 4$$

📌 تذکر با توجه به نکته قبل، در $S_n = 2n^2 - 5n$ ، ضریب n^2 نصف قدرنسبت است، پس $d = 2 \times 2 = 4$ می شود.

در امتحانات تشریحی بهتره از نکته استفاده نکنید.

مجموع حملات دنباله های حسابی و هندسی (قسمت اول)

پرسش های تشریحی

درس
۱

معمولاً توی سوال های درست، غلط، نکات ریز و مهمی قرار گرفته، پس باید این قسمت رو با دقت مطالعه کنی.

برای درک بهتر این مطالب، توضیحاتی رو برای بعضی از سوال ها نوشتیم که البته در امتحان نهایی باری ندارن. (مگه این که در صورت سوال، دلایل رو هم از ما بخوان).

● درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

۱. در دنباله حسابی با جمله اول ۲۴ و قدرنسبت ۳-، مجموع ۱۷ جمله اول، برابر صفر است.

۲. مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n-1)}{2}$

۳. مجموع ده جمله اول اعداد طبیعی فرد برابر صد می شود.

۴. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی (S_n) ، عبارتی درجه دوم بر حسب n است.

۵. اگر مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی $S_n = 4n^2 - 3n$ باشد، آنگاه قدرنسبت دنباله برابر ۸ d می شود.

۶. حاصل عبارت $100 + \dots + 6 + 4 + 2$ ، برابر ۲۵۰۰ است.

۷. در یک دنباله حسابی، اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، به مجموع ۴۰ جمله اول دنباله، ۷۸۰ واحد افزوده خواهد شد.

(شهریور ۱۴۰۲)

اگر تعاریف و توضیحات درسنامه رو خوب خونده باشی، بیشتر سوالای این قسمت رو می‌تونی به راحتی جواب بدی.

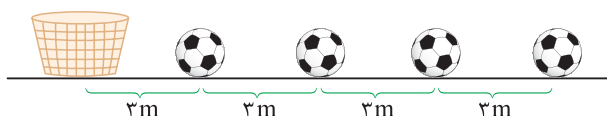
بعضی وقتا جای خالی رو خودت باید فکر کنی و عبارت مناسب رو قرار بدی، اما بعضی وقتا چند عبارت می‌دن و تو باید بین اونا، عبارت درست رو انتخاب کنی.

● جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

۸. اگر جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 5n - 2$ باشد، مجموع شانزده جمله اول دنباله برابر می‌شود. (شهریور ۱۴۰۲)
۹. مجموع جملات دنباله حسابی ۱۹۹، ...، ۵، ۳، ۱ برابر است. (کتاب درسی)
۱۰. مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۴، برابر است. (خرداد ۱۴۰۲)
۱۱. جمله از دنباله حسابی ...، ۱۲، ۷، x برابر ۶۰ است. (۶، ۵، ۴، ۳)
۱۲. در یک دنباله حسابی، اگر مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n^2 - n$ به دست آید، جمله چهارم آن برابر می‌شود.

● پرسش‌های تشریحی

۱۳. حاصل عبارت $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ را به دست آورید. (کتاب درسی)
۱۴. در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟ (خرداد ۱۴۰۲)
۱۵. در یک دنباله حسابی، جمله پانزدهم برابر ۱۰ است، مجموع ۲۹ جمله اول این دنباله را به دست آورید.
۱۶. مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ را بنویسید. (از فرمول مجموع جملات دنباله استفاده کنید). (خرداد ۱۴۰۳)
۱۷. روی محیط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید. (کتاب درسی)
۱۸. مطابق شکل، تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۳ متر است. دونه‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونه مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، او چند توپ را در سبد انداخته است؟ (کتاب درسی)



۱۹. در دنباله حسابی ...، ۵، ۸، ۱۱، ... حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟ (کتاب درسی)
۲۰. بین اعداد ۲۱- و ۴۳، پانزده واسطه حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این پانزده واسطه را به دست آورید.
۲۱. در دنباله حسابی ...، ۲۴، x ، ۳۰ مجموع جملات مثبت را به دست آورید.
۲۲. در یک دنباله حسابی، مجموع ۲۰ جمله اول، دو برابر مجموع ۱۴ جمله اول آن است. اگر جمله پنجم برابر ۱۰ باشد، قدرنسبت دنباله را تعیین کنید.
۲۳. مجموع اعداد بین ۱۰ تا ۱۰۰ که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد ۴ برابر ۱ باشد را به دست آورید.
۲۴. در یک دنباله حسابی، اگر به جمله اول ۵ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، در مجموع ۲۰ جمله اول دنباله چه تغییری صورت می‌گیرد؟
۲۵. در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n^2 + 5n$ به دست می‌آید. جمله عمومی این دنباله را مشخص کنید.
۲۶. در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج، ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید. (کتاب درسی)
۲۷. در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۰ و مجموع ۷ جمله بعدی آن برابر ۴۰ می‌باشد. جمله هشتم این دنباله را مشخص کنید.
۲۸. در یک دنباله حسابی، مجموع ۶ جمله اول با مجموع ۲۴ جمله اول آن برابر است. مجموع ۳۰ جمله اول دنباله را به دست آورید.
۲۹. در یک دنباله حسابی ۴۰ جمله‌ای، مجموع ۵ جمله اول برابر ۳۰ و مجموع ۵ جمله آخر برابر ۶۰ می‌باشد. مجموع تمام جملات را به دست آورید.
۳۰. اعداد طبیعی مضرب ۵ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد: $\{5\}, \{10, 15\}, \{20, 25, 30\}, \dots$ مجموع جملات در دسته دوازدهم را به دست آورید.
۳۱. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = pn^2 + (q - 2)n + q + 1$ به دست می‌آید. اگر قدرنسبت برابر ۴- باشد، مقدار عددی S_5 را محاسبه کنید.

فصل اول

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (قسمت دوم)

حسابان یازدهم

دنباله هندسی و مجموع جملات آن



دنباله هندسی:

دنباله‌ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول)، از ضرب جمله قبل در یک عدد ثابت به دست آمده باشد. عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با q و جمله اول را با a_1 یا a نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنباله هندسی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$$

بنابراین جمله عمومی دنباله هندسی یا همان جمله n ام، به صورت مقابل است:

$$a_n = a_1q^{n-1} \text{ : جمله عمومی}$$

توجه داشته باشید که جمله اول و قدرنسبت دنباله هندسی هیچ وقت نمی‌تونه برابر صفر باشه.

❓ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

🔍 در رابطه $a_n = a_1q^{n-1}$ ، با قرار دادن $n = 3$ و $n = 6$ ، جملات سوم و ششم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_6 = 96 \Rightarrow a_1q^5 = 96 \\ a_3 = 12 \Rightarrow a_1q^2 = 12 \end{cases}$$

طرفین دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1q^5}{a_1q^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \xrightarrow{a_1q^2=12} a_1 \times 4 = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

حال، با داشتن جمله اول و قدرنسبت می‌توان جمله عمومی را مشخص کرد:

$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow a_n = 3(2^{n-1})$$

■ **واسطه هندسی:** اگر a, b, c ، سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آن‌گاه جمله وسط یعنی b را واسطه هندسی بین a و c می‌گویند و داریم:

$$b^2 = ac$$

درج m واسطه هندسی بین دو عدد:

چنان چه بخواهیم بین دو عدد a و b ، تعداد m جمله قرار دهیم، طوری که کلیه اعداد با هم تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطه هندسی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم، با احتساب جملات a و b ، در کل $m+2$ جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است a_{m+2} را تشکیل داد.

$$a, \underbrace{}_{\text{جمله } m}, b$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$a_1 \qquad \qquad \qquad a_{m+2}$$

❓ بین اعداد ۲ و ۱۶۲ سه واسطه هندسی درج کنید.

🔍 اگر جمله اول را ۲ فرض کنیم، چون سه واسطه درج می‌شود، پس عدد ۱۶۲ جمله پنجم دنباله خواهد بود:

$$2, \underbrace{}_{\text{جمله ۳}}, 162$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$a_1 \qquad \qquad \qquad a_5$$

$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1q^4 \Rightarrow 162 = 2q^4 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

$$q = 3 \Rightarrow 2, 6, 18, 54, 162$$

$$q = -3 \Rightarrow 2, -6, 18, -54, 162$$

بنابراین واسطه‌ها به یکی از دو صورت زیر حاصل می‌شوند:

برای درج m واسطه هندسی بین a, b از رابطه $q^{m+1} = \frac{b}{a}$ هم میشه قدرنسبت رو حساب کرد، ولی به نظرم روش بالا بهتره.

مجموع جملات دنباله هندسی



برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت q به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

ابتدا فرض می‌کنیم مجموع n جمله اول دنباله برابر S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین این معادله را در $q \neq 0$ ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

دو سمت معادلات به دست آمده را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم:

$$S_n - qS_n = (a - aq) + (aq - aq^2) + \dots + (aq^{n-2} - aq^{n-1}) + (aq^{n-1} - aq^n)$$

$$\Rightarrow S_n - qS_n = a - aq^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a(1 - q^n) \xrightarrow{q \neq 1} S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

بنابراین مجموع جملات دنباله هندسی برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

در این رابطه، a_1 جمله اول، q قدرنسبت و n تعداد جملات است. ($q \neq 0, 1$, $a_1 \neq 0$)

تذکره رابطه $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ با شرط $q \neq 1$ برقرار است. در صورتی که $q = 1$ باشد، دنباله ثابت $a, a, \dots, a$ را خواهیم داشت که مجموع n جمله اول آن

$S_n = n \times a$ می‌شود. در ضمن فراموش نکنید که در دنباله هندسی، جمله اول و قدرنسبت نمی‌توانند برابر صفر باشند.

مجموع ۷ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید:

$$\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$S_7 = \frac{\frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^7)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{2}{3}(1 + \frac{1}{128})}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}(\frac{129}{128}) = \frac{43}{96}$$

جمله اول دنباله برابر $a_1 = \frac{2}{3}$ و قدرنسبت برابر است با:

$$\text{با استفاده از رابطه } S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \text{ داریم:}$$

در یک دنباله هندسی، مجموع ۴ جمله اول برابر ۲۸۰ و مجموع ۸ جمله اول برابر ۳۵۰ می‌باشد. جمله اول این دنباله چند برابر جمله نهم آن است؟

$$\text{با توجه به رابطه } S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ داریم:}$$

$$\begin{cases} S_4 = \frac{a(1 - q^4)}{1 - q} = 280 \\ S_8 = \frac{a(1 - q^8)}{1 - q} = 350 \end{cases}$$

دو سمت تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{a(1 - q^4)}{1 - q}}{\frac{a(1 - q^8)}{1 - q}} = \frac{280}{350} \Rightarrow \frac{1 - q^4}{1 - q^8} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(1 - q^4)(1 + q^4)}{1 - q^8} = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 + q^4 = \frac{4}{5} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{5}$$

می‌دانیم $a_n = a_1 q^{n-1}$ ، پس نسبت جمله اول به جمله نهم برابر می‌شود با:

$$\frac{a_1}{a_9} = \frac{a_1}{a_1 q^8} = \frac{1}{q^8} = \frac{1}{(q^4)^2} = \frac{1}{(\frac{1}{5})^2} = 25$$

یعنی جمله اول، ۲۵ برابر جمله نهم است.

❓ **جملات اول، هفتم و نوزدهم از یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. مجموع شش جمله اول دنباله هندسی چند برابر جمله اول است؟**

✔️ **جملات اول، هفتم و نوزدهم دنباله حسابی به صورت $a, a+6d, a+18d$ هستند. چون این جملات تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس می‌توان نوشت:**

$$a(a+18d) = (a+6d)^2 \Rightarrow a^2 + 18ad = a^2 + 12ad + 36d^2 \Rightarrow 6ad = 36d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a = 6d$$

با جایگزینی $a = 6d$ ، جملات $a, a+6d, a+18d$ به صورت $6d, 12d, 18d$ درمی‌آیند. چون این اعداد، جملات متوالی دنباله هندسی‌اند، پس $q = 2$ می‌شود (یا $2 = \frac{12d}{6d} = \frac{18d}{12d}$). حال، مجموع شش جمله اول دنباله هندسی را به دست می‌آوریم:

$$S_6 = \frac{a(1-q^6)}{1-q} = \frac{a(1-2^6)}{1-2} = \frac{-63a}{-1} = 63a$$

پس مجموع شش جمله اول، 63 برابر جمله اول است.

📌 **نکته** در مسائل مربوط به دنباله‌های هندسی، از اعداد توان‌دار، زیاد استفاده می‌شود، پس بهتر است برای این‌که سریع‌تر پاسخ بدهید آن‌ها را به خاطر بسپارید:

$$2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024$$

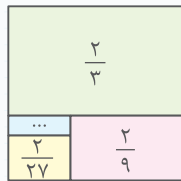
$$3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, 4^3 = 64, 4^4 = 256, 4^5 = 1024$$

$$5^3 = 125, 5^4 = 625, 6^3 = 216$$

❓ **طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا $\frac{2}{3}$ از مساحت آن را رنگ کرده، سپس $\frac{2}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله $\frac{2}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل $99/5$ درصد سطح مربع رنگ شده است؟**

✔️ **مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{2}{3}$ از سطح مربع رنگ می‌شود. در مرحله دوم $\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{3}$ باقی‌مانده، یعنی $\frac{2}{9}$ رنگ می‌شود. در مرحله سوم نیز $\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{9}$ باقی‌مانده، یعنی $\frac{2}{27}$ رنگ می‌شود و به همین ترتیب، قسمتی از مربع**

که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{2}{3}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{3}$ می‌دهند:



جملات دنباله: $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ‌شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99/5}{100}$ باشد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 1 - (\frac{1}{3})^n$$

$$S_n \geq \frac{99/5}{100} \Rightarrow 1 - (\frac{1}{3})^n \geq \frac{99/5}{100} \Rightarrow (\frac{1}{3})^n \leq 1 - \frac{99/5}{100} \Rightarrow (\frac{1}{3})^n \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 3^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 5$$

یعنی از مرحله پنجم، حداقل $99/5$ درصد مربع رنگ شده است.

اثبات چند اتحاد مهم به کمک مجموع جملات دنباله هندسی

$$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه فرض کنید:

S ، مجموع جملات دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = a$ می‌باشد، پس با توجه به رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$S = \frac{1(1-a^n)}{1-a} = \frac{-(a^n-1)}{-(a-1)} = \frac{a^n-1}{a-1} \Rightarrow a^n-1 = S(a-1) \Rightarrow a^n-1 = (1+a+a^2+\dots+a^{n-1})(a-1)$$

بنابراین:

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

از مطالب بالا اتحادهای زیر را می‌توان نتیجه گرفت: ($n \in \mathbb{N}$)

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) \text{ (فرد } n)$$

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}) \text{ (زوج } n)$$

❓ حاصل $\frac{1+x+x^2+\dots+x^9}{1+x}$ را به ازای $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست آورید.

🔍 روش اول عبارت $1+x+x^2+\dots+x^9$ ، مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = x$ می‌باشد، پس با توجه به

رابطه $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$\frac{1+x+x^2+\dots+x^9}{1+x} = \frac{1(1-x^{10})}{1-x} = \frac{1-x^{10}}{1-x^2}$$

حال، مقدار عبارت را به ازای $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^{10}}{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1 - ((\frac{1}{\sqrt{2}})^2)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{32}) = 2(\frac{31}{32}) = \frac{31}{16}$$

روش دوم از اتحادهایی که به آن‌ها اشاره شده، استفاده می‌کنیم:

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) \Rightarrow a^{10} - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^9)$$

$$\Rightarrow \frac{1+x+x^2+\dots+x^9}{1+x} = \frac{\frac{x^{10}-1}{x-1}}{1+x} = \frac{x^{10}-1}{x^2-1} \stackrel{\text{مانند روش اول}}{=} \frac{31}{16}$$

❓ حاصل عبارت $A = \frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} + x^3 + x$ را به ازای $x = \sqrt[4]{3}$ به دست آورید.

🔍 با تجزیه عبارت $x^5 + 1$ داریم:

$$A = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} + x^3 + x = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + x^3 + x$$

$$= x^4 + x^2 + 1 \stackrel{x=\sqrt[4]{3}}{=} 3 + \sqrt{3} + 1 = 4 + \sqrt{3}$$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (قسمت دوم)

پرسش‌های تشریحی

درس
۱

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۳۲. مجموع n جمله اول دنباله هندسی با قدرنسبت q و جمله اول a از رابطه $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ ($q \neq 1$) به دست می‌آید.

(شبه‌نهایی ۱۴۰۲)

۳۳. مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ برابر ۱۰۲۴ است.

۳۴. حاصل عبارت $(x-1)(x^6 + x^5 + \dots + x + 1)$ به ازای $x = 3$ برابر $3^7 - 1$ است.

(شبه‌نهایی ۱۴۰۲)

۳۵. مجموع ۸ جمله اول دنباله هندسی $\frac{16}{15}, \frac{8\sqrt{2}}{15}, \dots$ برابر $2 + \sqrt{2}$ است.

۳۶. اگر جملات یک دنباله هندسی را دو برابر کنیم، مجموع n جمله اول آن نیز دو برابر می‌شود.

۳۷. اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشد، آن‌گاه همواره $S_{2n} > S_n$ می‌شود.

● جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

۳۸. اگر مجموع n جمله اول از یک دنباله هندسی به صورت $S_n = 4 - 2^{2-n}$ باشد، آن‌گاه مقدار قدرنسبت برابر است.

۳۹. ساده شده کسر $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$ ، برابر است. ($x \neq 1$)

۴۰. اگر دنباله‌ای با جمله اول ۵، هم حسابی و هم هندسی باشد، مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله برابر می‌شود با

● پرسش‌های تشریحی

$$\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots$$

۴۱. مجموع پنج جمله اول دنباله هندسی مقابل را به دست آورید.

۴۲. مجموع چند جمله دنباله هندسی $\dots, 24, -12, 6$ برابر ۱۰۲۶ می‌شود؟

۴۳. اگر $S_n = 4 - \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}}$ ، مجموع n جمله اول از یک دنباله هندسی باشد، قدرنسبت و جمله اول دنباله را مشخص کنید.

۴۴. جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. جملات اول تا سوم این دنباله را بنویسید و سپس با استفاده از فرمول، تعیین کنید چند جمله اول از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۲۵۵ شود؟

(شبه‌نهایی ۱۴۰۳)

۴۵. بین دو عدد $\frac{1}{4}$ و $4\sqrt{2}$ ، هشت واسطه هندسی درج کرده‌ایم. مجموع این ده جمله را به دست آورید.

۴۶. در یک دنباله هندسی، مجموع شش جمله اول دنباله، ۹ برابر مجموع سه جمله اول آن است. مجموع ده جمله اول این دنباله چند برابر مجموع پنج جمله اول آن است؟

(شهریور ۱۴۰۲)

۴۷. در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، $\frac{1}{9}$ مجموع چهار جمله اول آن است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

۴۸. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۲۴ و مجموع شش جمله اول آن ۲۱ می‌باشد. جمله چهارم دنباله را به دست آورید.

۴۹. طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

(شهریور ۱۴۰۲)

۵۰. تعداد جملات یک دنباله هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت را بیابید.

۵۱. در خانه اول شطرنج، یک عدد گندم می‌گذاریم. در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار می‌دهیم. اگر وزن هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

(کتاب درسی)

آ وزن کل گندم چند گرم می‌شود؟

ب نشان دهید وزن گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر خواهد شد.

۵۲. تویی داریم که از هراتقاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۰ متری برسد. این توپ پس از پنج بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

(کتاب درسی)

۵۳. تویی را از ارتفاع ۸۱ متری سطح زمین رها می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد با زمین به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. تا لحظه‌ای که برای بار ششم به زمین برخورد می‌کند، توپ چه مسافتی را طی می‌کند؟

۵۴. جملات دوم، پنجم و چهاردهم از یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. مجموع چهار جمله اول دنباله هندسی چند برابر جمله اول است؟

۵۵. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع واحد داریم. در مرحله اول، وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث کوچک‌تری به دست آید. اگر این روند را تکرار کنیم، بعد از ۷ مرحله، مجموع محیط مثلث‌های به دست آمده (بدون احتساب مثلث ابتدایی) چقدر می‌شود؟



۵۶. ثابت کنید، نسبت مجموع $2n$ جمله اول یک دنباله هندسی به مجموع n جمله اول آن همواره برابر است با: $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$ ($q \neq -1$).

۵۷. برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیو، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۵۸. معادله $1 + x + x^2 + \dots + x^5 = \frac{x^7 + 1}{x - 1}$ را حل کنید.

۵۹. حاصل کسر $\frac{1 - a + a^2 - \dots + a^6}{1 - a^3 + a^6}$ را به ازای $a = \sqrt{5}$ به دست آورید.

۶۰. حاصل عبارت $\frac{(a^2 + 1)(a^6 - a^4 + a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(a^{14} + a^{12} + a^{10} + \dots + a^2 + 1)}$ را به ازای $a = \sqrt[4]{2}$ به دست آورید.

۲

بخش



پاسخ نامه

فصل ۱
جبر و معادله

۱ درست

توضیح: رابطه S_n را نوشته و با جایگذاری $a_1 = 24$ ، $d = -3$ و $n = 17$ مجموع جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}((2 \times 24) + 16 \times (-3)) \\ \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(48 - 48) = 0$$

۲ درست

توضیح: طبق مطالب کتاب درسی، مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دلیلش رو هم خیلی راحت میشه فهمید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

جمله اول جمله آخر

۳ درست

توضیح: **روش اول:** دنباله اعداد طبیعی فرد را در نظر بگیرید:

$$1, 3, 5, \dots$$

بنابراین یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۲ داریم. با استفاده از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ ، مجموع ده جمله اول را حساب می‌کنیم:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(1) + (9 \times 2)) = 5(20) = 100$$

روش دوم: طبق تمرین کتاب درسی، مجموع n جمله اول اعداد طبیعی

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

فرد برابر با n^2 است؛ یعنی:

پس مجموع ده جمله اول اعداد طبیعی فرد، برابر $10^2 = 100$ می‌شود.

۴ درست

توضیح: رابطه S_n را می‌نویسیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = na + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d \\ \Rightarrow S_n = \underbrace{\frac{d}{2}n^2}_A + \underbrace{(a - \frac{d}{2})n}_B = An^2 + Bn$$

پس مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی، عبارتی درجه دوم برحسب n است.

۵ درست

توضیح: می‌دانیم S_1 برابر جمله اول و S_2 برابر مجموع جمله اول و دوم است؛ بنابراین:

$$S_1 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$S_2 = 16 - 6 = 10 \Rightarrow a_1 + a_2 = 10 \xrightarrow{a_1=1} a_2 = 9$$

پس قدرنسبت برابر می‌شود با:

$$d = a_2 - a_1 = 9 - 1 = 8$$

۶

نادرست

توضیح: از عدد ۲ فاکتور گرفته، سپس با استفاده از فرمول زیر حاصل عبارت را حساب می‌کنیم:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 2 \left(\frac{50 \times 51}{2} \right) = 2550$$

حاصل عبارت رو از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی هم میشه حساب کرد.

۷

درست

توضیح: اگر مجموع 40 جمله اول دنباله را قبل و بعد افزایش قدرنسبت به ترتیب با S'_{40} و S_{40} نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2a + 39d) = 20(2a + 39d) \\ S'_{40} = \frac{40}{2}(2a + 39(d+1)) = 20(2a + 39d + 39) = 20(2a + 39d) + 780 \\ \Rightarrow S'_{40} = S_{40} + 780$$

پس به مجموع 40 جمله اول، 780 واحد اضافه می‌شود.

۸

۶۴۸

توضیح: با توجه به جمله عمومی $a_n = 5n - 2$ ، چند جمله ابتدایی دنباله را می‌نویسیم:

جمله اول برابر $a_1 = 3$ و قدرنسبت برابر $d = 5$ است. بنابراین مجموع 16 جمله اول، برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}(2(3) + 15(5)) \\ = 8(6 + 75) = 8 \times 81 = 648$$

۹

۱۰۰۰۰

توضیح: **روش اول:** جمله اول و آخر دنباله به ترتیب ۱ و ۱۹۹ است. ابتدا با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 199 = 1 + (n-1) \times 2 \\ \Rightarrow 199 = 2n - 1 \Rightarrow n = 100$$

حال، مجموع جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 199) = 50 \times 200 = 10000$$

روش دوم: از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ اگر فرض کنیم $2n - 1 = 199$ ، آن‌گاه $n = 100$ می‌شود، بنابراین داریم:

$$1 + 3 + 5 + \dots + \underbrace{199}_{2(100)-1} = (100)^2 = 10000$$

۱۰

۱۱۸۸

توضیح: کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد دو رقمی مضرب ۴ به ترتیب $3 \times 4 = 12$ و $96 = 24 \times 4$ است. اعداد دو رقمی مضرب ۴، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۲ و قدرنسبت ۴ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)(4) \\ \Rightarrow 84 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 21 \Rightarrow n = 22$$

۱۴

با توجه به این‌که $a_1 = 4$ و $d = 8$ است، داریم:

$$S_n > 400 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 400 \Rightarrow \frac{n}{2}(2 \times 4 + (n-1) \times 8) > 400$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(8 + 8n - 8) > 400 \Rightarrow 4n^2 > 400 \Rightarrow n^2 > 100$$

$$\Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

پس باید حداقل ۱۱ جمله اول دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود.

۱۵

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است. بنابراین:

$$a_{15} = 10 \Rightarrow a_1 + 14d = 10$$

با استفاده از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$S_{29} = \frac{29}{2}(2a_1 + 28d) = \frac{29}{2}(2(a_1 + 14d)) = 29 \times 10 = 290$$

۱۶

کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد دو رقمی مضرب ۶ به ترتیب $12 \times 6 = 72$ و $96 = 16 \times 6$ است. اعداد دو رقمی مضرب ۶، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۲ و قدرنسبت ۶ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$12, 18, 24, \dots, 96$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)(6)$$

$$\Rightarrow 84 = 6(n-1) \Rightarrow n-1 = 14 \Rightarrow n = 15$$

پس این دنباله، ۱۵ جمله دارد. حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(12 + 96) = 15(6 + 48) = 810$$

تذکره برای تعیین تعداد جملات، چون دنباله به صورت $2 \times 6, 3 \times 6, \dots, 16 \times 6$ است، پس می‌توان گفت $n = 16 - 2 + 1 = 15$.

۱۷

نقطه اول را به هریک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم، در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم تا ۱۷ وتر حاصل شود. با ادامه این عمل، تعداد وترهای حاصل برابر $1 + 2 + \dots + n$ می‌شود. می‌دانیم $19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1$ مجموع جملات یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۱ می‌باشد که بعد از ساده کردن به رابطه $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$1 + 2 + \dots + 17 + 18 + 19 = \frac{19(19+1)}{2} = 190$$

۱۸

دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد، باید مسافت $2(3) = 6$ متر را طی کند، برای توپ دوم باید $2(3+3) = 12$ متر و برای توپ سوم $2(3+3+3) = 18$ متر و ...، بنابراین مسافت‌های طی شده در هر مرحله، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهند.

پس این دنباله، ۲۲ جمله دارد. حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2}(12 + 96) = 11 \times 108 = 1188$$

تذکره برای تعیین تعداد جملات، چون دنباله به صورت $3 \times 4, 4 \times 4, \dots, 24 \times 4$ است، پس می‌توان گفت $n = 24 - 3 + 1 = 22$.

۱۱

۵

توضیح: اگر a, b, c ، سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$

بنابراین:

$$y = \frac{x+12}{2} \Rightarrow x = 2$$

با توجه به آن‌که جمله اول برابر ۲ و قدرنسبت برابر $5 = 7 - 2$ است، رابطه مجموع جملات را نوشته و برابر ۶۰ قرار می‌دهیم:

$$S_n = 60 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 60 \Rightarrow \frac{n}{2}(2 \times 2 + (n-1) \times 5) = 60$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(4 + 5n - 5) = 60 \Rightarrow n(5n - 1) = 120$$

با امتحان گزینه‌ها نتیجه می‌گیریم $n = 5$ درست است.

۱۲

۲۰

توضیح: می‌دانیم $a_n = S_n - S_{n-1}$ ، بنابراین:

$$a_4 = S_4 - S_3 = (3(4^2) - 4) - (3(3^2) - 3) = 44 - 24 = 20$$

۱۳

روش اول مجموع $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ ، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $d = 2$ است. بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)2) = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

روش دوم چون $a_n = 2n - 1$ را داریم، پس از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ می‌توان استفاده کرد:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + (2n-1)) = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

روش سوم مطابق آن‌چه در کتاب درسی به آن اشاره شده، مجموع n

جمله اول اعداد فرد را، از شکل زیر نیز می‌توان به دست آورد. بدین ترتیب که اگر در n سطر و n ستون، دایره قرار دهیم، بدیهی است تعداد دایره‌ها برابر n^2 می‌شود. حال به صورتی که در شکل مشخص است کل دایره‌ها را n قسمت می‌کنیم، به طوری که در قسمت اول ۱ دایره، در قسمت دوم ۳ دایره، در قسمت سوم ۵ دایره و به همین صورت در قسمت n ام، $2n-1$ دایره وجود دارد. می‌دانیم مجموع تعداد آن‌ها باید برابر n^2 باشد، پس:

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۲۱

چون $۳۰, ۲۴, X, ۳۰$ ، سه جمله متوالی دنباله حسابی هستند، بنابراین:
 $۲X = ۳۰ + ۲۴ \Rightarrow ۲X = ۵۴ \Rightarrow X = ۲۷$
 پس جملات دنباله به صورت $۳۰, ۲۷, ۲۴, \dots$ درمی آیند و در نتیجه $a_1 = ۳۰$ و $d = ۲۷ - ۳۰ = -۳$ می شود. حال جمله عمومی دنباله را تعیین می کنیم:
 $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = ۳۰ + (n-1)(-۳) \Rightarrow a_n = -۳n + ۳۳$
 برای یافتن تعداد جملات مثبت، نامعادله $a_n > ۰$ را حل می کنیم:
 $-۳n + ۳۳ > ۰ \Rightarrow ۳n < ۳۳ \Rightarrow n < ۱۱ \Rightarrow n \leq ۱۰$
 بنابراین دنباله، شامل ۱۰ جمله مثبت است که مجموع آن برابر است با:
 $S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} (2(30) + 9(-3))$
 $= 5(60 - 27) = 165$

۲۲

از رابطه $S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$ داریم:
 $S_{10} = \frac{10}{2} (2a + 9d) = 20a + 45d$
 $S_{14} = \frac{14}{2} (2a + 13d) = 14a + 91d$
 $S_{10} = 2S_{14} \Rightarrow 20a + 45d = 2(14a + 91d) \Rightarrow 20a + 45d = 28a + 182d$
 $\Rightarrow 8d = 8a \Rightarrow d = a$
 جمله پنجم برابر ۱۰ است. بنابراین:
 $a_5 = 10 \Rightarrow a + 4d = 10 \xrightarrow{a=d} d + 4d = 10 \Rightarrow 5d = 10 \Rightarrow d = 2$

۲۳

کوچک ترین و بزرگ ترین عدد بین ۱۰ تا ۱۰۰ که باقی مانده تقسیم آن بر عدد ۴ برابر ۱ است، به ترتیب برابر ۱۳ و ۹۷ می باشد. پس اعداد مورد نظر، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۳ و قدرنسبت ۴ می دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می کنیم:
 $۱۳, ۱۷, ۲۱, \dots, ۹۷$
 $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow ۹۷ = ۱۳ + (n-1)(۴)$
 $\Rightarrow ۹۷ = ۴n + ۹ \Rightarrow ۸۸ = ۴n \Rightarrow n = ۲۲$
 بنابراین این دنباله ۲۲ جمله دارد، حال، مجموع این اعداد را حساب می کنیم:
 $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2} (13 + 97) = 11 \times 110 = 1210$

۲۴

مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d برابر است با:
 $S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} (2a + 19d) = 10(2a + 19d)$
 حال، مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی با جمله اول $a+5$ و قدرنسبت $d-2$ را حساب می کنیم:
 $S'_{20} = \frac{20}{2} (2(a+5) + 19(d-2)) = 10(2a + 10 + 19d - 38)$
 $= 10(2a + 19d) - 280 \Rightarrow S'_{20} = 10(2a + 19d) - 280$
 $\Rightarrow S'_{20} = S_{20} - 280$
 پس نتیجه می گیریم از مجموع ۲۰ جمله، ۲۸۰ واحد کم می شود.

اگر n ، تعداد توپ های انداخته شده در سبد باشد، از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی، داریم:

$$S = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} (12 + (n-1)6) \\ \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} (6n + 6) \Rightarrow 918 = 3n(n+1) \Rightarrow 306 = n(n+1)$$

برای حل معادله $n(n+1) = 306$ به جای استفاده از دلتا بهتر است، بگوییم ضرب دو عدد طبیعی متوالی ۳۰۶ شده و چون $17 \times 18 = 306$ ، پس $n = 17$ می باشد.

۱۹

جمله اول $a_1 = 5$ و قدرنسبت $d = 8 - 5 = 3$ است، پس مجموع n جمله دنباله حسابی برابر می شود با:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (10 + (n-1) \times 3) = \frac{n}{2} (3n + 7)$$

باید $S_n > 493$ باشد:

$$\frac{n}{2} (3n + 7) > 493 \Rightarrow n(3n + 7) > 986 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 986 > 0$$

به کمک Δ ، ریشه های $3n^2 + 7n - 986 = 0$ را به دست می آوریم:

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 3 \times (-986)}}{2 \times 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{11881}}{6} = \frac{-7 \pm 109}{6} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17$$

$$\Rightarrow n > 17 \Rightarrow n \geq 18$$

بنابراین باید حداقل ۱۸ جمله دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۹۳ بیشتر شود.

تذکره به جای حل نامعادله $n(3n+7) > 986$ می توانید با امتحان چند عدد طبیعی، تعداد جملات را بیابید.

$$n = 10 \Rightarrow n(3n+7) = 10 \times 37 = 370$$

باید n را بزرگ تر در نظر بگیریم:

$$n = 16 \Rightarrow n(3n+7) = 16 \times 55 = 880$$

$$n = 17 \Rightarrow n(3n+7) = 17 \times 58 = 986$$

در نتیجه $n > 17$ یا $n \geq 18$ می شود.

۲۰

چون ۱۵ واسطه درج می کنیم، پس دنباله حاصل ۱۷ جمله دارد که جمله اول برابر ۲۱- و جمله هفدهم برابر ۴۳ است. برای پیدا کردن مجموع پانزده واسطه حسابی، ابتدا مجموع کل اعداد را حساب کرده و حاصل را منهای اعداد ۲۱- و ۴۳ می کنیم:

$$\begin{array}{c} -21, \text{ } \bigcirc, \text{ } \bigcirc, \dots, \text{ } \bigcirc, \text{ } 43 \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ a_1 \qquad \qquad \qquad a_{17} \end{array}$$

۱۵ واسطه

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (-21 + 43) = \frac{17}{2} (22) = 17 \times 11 = 187$$

$$187 - (-21 + 43) = 165$$

اگر جمله اول رو ۴۳ و جمله هفدهم رو ۲۱- در نظر می گرفتیم باز هم، به همین جواب می رسیدیم.

۲۸

با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ داریم:

$$S_6 = S_{24} \Rightarrow \frac{1}{2}(2a + 5d) = \frac{4}{2}(2a + 23d)$$

$$\Rightarrow 2a + 5d = 4a + 46d \Rightarrow -2a = 41d \Rightarrow a = -\frac{41}{2}d$$

$$\Rightarrow a = -\frac{29}{2}d$$

حال مجموع ۳۰ جمله اول دنباله را معلوم می‌کنیم:

$$S_{30} = \frac{15}{2}(2a + 29d)$$

$$\xrightarrow{a = -\frac{29}{2}d} S_{30} = 15(2(-\frac{29}{2}d) + 29d) = 15 \times 0 = 0$$

۲۹

توی این تیپ سوال‌ها از فرمول مجموع جملات استفاده نمی‌کنیم.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30 \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 60 \end{cases}$$

دو رابطه بالا را نظریه‌نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$(a_1 + a_6) + (a_2 + a_7) + \dots + (a_5 + a_{10}) = 90$$

طبق رابطه اندیس‌ها داریم:

$$a_1 + a_6 = a_2 + a_7 = \dots = a_5 + a_{10}$$

$$\Rightarrow 5(a_1 + a_6) = 90 \Rightarrow a_1 + a_6 = 18$$

حال، مجموع تمام جملات را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_6) = 5 \times 18 = 90$$

۳۰

در دسته اول، یک عدد مضرب ۵، در دسته دوم، دو عدد مضرب ۵، در دسته سوم، سه عدد مضرب ۵ و به همین ترتیب در دسته دوازدهم، دوازده عدد مضرب ۵ وجود دارد. ابتدا تعداد کل جملات از دسته اول تا دسته یازدهم را تعیین می‌کنیم:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 11 = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

بنابراین جمله آخر دسته یازدهم، ۶۶ امین جمله دنباله اعداد طبیعی مضرب ۵ می‌باشد:

$$5, 10, 15, 20, \dots \Rightarrow a_{66} = 66 \times 5 = 330$$

پس جمله آخر دسته یازدهم، ۳۳۰ و در نتیجه جمله اول دسته دوازدهم، ۳۳۵ می‌شود. حال، مجموع جملات دسته دوازدهم که یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 335$ ، قدرنسبت $d = 5$ و تعداد $n = 12$ است را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(2(335) + 11 \times 5)$$

$$= 6 \times 725 = 4350$$

۲۵

روش اول: باتوجه به این‌که $S_1 = a_1$ ، $S_2 = a_1 + a_2$ است، داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 3 + 5 = 8 \Rightarrow a_1 = 8 \\ S_2 = 3(2) + 5(2) = 22 \Rightarrow a_1 + a_2 = 22 \xrightarrow{a_1 = 8} a_2 = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = 14 - 8 = 6$$

جمله عمومی: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)(6) = 6n + 2$

روش دوم: از رابطه $a_n = S_n - S_{n-1}$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 5n - 2(n-1)^2 - 5(n-1)$$

$$= 3n^2 + 5n - (3n^2 - 6n + 2 + 5n - 5)$$

$$= 3n^2 + 5n - (3n^2 - n - 3) = 6n + 2$$

۲۶

مجموع جملات زوج و فرد را نوشته و از هم کم می‌کنیم:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150$$

$$- a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = 15$$

$$\Rightarrow \underbrace{d + d + \dots + d}_{10} = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1.5$$

می‌دانیم $S_{20} = 150 + 135 = 285$ ، بنابراین:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 285 \xrightarrow{d=1.5} 10(2a_1 + 19 \times 1.5) = 285$$

$$\Rightarrow 20a_1 + 285 = 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

۲۷

مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۰ و مجموع ۷ جمله بعدی برابر ۴۰ است. پس نتیجه می‌گیریم مجموع ۱۲ جمله اول آن برابر $20 + 40 = 60$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$S_5 = 20 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 20 \Rightarrow \frac{1}{2}(2(a_1 + 2d)) = 4$$

$$S_{12} = 60 \Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 60 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 10$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 4 \\ 2a_1 + 11d = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 4d = -8 \\ 2a_1 + 11d = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 7d = 2 \Rightarrow d = \frac{2}{7}$$

مقدار d را در معادله $a_1 + 2d = 4$ قرار داده تا جمله اول به دست آید:

$$a_1 + 2(\frac{2}{7}) = 4 \Rightarrow a_1 = 4 - \frac{4}{7} \Rightarrow a_1 = \frac{24}{7}$$

در نتیجه جمله هشتم برابر می‌شود با:

$$a_8 = a_1 + 7d = \frac{24}{7} + 7(\frac{2}{7}) \Rightarrow a_8 = \frac{38}{7}$$

با استفاده از $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ، مجموع ۸ جمله اول دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$S_8 = \frac{16(1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^8)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{16(1-\frac{1}{16})}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{15 \times \frac{16}{16}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{15\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 15\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

۳۶

درست

توضیح: مجموع n جمله اول دنباله هندسی با قدرنسبت q ($q \neq 1$) و جمله اول a به صورت زیر است:

$$a, aq, aq^2, \dots \Rightarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

با دو برابر کردن جملات دنباله داریم:

$$2a, 2aq, 2aq^2, \dots$$

در دنباله جدید، جمله اول $2a$ و قدرنسبت q است، پس مجموع جملات برابر می‌شود با:

$$S'_n = \frac{2a(1-q^n)}{1-q} = 2S_n$$

بنابراین مجموع n جمله اول دنباله نیز دو برابر می‌شود.

۳۷

درست

توضیح: اگر جملات دنباله را با a_n نمایش می‌دهیم، S_p برابر می‌شود با:

$$S_p = \overbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_p}^{S_0} + \overbrace{a_{p+1} + \dots + a_{2p}}^{\text{عدد مثبت}}$$

چون همه جملات مثبت فرض شده‌اند، پس به راحتی می‌توان نتیجه گرفت $S_p > S_0$ است.

مواظب باش گول نخوری!

اگر قدرنسبت مثلاً $q = \frac{1}{2}$ باشد، با فرض مثبت بودن جملات، $a_p < a_1$ همیشه، ولی برای مجموعه‌شون این‌طور نیست.

۳۸

$$\frac{1}{2}$$

توضیح: می‌دانیم $S_1 = a_1$ و $S_2 = a_1 + a_2$ ، بنابراین:

$$S_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$S_2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow a_1 + a_2 = 3 \xrightarrow{a_1=2} a_2 = 1$$

پس نتیجه می‌گیریم $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ است.

تذکره: در رابطه مجموع جملات دنباله هندسی (S_n) پایه‌ای که به توان n رسیده، قدرنسبت دنباله است:

$$S_n = 4 - 2^{2-n} = 4 - 2^2 \times 2^{-n} = 4 - 4(\frac{1}{2})^n \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۳۱

در رابطه S_n ، نباید عدد ثابت داشته باشیم، پس $q+1=0$ و در نتیجه $q=-1$ می‌شود. بنابراین داریم:

$$S_n = pn^2 - 3n$$

مقادیر a_1 و $S_2 = a_1 + a_2$ را به دست می‌آوریم:

$$S_1 = p - 3 \Rightarrow a_1 = p - 3$$

$$S_2 = 4p - 6 \Rightarrow a_1 + a_2 = 4p - 6 \Rightarrow p - 3 + a_2 = 4p - 6$$

$$\Rightarrow a_2 = 3p - 3$$

از این‌که قدرنسبت برابر ۴- است، مقدار p را تعیین می‌کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = (3p - 3) - (p - 3) = 2p \Rightarrow 2p = -4 \Rightarrow p = -2$$

$$\Rightarrow S_n = -2n^2 - 3n \Rightarrow S_8 = -50 - 15 = -65$$

تذکره: طبق نکات درسنامه، ضریب n^2 با نصف قدرنسبت برابر است:

$$p = \frac{d}{2} \Rightarrow p = \frac{-4}{2} \Rightarrow p = -2$$

البته بهتر است در امتحانات تشریحی از این نکته استفاده نکنید.

۳۲

درست

توضیح: توجه داشته باشید که این رابطه، همان فرمولی است که در درسنامه به آن اشاره شد، زیرا:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{-a(q^n-1)}{-(q-1)} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

۳۳

نادرست

توضیح: جمله اول این دنباله هندسی برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۲ است. بنابراین:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_1 = \frac{1(1-(2)^1)}{1-2} = \frac{1-2}{-1} = 1$$

۳۴

درست

توضیح: مطابق مطالب درسنامه، داریم:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

پس حاصل عبارت برابر می‌شود با:

$$(x-1)(x^6 + x^5 + \dots + x + 1) = (x^7 - 1) \xrightarrow{x=3} 3^7 - 1$$

۳۵

درست

توضیح: جمله اول این دنباله هندسی برابر $a_1 = \frac{16}{15}$ و قدرنسبت آن برابر است با:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{15} \sqrt{2}}{\frac{16}{15}} = \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۴۴

جملات اول تا سوم برابر می‌شوند با:

$$a_1 = 2^0 = 1; a_2 = 2^1 = 2; a_3 = 2^2 = 4$$

دنباله: ۱, ۲, ۴, ...

پس یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = 2$ داریم. حال مجموع ۸ جمله اول را برابر ۲۵۵ قرار می‌دهیم تا تعداد جملات به دست آید:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 255 \Rightarrow 1-2^n = -255$$

$$\Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین مجموع ۸ جمله اول این دنباله برابر ۲۵۵ می‌باشد.

۴۵

چون ۸ جمله درج می‌کنیم، پس دنباله حاصل ۱۰ جمله دارد که جمله اول $\frac{1}{4}$ و جمله دهم برابر $4\sqrt{2}$ است:

$$\frac{1}{4}, \underbrace{\quad, \quad, \dots, \quad}_{8 \text{ واسطه}}, 4\sqrt{2}$$

$a_1 \qquad \qquad \qquad a_{10}$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 4\sqrt{2} = \frac{1}{4} \times q^9 \Rightarrow 16\sqrt{2} = q^9 \Rightarrow 2^4 \times 2^{\frac{1}{2}} = q^9$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{9}{2}} = q^9 \Rightarrow (\sqrt{2})^9 = (q)^9 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

حال، مجموع ده جمله را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{1}{4}(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2^5}{4(1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-31}{4(1-\sqrt{2})} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{-31(1+\sqrt{2})}{4(1-2)} = \frac{31}{4}(1+\sqrt{2})$$

۴۶

از این‌که $S_9 = 9S_3$ است، مقدار q را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a(1-q^9)}{1-q} = 9 \left(\frac{a(1-q^3)}{1-q} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1-q^9)(1+q^3) = 9(1-q^3)$$

$$\Rightarrow 1+q^3 = 9 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a(1-q^5)}{1-q}} = \frac{(1-q^5)(1+q^5)}{1-q^5} = 1+q^5 = 1+2^5 = 33$$

یعنی مجموع ده جمله اول، ۳۳ برابر مجموع پنج جمله اول دنباله است.

۳۹

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

توضیح: از اتحاد $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x^6 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^5 + \dots + x^2 + x + 1)}{x-1} = x^5 + \dots + x^2 + x + 1$$

۴۰

۱۰۰

توضیح: تنها دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی می‌تواند باشد، دنباله ثابت است. پس دنباله موردنظر برابر می‌شود با:

$$5, 5, \dots, 5$$

بنابراین مجموع بیست جمله آن برابر $20 \times 5 = 100$ است.

۴۱

جمله اول دنباله برابر $a_1 = \frac{3}{4}$ و قدرنسبت برابر است با:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

با استفاده از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$S_5 = \frac{\frac{3}{4}(1-(-\frac{1}{3})^5)}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{\frac{3}{4}(1+\frac{1}{243})}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8} \left(\frac{244}{243} \right) = \frac{61}{54}$$

۴۲

ابتدا قدرنسبت دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-12}{6} = -2$$

با استفاده از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ مجموع n جمله اول را حساب کرده و برابر ۱۰۲۶ قرار می‌دهیم تا مقدار n به دست آید:

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = \frac{171}{1026} \Rightarrow 1-(-2)^n = 3 \times 171 = 513$$

$$\Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

پس مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی برابر ۱۰۲۶ می‌شود.

۴۳

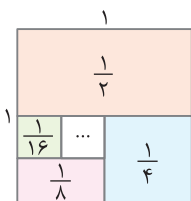
می‌دانیم $S_1 = a_1 + a_2$ و $S_7 = a_1 + a_2$ ، بنابراین:

$$S_1 = 4 - \frac{(-1)}{1} = 5 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$S_7 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow a_1 + a_7 = \frac{15}{4} \xrightarrow{a_1=5} a_7 = -\frac{5}{4}$$

پس جمله اول برابر $a_1 = 5$ و قدرنسبت برابر می‌شود با:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{5}{4}}{5} = -\frac{1}{4}$$



حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده،
بزرگ‌تريا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - (\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

یعنی از مرحله هفتم به بعد، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم به جای این‌که بگوییم، مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تريا

مساوی $\frac{99}{100}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ‌نشده کم‌تريا مساوی

$\frac{1}{100}$ باشد. در مرحله اول $\frac{1}{4}$ ، در مرحله دوم $\frac{1}{8}$ ، در مرحله سوم $\frac{1}{16}$ و به همین

ترتیب در مرحله n ام، $\frac{1}{2^n}$ از مساحت مربع، رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

روش اول، روش کتاب درسیه، اما روش دوم، سریع‌تر و کوتاه‌تره. سعی کن مفهوم هر دو روش رو خوب یاد بگیری ولی در امتحانات تشریحی بهتره از روش اول بری، چون شاید به روش دوم نمره کامل ندن.

۵۰

می‌دانیم اگر جمله اول یک دنباله هندسی a_1 ، قدرنسبت آن q و تعداد جملات آن n باشد، آن‌گاه مجموع تمام جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

دنباله جملات ردیف فرد، یک دنباله هندسی است که جمله اول آن a_1 ، قدرنسبت آن q^2 و تعداد جملات آن $\frac{n}{2}$ می‌باشد. پس مجموع جملات

ردیف فرد برابر است با:

$$S_{\frac{n}{2}} = \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2}$$

در نتیجه داریم:

$$S_n = 3S_{\frac{n}{2}} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{3}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{3}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow 1 = \frac{3}{1+q} \Rightarrow q+1=3 \Rightarrow q=2$$

۵۱

(آ) تعداد گندم‌های موجود در هر خانه، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند که جمله اول آن ۱، قدرنسبت آن ۲ و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد. تعداد کل گندم‌ها، حاصل جمع جملات این دنباله است:

جملات دنباله: ۱، ۲، ۴، ۸، ...

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = \frac{-(2^{64}-1)}{-1} = 2^{64} - 1$$

با توجه به این‌که وزن هر دانه گندم یک گرم است، وزن کل گندم‌ها $2^{64} - 1$ گرم می‌شود.

۴۷

با توجه به رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ، داریم:

$$S_8 = \frac{1}{9} S_7 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{1}{9} \times \frac{a_1(1-q^7)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1-q^8 = \frac{1}{9}(1-q^7)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1-q^8)(1+q^8) = \frac{1}{9}(1-q^7)(1+q^7) \Rightarrow 1+q^8 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow q^8 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[4]{9}} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴۸

با توجه به رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ، داریم:

$$\begin{cases} S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21 \\ S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = 24 \end{cases}$$

دو سمت تساوی‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}} = \frac{21}{24} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^7} = \frac{7}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(1-q^6)(1+q^7)}{1-q^7} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow 1+q^7 = \frac{7}{8} \Rightarrow q^7 = -\frac{1}{8} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

مقدار $q = -\frac{1}{2}$ را در رابطه $\frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = 24$ قرار داده تا جمله اول

به‌دست آید:

$$\frac{a_1(1-(-\frac{1}{2})^7)}{1-(-\frac{1}{2})} = 24 \Rightarrow \frac{a_1(1+\frac{1}{128})}{1-\frac{1}{2}} = 24 \Rightarrow \frac{a_1(\frac{129}{128})}{\frac{1}{2}} = 24 \Rightarrow \frac{129}{64} a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = 32$$

$$a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow a_7 = 32 \times (-\frac{1}{2})^6 = 32 \times (\frac{1}{64}) = \frac{1}{2}$$

۴۹

روش اول مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{1}{4}$ ، مرحله

دوم $\frac{1}{4}$ ، مرحله سوم $\frac{1}{8}$ و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{4}$ و

قدرنسبت $q = \frac{1}{4}$ می‌دهند:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$