



حسابان ۲

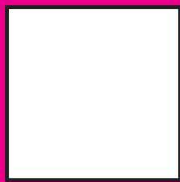
پایه دوازدهم  
رشته ریاضی و فیزیک

مهندس حبیب شفیعی

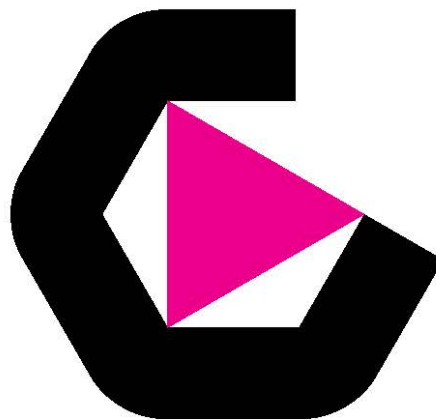


## حسابان ۲

حل تصویری تک تک سؤالات  
کتاب فرمول ۲۰ در گاج لایو



برای مشاهده ویدیوها در سایت [gajlive.ir](http://gajlive.ir)  
برچسب را خراش داده و از کد زیر استفاده کنید



پشتیبانی  
۰۲۱-۶۴۲۰

[www.gajlive.ir](http://www.gajlive.ir)

## چند نکته در مورد این کتاب و نحوه استفاده از آن

- ۱ در نگارش کتاب سعی شده خط به خط کتاب درسی با بیانی ساده و قابل فهم ارائه شود، طوری که برای هر دانش آموز سخت کوش و با هر سطح معلوماتی مفید باشد.
- ۲ همه سؤال ها و تمرین های کتاب درسی در قالب سؤال های تألیفی و امتحانات نهایی به طور کامل پوشش داده شده است.
- ۳ امتحانات نهایی معمولاً با پرسش هایی با عنوان «تشخیص درستی یا نادرستی عبارت ها» یا «تکمیل جاهای خالی با عبارت مناسب» شروع می شوند که با وجود نکات ریزی که در بعضی از آن ها قرار گرفته برای خیلی از دانش آموزان چالش جدی محسوب می شود. به همین دلیل پرسش های این قسمت و پاسخ آن ها متنوع و با دقت و وسواس بیش تری طرح و تشریح شده اند.
- ۴ برای استفاده بهتر دانش آموزان، چینش سؤال ها در هر مبحث غالباً از ساده به سخت می باشد.
- ۵ سؤال هایی که با نشان 🌟 مشخص شده اند ممکن است از سطح امتحانات نهایی بالاتر باشد، به همین دلیل فقط به دانش آموزانی که زمان بیش تری در اختیار دارند و علاقه مند هستند توصیه می شود.
- ۶ **کلید نهایی** برای این که جزئیات بارم بندی پاسخ های تشریحی را مشاهده کنید، در هر مبحث چند نمونه از پاسخ های تشریحی آموزش و پرورش را عیناً قرار داده ایم.

### و در نهایت:

امیدواریم با استفاده از این کتاب و درک عمیق مفاهیم آن، فرمول بیست شدن در امتحان نهایی را فرا گرفته و به اوج تسلط و آمادگی برسید و خوشحال می شویم موفقیت تان را با ما به اشتراک بگذارید. خواهشمندیم جهت بهبود کیفیت کتاب نظرات و پیشنهادات خود را با ما در میان بگذارید.

| پاسخ | درسنامه و سؤالات |
|------|------------------|
| ۱۳۸  | ۱۰ تا ۱۸         |
| ۱۶۷  | ۴۰ تا ۴۸         |
| ۱۸۷  | ۶۱ تا ۶۷         |
| ۲۰۵  | ۸۴ تا ۸۸         |
| ۲۲۹  | ۱۱۴ تا ۱۲۰       |

|                                          |
|------------------------------------------|
| فصل اول: تابع                            |
| فصل دوم: مثلثات                          |
| فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت |
| فصل چهارم: مشتق                          |
| فصل پنجم: کاربردهای مشتق                 |

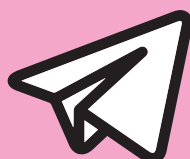
## امتحان نهایی



| جدول بارم‌بندی حسابان ۲ |          |          |
|-------------------------|----------|----------|
| فصل                     | نوبت اول | نوبت دوم |
| اول                     | ۷        | ۳        |
| دوم                     | ۶        | ۳        |
| سوم                     | ۷        | ۳        |
| چهارم                   | —        | ۶        |
| پنجم                    | —        | ۵        |
| مجموع                   | ۲۰       | ۲۰       |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| آزمون ۱: خردادماه ۱۴۰۲        | ۲۵۴ |
| آزمون ۲: خردادماه ۱۴۰۳        | ۲۵۵ |
| آزمون ۳: مردادماه ۱۴۰۳        | ۲۵۶ |
| آزمون ۴: خردادماه ۱۴۰۴        | ۲۵۷ |
| پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۴ | ۲۵۹ |

برای دسترسی سریع به  
این آیدی QR-Code  
مقابل را اسکن کنید.



برای دریافت آزمون‌های  
فصل به فصل کلمه  
«حسابان» را به این  
آیدی تلگرام  
ارسال کنید.

@gajlive\_bot



مدرسہ  
اینٹرنی  
گاج

گاج لایو



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۷۲ تا ۴۹



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۴۸ تا ۳۶



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۳۵ تا ۱



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۱۳۲ تا ۱۴۶



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۱۱۸ تا ۱۳۱



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۷۳ تا ۱۱۷



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۱۹۱ تا ۱۹۹



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۱۶۶ تا ۱۹۰



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۱۴۷ تا ۱۶۵



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۲۳۲ تا ۲۴۲



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۲۱۹ تا ۲۳۱



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۲۰۰ تا ۲۱۸



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۲۶۹ تا ۲۸۲



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۲۵۷ تا ۲۶۸



جلسه



درس ۱  
سؤالات  
۲۴۳ تا ۲۵۶



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۳۱۲ تا ۳۲۵



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۲۹۶ تا ۳۱۱



جلسه



درس ۲  
سؤالات  
۲۸۳ تا ۲۹۵



جلسه  
۲  
درس ۱  
سؤالات  
۳۴۵ تا ۳۴۲



جلسه  
۱  
درس ۱  
سؤالات  
۳۴۱ تا ۳۳۶



جلسه  
۱۳  
درس ۱  
سؤالات  
۳۸۲ تا ۳۷۱



جلسه  
۳  
درس ۱  
سؤالات  
۳۷۰ تا ۳۴۶



جلسه  
۶  
درس ۱  
سؤالات  
۴۱۶ تا ۳۹۸



جلسه  
۵  
درس ۱  
سؤالات  
۳۹۷ تا ۳۸۳



جلسه  
۸  
درس ۲  
سؤالات  
۴۵۶ تا ۴۳۰



جلسه  
۷  
درس ۲  
سؤالات  
۴۲۹ تا ۴۱۷



جلسه  
۱۰  
درس ۲  
سؤالات  
۴۹۹ تا ۴۸۴



جلسه  
۹  
درس ۲  
سؤالات  
۴۸۳ تا ۴۵۷

# فصل

|                                                                                                                                            |                                                                                                                                            |                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>جلسه<br/>۳<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۵۴۸ تا ۵۳۳</p>    |  <p>جلسه<br/>۲<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۵۳۲ تا ۵۱۷</p>    |  <p>جلسه<br/>۱<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۵۱۶ تا ۵۰۰</p>    |
|  <p>جلسه<br/>۶<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۵۹۴ تا ۵۷۳</p>    |  <p>جلسه<br/>۵<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۵۷۲ تا ۵۶۱</p>    |  <p>جلسه<br/>۴<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۵۶۰ تا ۵۴۹</p>    |
|  <p>جلسه<br/>۹<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۶۵۱ تا ۶۳۵</p>   |  <p>جلسه<br/>۸<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۶۳۴ تا ۶۱۸</p>   |  <p>جلسه<br/>۷<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۶۱۷ تا ۵۹۵</p>   |
|  <p>جلسه<br/>۱۲<br/>درس ۳<br/>سؤالات<br/>۷۰۰ تا ۶۸۵</p> |  <p>جلسه<br/>۱۱<br/>درس ۳<br/>سؤالات<br/>۶۸۴ تا ۶۶۶</p> |  <p>جلسه<br/>۱۰<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۶۶۵ تا ۶۵۲</p> |

|                                                                                                                                           |                                                                                                                                           |                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>جلسه<br/>۳<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۷۵۰ تا ۷۳۵</p> |  <p>جلسه<br/>۲<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۷۳۴ تا ۷۱۸</p> |  <p>جلسه<br/>۱<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۷۱۷ تا ۷۰۱</p> |
|  <p>جلسه<br/>۶<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۷۹۸ تا ۷۷۸</p> |  <p>جلسه<br/>۵<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۷۷۷ تا ۷۶۷</p> |  <p>جلسه<br/>۴<br/>درس ۱<br/>سؤالات<br/>۷۶۶ تا ۷۵۱</p> |
|  <p>جلسه<br/>۹<br/>درس ۳<br/>سؤالات<br/>۸۴۹ تا ۸۳۵</p> |  <p>جلسه<br/>۸<br/>درس ۳<br/>سؤالات<br/>۸۳۴ تا ۸۲۳</p> |  <p>جلسه<br/>۷<br/>درس ۲<br/>سؤالات<br/>۸۲۲ تا ۷۹۹</p> |

# فصل

1

بخش



# درستامه

و سؤالات تشریحی

## فصل اول

# درس اول: تبدیل نمودار توابع

حسابان دوازدهم

## تبدیل نمودار توابع

اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، به کمک تبدیل‌ها می‌توانیم نمودار بسیاری از توابع دیگر که از آن تابع نتیجه می‌شوند را رسم کنیم. در این بخش، انتقال عمودی و افقی، انبساط و انقباض عمودی و افقی و تبدیل‌های دیگری را یادآوری و تکمیل خواهیم کرد.

### ۱. انتقال عمودی (انتقال نمودارها در راستای محور عرض‌ها):

اگر  $k$  را یک عدد مثبت فرض کنیم آن‌گاه:

آ) برای رسم نمودار  $y = f(x) + k$ ، نمودار  $y = f(x)$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

ب) برای رسم نمودار  $y = f(x) - k$ ، تابع  $y = f(x)$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

نتیجه اگر  $A(x_0, y_0)$ ، یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، نقطه متناظر آن روی تابع  $y = f(x) + k$  به صورت  $A'(x_0, y_0 + k)$  می‌شود.

❓ اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت روبه‌رو باشد، نمودارهای  $y = f(x) + 1$  و  $y = f(x) - 1$  را رسم کنید.

✔ برای رسم  $y = f(x) + 1$ ، نمودار  $y = f(x)$  را یک واحد به سمت بالا و برای رسم  $y = f(x) - 1$ ، نمودار  $y = f(x)$  را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

### ۲. انتقال افقی (انتقال نمودارها در راستای محور طول‌ها):

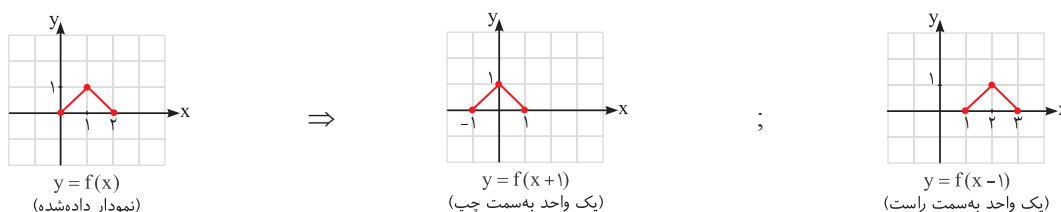
اگر  $k$  را یک عدد مثبت در نظر بگیریم، آن‌گاه:

آ) برای رسم نمودار  $y = f(x + k)$ ، نمودار  $y = f(x)$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

ب) برای رسم نمودار  $y = f(x - k)$ ، نمودار  $y = f(x)$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

نتیجه اگر  $A(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، نقطه متناظر آن روی تابع  $y = f(x + k)$  به صورت  $A'(x_0 - k, y_0)$  می‌شود.

مثال رسم نمودارهای  $y = f(x + 1)$  و  $y = f(x - 1)$  با استفاده از نمودار  $y = f(x)$  به صورت زیر می‌باشد:

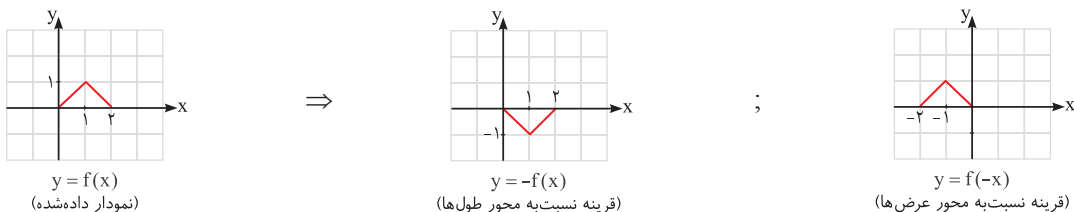


### ۳. انعکاس (قرینه نسبت به محور طول ها و عرض ها):

برای رسم نمودار  $y = -f(x)$ ، قرینه نمودار  $f(x)$  را نسبت به محور طول ها رسم می کنیم.

برای رسم نمودار  $y = f(-x)$ ، قرینه نمودار  $f(x)$  را نسبت به محور عرض ها رسم می کنیم.

**مثال** رسم نمودارهای  $y = -f(x)$  و  $y = f(-x)$  با استفاده از نمودار  $y = f(x)$  به صورت زیر می باشد:



### ۴. انبساط و انقباض عمودی:

برای رسم نمودار  $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $k$  ضرب کنیم. بنابراین:

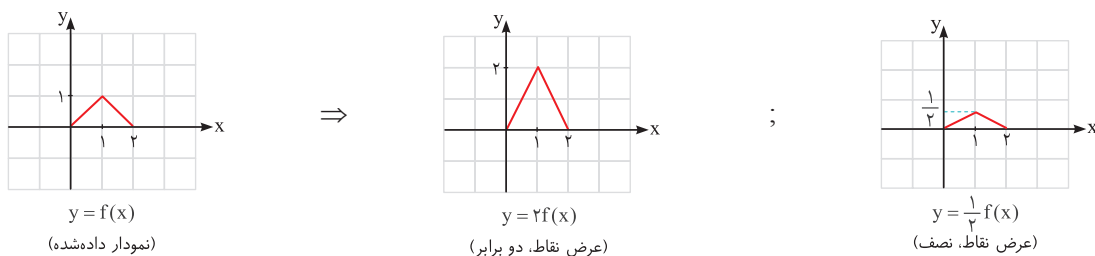
اگر  $k > 1$ ، نمودار  $f$  در امتداد محور عرض ها با ضریب  $k$ ، کشیده می شود. (انبساط عمودی)

اگر  $0 < k < 1$ ، نمودار  $f$  در امتداد محور عرض ها با ضریب  $k$ ، فشرده می شود. (انقباض عمودی)

اگر  $k < 0$ ، ابتدا نمودار  $f$  نسبت به محور طول ها قرینه می شود، سپس با ضریب  $|k|$  به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

**نتیجه** اگر  $A(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، نقطه متناظر آن روی تابع  $y = kf(x)$  به صورت  $A'(x_0, ky_0)$  می شود.

**مثال** رسم نمودارهای  $y = 2f(x)$  و  $y = \frac{1}{2}f(x)$  با استفاده از نمودار  $y = f(x)$  به صورت زیر می باشد:



**نکته** دامنه تابع با ضابطه  $y = kf(x)$ ، همان دامنه تابع  $y = f(x)$  است، اما برد آن ها لزوماً یکسان نیست.

### ۵. انبساط و انقباض افقی:

برای رسم نمودار  $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم. بنابراین:

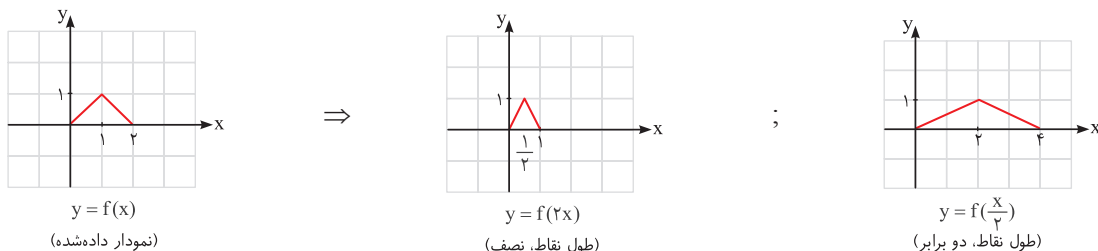
اگر  $k > 1$ ، نمودار  $f$  در امتداد محور طول ها با ضریب  $\frac{1}{k}$  فشرده می شود. (انقباض افقی)

اگر  $0 < k < 1$ ، نمودار  $f$  در امتداد محور طول ها با ضریب  $\frac{1}{k}$  کشیده می شود. (انبساط افقی)

اگر  $k < 0$ ، ابتدا نمودار  $f$  نسبت به محور عرض ها قرینه می شود، سپس با ضریب  $|\frac{1}{k}|$  به طور افقی منبسط یا منقبض می شود.

**نتیجه** اگر  $A(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، نقطه متناظر آن روی تابع  $y = f(kx)$  به صورت  $A'(\frac{x_0}{k}, y_0)$  می شود.

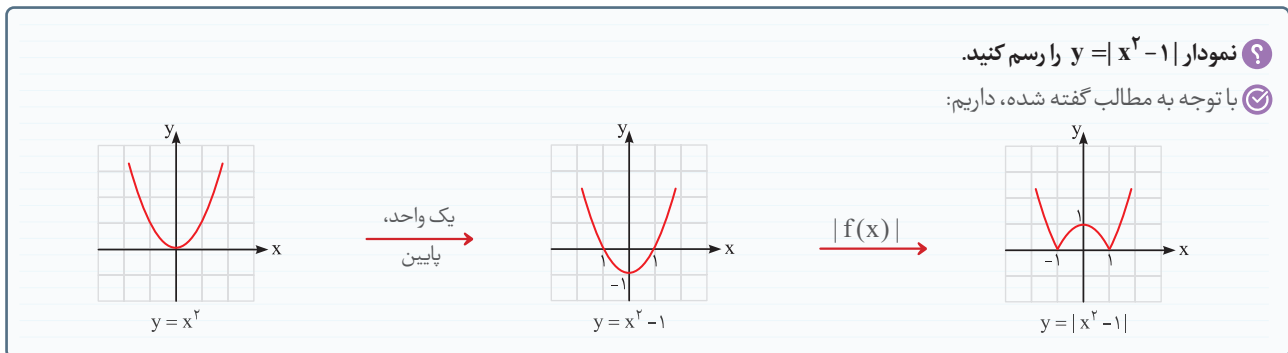
**مثال** رسم نمودارهای  $y = f(2x)$  و  $y = f(\frac{x}{2})$  با استفاده از نمودار  $y = f(x)$  به صورت زیر می باشد:



**نکته** دامنه تابع  $y = f(kx)$  با دامنه تابع  $y = f(x)$  الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع  $y = f(kx)$ ، همان برد تابع  $y = f(x)$  است.

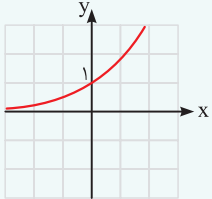
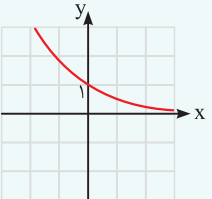
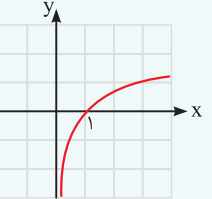
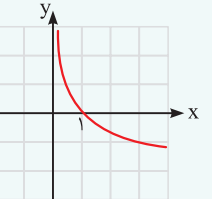
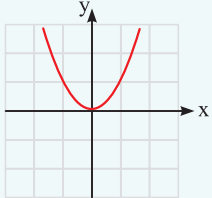
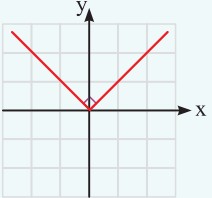
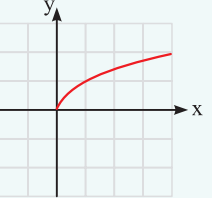
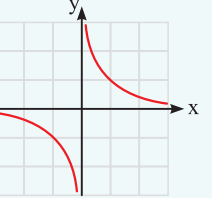
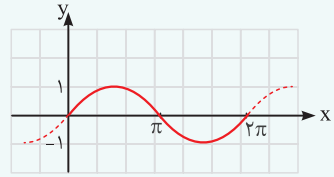
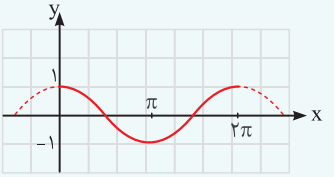
## ۶. رسم نمودار $y = |f(x)|$

ابتدا نمودار  $y = f(x)$  را رسم می‌کنیم، سپس قرینه قسمتی از نمودار این تابع را که زیر محور طول‌ها قرار دارد، نسبت به محور طول‌ها به دست می‌آوریم و بخش پایین محور  $x$ ‌ها را حذف می‌کنیم.



## نمودارهای مهم:

برای رسم بسیاری از نمودارها، از نمودارهای مهم و کاربردی زیر استفاده می‌شود. این نمودارها را که سال گذشته با آن‌ها آشنا شده‌اید، باید همواره به خاطر داشته باشید:

|                                                                                     |                                                                                      |                                                                                      |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|   |    |   |   |
| $y = a^x \quad (a > 1)$                                                             | $y = a^x \quad (0 < a < 1)$                                                          | $y = \log_a x \quad (a > 1)$                                                         | $y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$                                                      |
| $D_y = \mathbb{R}$                                                                  | $D_y = \mathbb{R}$                                                                   | $D_y = (0, +\infty)$                                                                 | $D_y = (0, +\infty)$                                                                  |
| $R_y = (0, +\infty)$                                                                | $R_y = (0, +\infty)$                                                                 | $R_y = \mathbb{R}$                                                                   | $R_y = \mathbb{R}$                                                                    |
|  |   |  |  |
| $y = x^2$                                                                           | $y =  x $                                                                            | $y = \sqrt{x}$                                                                       | $y = \frac{1}{x}$                                                                     |
| $D_y = \mathbb{R}$                                                                  | $D_y = \mathbb{R}$                                                                   | $D_y = [0, +\infty)$                                                                 | $D_y = \mathbb{R} - \{0\}$                                                            |
| $R_y = [0, +\infty]$                                                                | $R_y = [0, +\infty)$                                                                 | $R_y = [0, +\infty)$                                                                 | $R_y = \mathbb{R} - \{0\}$                                                            |
|  |  |                                                                                      |                                                                                       |
| $y = \sin x$                                                                        | $y = \cos x$                                                                         |                                                                                      |                                                                                       |
| $D_y = \mathbb{R}$                                                                  | $D_y = \mathbb{R}$                                                                   |                                                                                      |                                                                                       |
| $R_y = [-1, 1]$                                                                     | $R_y = [-1, 1]$                                                                      |                                                                                      |                                                                                       |

واسه این که نمودار توابع نمایی و لگاریتمی رو کمتر فراموش کنی، به این دو تا مطلب توجه کن:

**۱** دامنه توابع نمایی برابر  $\mathbb{R}$ ، اما دامنه توابع لگاریتمی فقط شامل اعداد حقیقی مثبت است.

**۲** در توابع  $y = a^x$  و  $y = \log_a x$ ، اگر  $a > 1$  باشه، نمودار افزایشی (صعودی) و اگر  $0 < a < 1$  باشه، نمودار کاهشی (نزولی) است.

**؟** به کمک انتقال، نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

ت)  $y = |x - 1|$

پ)  $y = |x| + 1$

ب)  $y = |x - 1|$

الف)  $y = |x + 1|$

ج)  $y = |-x|$

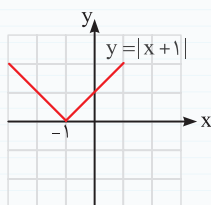
چ)  $y = -|x|$

ج)  $y = \frac{1}{2}|x|$

ث)  $y = 2|x|$

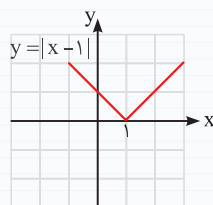
از روی نمودار  $y = |x|$ ، هریک از توابع را رسم می کنیم. (انتقال انجام شده، زیر نمودار، نوشته شده است.)

الف)



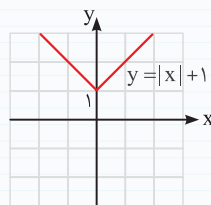
(یک واحد به سمت چپ)

ب)



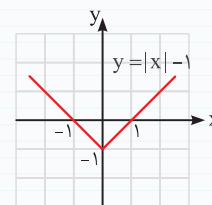
(یک واحد به سمت راست)

پ)



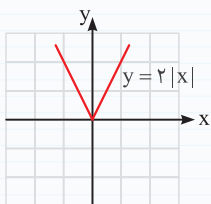
(یک واحد به سمت بالا)

ت)



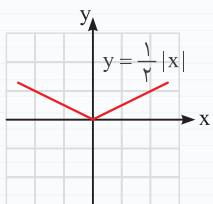
(یک واحد به سمت پایین)

ث)



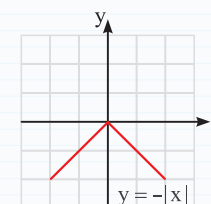
(عرض ها، دو برابر)

ج)



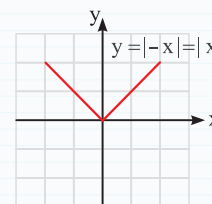
(عرض ها، نصف)

چ)



(قرینه نسبت به محور طول ها)

ح)



(قرینه نسبت به محور عرض ها)

**؟** برای رسم نمودار  $y = 2f(x) - 1$ ، از روی  $y = f(x)$ ، کدام ترتیب درست است؟

الف) ابتدا یک واحد انتقال به سمت پایین، سپس انبساط عمودی با ضریب ۲.

ب) ابتدا انبساط عمودی با ضریب ۲، سپس یک واحد انتقال به سمت پایین.

✓ با اجرای مراحل مربوط به قسمت «الف» داریم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد}} f(x) - 1 \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} 2(f(x) - 1)$$

دقت داشته باشید که وقتی انبساط عمودی با ضریب ۲ داریم، کل عبارت در ۲ ضرب می شود و در نتیجه به  $2f(x) - 2$  می رسیم. بنابراین قسمت «الف» نادرست است.

حال مراحل مربوط به قسمت «ب» را انجام می دهیم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} 2f(x) \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد}} 2f(x) - 1$$

بنابراین قسمت «ب» درست است.

توجه مهم این جا است که اگر بخواهید از ترتیب قسمت «الف» استفاده کنید، باید ابتدا  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت پایین انتقال دهیم تا وقتی انبساط عمودی با

ضریب ۲ را اجرا کردیم، به  $2f(x) - 1$  برسیم. یعنی:

$$f(x) \xrightarrow[\text{پایین}]{\frac{1}{2} \text{ واحد}} f(x) - \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} 2(f(x) - \frac{1}{2}) = 2f(x) - 1$$

البته برای راحتی کار، روش قسمت «ب» را پیشنهاد می کنیم.

❓ برای رسم نمودار  $y = f(2x-1)$ ، از روی  $y = f(x)$ ، کدام ترتیب درست است؟

الف) ابتدا انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، سپس یک واحد انتقال به سمت راست.

ب) ابتدا یک واحد انتقال به سمت راست، سپس انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ .

✔ با اجرای مراحل مربوط به قسمت «الف» داریم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{با ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض افقی}} f(2x) \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{یک واحد}} f(2x-1)$$

دقت داشته باشید که وقتی انتقال به سمت راست داریم،  $x$  به  $x-1$  تبدیل می‌شود و چون در ۲ ضرب می‌شوند، پس به  $f(2x-2)$  می‌رسیم. بنابراین قسمت «الف» نادرست است.

$$f(x) \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{یک واحد}} f(x-1) \xrightarrow[\text{با ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض افقی}} f(2x-1)$$

حال مراحل مربوط به قسمت «ب» را انجام می‌دهیم:

بنابراین ترتیب مراحل قسمت «ب» درست می‌باشد.

توجه مهم این جا است که اگر بخواهید ابتدا انقباض را انجام دهید، برای تبدیل  $f(2x)$  به  $f(2x-1)$ ، باید  $\frac{1}{2}$  واحد، نمودار را به سمت راست انتقال دهیم.

یعنی:

$$f(x) \xrightarrow[\text{با ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض افقی}} f(2x) \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{واحد}} f(2(x-\frac{1}{2})) = f(2x-1)$$

البته برای راحتی کار، روش قسمت «ب» را پیشنهاد می‌کنیم.

نتیجه ۱] برای تبدیل  $f(x)$  به  $f(ax+b)$ ، بهتر است با ترتیب زیر، نمودار را رسم کرد:

$$f(x) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{انتقال افقی}} f(x+b) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{طول نقاط}} f(ax+b)$$

۲] برای تبدیل  $f(x)$  به  $mf(x)+n$ ، بهتر است با ترتیب زیر، نمودار را رسم کرد:

$$f(x) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{عرض نقاط}} mf(x) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{انتقال عمودی}} mf(x)+n$$

در حالت کلی، نکته زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

نکته] برای رسم نمودار تابع  $y = mf(ax+b)+n$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$ ، داریم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{افقی با ضریب } \frac{1}{a}]{\text{انتقال افقی}} f(x+b) \xrightarrow[\text{افقی با ضریب } \frac{1}{a}]{\text{انقباض یا انبساط}} f(ax+b) \xrightarrow[\text{عمودی با ضریب } m]{\text{انقباض یا انبساط}} mf(ax+b) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{انتقال عمودی}} mf(ax+b)+n$$

۴ ۳ ۲ ۱  
↑ ↑ ↑ ↑

$$y = mf(ax+b)+n$$

به عبارت بهتر، ترتیب مراحل، به صورت زیر می‌باشد:

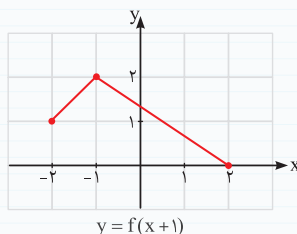
البته باز هم تأکید می‌کنیم که این ترتیب، یک روش پیشنهادی است و با روش‌های دیگری نیز می‌توان به جواب رسید.

(مرداد ۱۴۰۳)

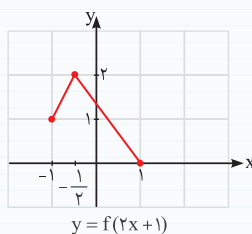
❓ اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $y = f(2x+1)$  را به کمک آن رسم کنید.



✔ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال داده، سپس طول نقاط را نصف می‌کنیم:

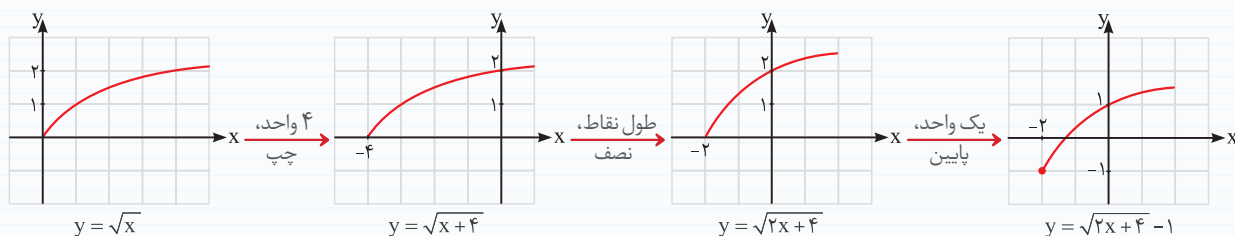


⇒



❓ نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{2x+4} - 1$  را به کمک تبدیل رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

✔ ابتدا نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را رسم کرده، سپس مرحله به مرحله، به صورت زیر، نمودار  $f(x)$  را به دست می آوریم:

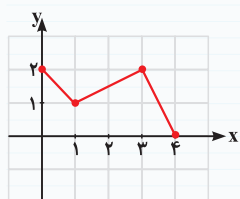


با توجه به نمودار به دست آمده، دامنه و برد  $f(x)$  برابر می شود با:

$$D_f = [-2, +\infty) \quad , \quad R_f = [-1, +\infty)$$

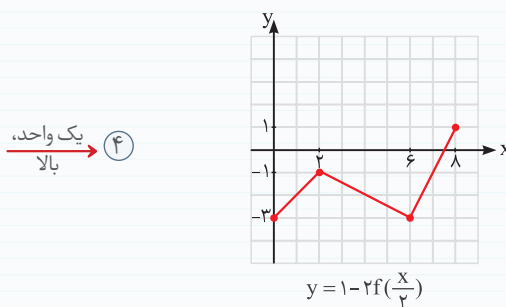
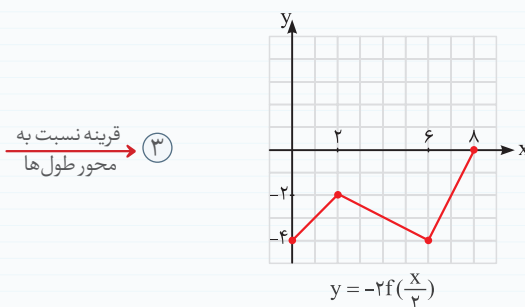
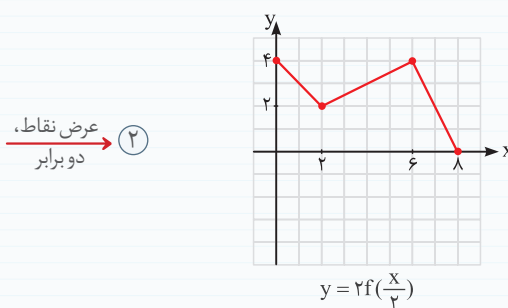
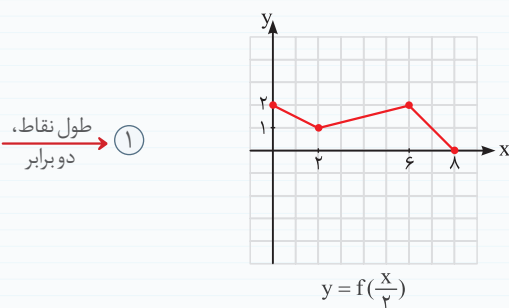
(شبه نهایی ۱۴۰۲)

❓ اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت روبه رو باشد، نمودار تابع  $y = 1 - 2f(\frac{x}{2})$  را رسم کنید.



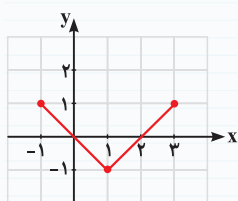
✔ مراحل رسم، به ترتیب زیر می باشد:

$$f(x) \xrightarrow{①} f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{②} 2f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{③} -2f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{④} 1 - 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

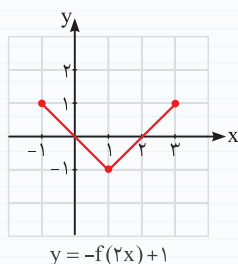


مرحله دوم و سوم رو می تونید هم زمان انجام بدید، یعنی می شه مستقیم عرض نقاط رو در  $-2$  ضرب کرد.

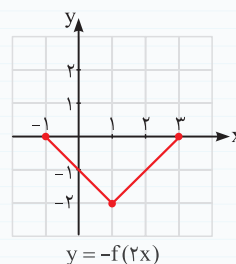
❓ اگر نمودار  $y = -f(2x) + 1$  به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع  $y = f(3x + 2)$  را رسم کنید.



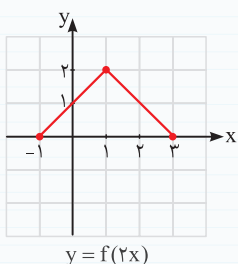
🔗 ابتدا از روی نمودار  $y = -f(2x) + 1$  به صورت زیر، نمودار  $y = f(x)$  را رسم می‌کنیم:



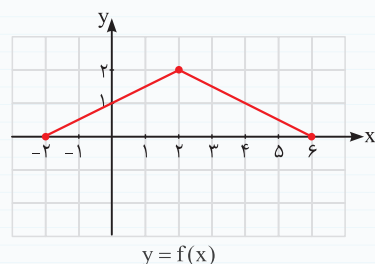
یک واحد،  
پایین



قرینه نسبت به  
محور طول‌ها

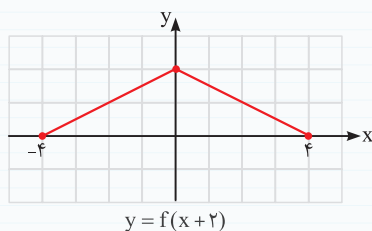


طول نقاط،  
دو برابر

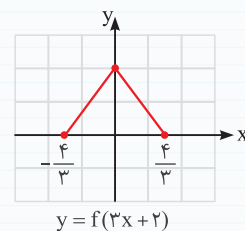


حال با استفاده از نمودار  $f(x)$ ، نمودار تابع  $y = f(3x + 2)$  را رسم می‌کنیم:

دو واحد،  
چپ



طول نقاط،  
تقسیم بر ۳



### ■ تعیین دامنهٔ توابع تبدیل یافته، بدون رسم نمودار:

اگر ضابطه یا نمودار تابعی را داشته باشیم، به راحتی می‌توان از روی آن، دامنه را تعیین کرد. اما اگر خواستیم بدون نمودار، دامنهٔ توابع مربوط به تبدیل را به دست آوریم، می‌توان از نکات زیر استفاده کرد:

**۱** در تابع  $y = cf(ax + b) + d$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  روی دامنه و مقادیر  $c$  و  $d$  روی برد تأثیر دارند.

**۲** اگر  $D_{f(x)} = [m, n]$  باشد، برای محاسبهٔ  $D_{f(ax+b)}$ ، کافی است نامعادلهٔ  $m \leq ax + b \leq n$  را حل کرد. محدودهٔ  $x$  به دست آمده، همان دامنهٔ  $f(ax + b)$  می‌باشد.

**۳** اگر  $D_{f(ax+b)} = [m, n]$  باشد، برای محاسبهٔ  $D_{f(x)}$ ، کافی است از نامساوی  $m \leq x \leq n$ ، محدودهٔ  $ax + b$  را به دست آورید.

برای امتحان نهایی، استفاده از این نکات، مجاز هست.

❓ اگر دامنه تابع  $y = f(x)$  برابر بازه  $[-5, 2]$  باشد، دامنه تابع  $y = 7 - 5f(2x + 3)$  را به دست آورید.

👉 از آن جایی که در تابع  $y = 7 - 5f(2x + 3)$ ، ضریب  $-5$  و عدد  $7$ ، روی دامنه تأثیری ندارند، پس دامنه این تابع، همان دامنه  $y = f(2x + 3)$  می باشد که برای تعیین آن می توان از روش های زیر استفاده کرد:

**روش اول** با استفاده از مفاهیم تبدیل: با توجه به مراحل زیر، دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$D_{f(x)} = [-5, 2] \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۳ واحد}} D_{f(x+3)} = [-8, -1] \xrightarrow[\text{نصف}]{\text{طول نقاط}} D_{f(2x+3)} = [-4, -\frac{1}{2}]$$

**روش دوم** با استفاده از نکته: کافی است نامعادله  $2 \leq 2x + 3 \leq -5$  را حل کنیم:

$$-5 \leq 2x + 3 \leq 2 \xrightarrow{-3} -8 \leq 2x \leq -1 \xrightarrow{\div 2} -4 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_{f(2x+3)} = [-4, -\frac{1}{2}]$$

هر کدام از این روش ها رو در امتحان نهایی بنویسید، نمره کامل می گیرید.

❓ اگر دامنه تابع  $y = f(3x - 1)$  برابر بازه  $[-2, 1]$  باشد، دامنه تابع  $y = f(\frac{x}{3} + 1)$  را به دست آورید.

👉 با استفاده از مفاهیم تبدیل: با توجه به مراحل زیر، از تابع  $f(3x - 1)$  به تابع  $f(\frac{x}{3} + 1)$  می رسمیم:

$$D_{f(3x-1)} = [-2, 1] \xrightarrow[\text{برابر ۳}]{\text{طول نقاط}} D_{f(x-1)} = [-6, 3] \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} D_{f(x)} = [-7, 2]$$

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} D_{f(x+1)} = [-8, 1] \xrightarrow[\text{برابر ۲}]{\text{طول نقاط}} D_{f(\frac{x}{2}+1)} = [-16, 2]$$

توجه داشته باشید که اگر  $f(x - 1)$  را  $2$  واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به طور مستقیم می توان به  $f(x + 1)$  رسید. یعنی:

$$D_{f(x-1)} = [-6, 3] \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۲ واحد}} D_{f(x+1)} = [-8, 1]$$

**روش دوم** با استفاده از نکته: ابتدا به کمک دامنه تابع  $y = f(3x - 1)$ ، دامنه تابع  $y = f(x)$  را تعیین می کنیم:

$$-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow -6 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow -7 \leq 3x - 1 \leq 2 \Rightarrow D_{f(x)} = [-7, 2]$$

$$\text{حال، دامنه } y = f(\frac{x}{3} + 1) \text{ را مشخص می کنیم:}$$

$$-7 \leq \frac{x}{3} + 1 \leq 2 \Rightarrow -8 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \Rightarrow -16 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f(\frac{x}{3}+1)} = [-16, 2]$$

شاید به ظاهر، استفاده از نکته، ساده تر به نظر بیاید، ولی معمولاً دانش آموزها نکات رو با هم قاطی می کنن.

❓ نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را  $3$  واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس  $2$  واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در چه بازه ای

بالای نیمساز ربع اول قرار می گیرد؟

👉 با توجه به مراحل زیر، ضابطه نمودار جدید را به دست می آوریم:

$$y = -x^2 + 2x + 5 \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{۳ واحد}} y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۲ واحد}} y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2$$

تابع جدید را ساده می کنیم:

$$y = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

می دانیم معادله نیمساز ربع اول به صورت  $y = x$ ؛  $x > 0$  می باشد. حال برای این که معلوم کنیم در چه بازه ای نمودار جدید بالای نیمساز ربع اول است، کافی است که نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) < 0$$

| x            | ۳ | ۴ |
|--------------|---|---|
| $(x-3)(x-4)$ | + | - |
|              | + | + |

تعیین علامت  $\Rightarrow 3 < x < 4$

شاید باور نکنید، ولی اکثر دانش‌آموزها نمی‌تونن از سؤال‌های درست یا غلط، نمرة کامل بگیرن، چون توی بعضی از این سؤال‌ها نکات ریزی قرار گرفته، پس باید خیلی حواستو جمع کنی. برای درک بهتر این مطالب، توضیحاتی رو برای بعضی از سؤال‌ها نوشتیم که البته در امتحان نهایی باری ندارن. (مگه این‌که در صورت سؤال، دلیلش رو هم از ما بخوان)

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱. دامنه تابع با ضابطه  $y = kf(x)$ ، همان دامنه تابع  $y = f(x)$  است.
۲. برای رسم نمودار تابع  $f(\frac{x}{p})$  با استفاده از نمودار  $f(x)$  کافی است طول نقاط نمودار  $f(x)$  را نصف کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)
۳. نمودار تابع  $y = (-x+3)^3$  را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار  $y = -x^3$  به سمت راست، رسم کرد. (دی ۱۴۰۱)
۴. اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از انبساط افقی نمودار  $y = f(x)$  در راستای محور  $x$ ها به دست می‌آید. (خرداد ۹۸)
۵. اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود. (دی ۱۴۰۱)
۶. تابع  $y = f(x)$  با دامنه  $\mathbb{R}$  مفروض است. برد تابع‌های  $y = f(3x)$  و  $y = f(5x)$  یکسان است.
۷. نقطه  $(-8, 6)$  روی نمودار  $y = f(x)$ ، با نقطه  $(-8, 12)$  روی نمودار  $y = \frac{1}{p}f(x)$  متناظر است. (دی ۱۴۰۱)
۸. برای رسم نمودار  $y = -f(x) + 1$ ، ابتدا نمودار  $f(x)$  را یک واحد به سمت بالا انتقال داده، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.
۹. برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x+1)$ ، ابتدا نمودار  $y = f(2x)$  را رسم کرده، سپس یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.
۱۰. از انبساط افقی نمودار تابع  $y = \sqrt{x+1}$  با ضریب ۳، نمودار تابع  $y = \sqrt{\frac{x+3}{3}}$  به دست می‌آید.
۱۱. اگر دامنه تابع  $y = f(x)$  برابر  $[1, 3]$  باشد، دامنه تابع  $y = f(2x-1)$  عبارت است از  $[1, 2]$ . (شبه‌نهایی ۱۴۰۲)
۱۲. اگر بازه  $[-2, 1]$  دامنه تابع  $f(3x+1)$  باشد، دامنه تابع  $f(x)$  برابر  $[-5, 4]$  است. (دی ۹۹)
۱۳. تابع  $y = \frac{1}{p}\sin(\frac{x}{p})$  از انبساط افقی و انقباض عمودی تابع  $y = \sin x$  به دست می‌آید.
۱۴. اگر برد تابع  $y = f(x)$  بازه  $[-2, 3]$  باشد، برد تابع  $y = kf(x+b)$  به صورت بازه  $[-2k, 3k]$  می‌شود. ( $k \neq 0$ )
۱۵. نمودار تابع  $y = -\log(-x)$  از نواحی اول و چهارم دستگاه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.
۱۶. نمودار  $y = \cos(x+2)$  همواره بالای محور طول‌ها قرار می‌گیرد.

اگه تعاریف و توضیحات درسنامه رو خوب خونده باشی، بیش‌تر سؤالاتی این قسمت رو می‌تونن به راحتی جواب بدی. بعضی وقتا جای خالی رو خودت باید فکر کنی و عبارت مناسب رو قرار بدی، اما بعضی وقتا چند عبارت می‌دن و تو باید بین اون‌ها، عبارت درست رو انتخاب کنی.

● جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

۱۷. نمودار تابع  $y = f(-x)$ ، قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور ..... است. (عرض‌ها - طول‌ها) (دی ۹۹)
۱۸. اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از ..... نمودار  $y = f(x)$  در راستای محور  $x$ ها به دست می‌آید. (شهریور ۱۴۰۰)
۱۹. اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از ..... نمودار  $y = f(x)$  در راستای محور  $x$ ها به دست می‌آید. (انبض افقی - انبساط افقی) (دی ۹۹)
۲۰. نقطه  $(-2, 4)$  روی نمودار تابع  $y = f(x)$  می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $y = -f(2x)$  برابر ..... است.
۲۱. نقطه  $(2, -1)$  در تابع  $y = -f(2x+1) - 1$ ، متناظر با نقطه ..... در تابع  $f(x)$  است. (خرداد ۹۹)
۲۲. اگر دامنه تابع  $y = f(x)$  بازه  $[-1, 2]$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = -f(2x) + 1$  ..... است. (دی ۱۴۰۱)
۲۳. اگر بازه  $[-4, 2]$  دامنه تابع  $f(2x+1)$  باشد، دامنه تابع  $f(x)$  برابر ..... است. (دی ۹۸)
۲۴. اگر برد تابع  $y = \sqrt{x}$  بازه  $[0, 2]$  باشد، برد تابع  $y = 2 + \sqrt{x-2}$  برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۲)
۲۵. اگر برد تابع  $f(x)$  بازه  $[-3, 1]$  باشد، برد تابع  $y = -2f(3x-1) + 3$  بازه ..... می‌شود.
۲۶. تابع ..... از انقباض افقی و انبساط عمودی تابع  $y = 2 \log \frac{x}{p}$  به دست می‌آید. ( $y = \log \frac{x}{p}$  یا  $y = 4 \log x$ )

(شبه‌نهایی ۱۴۰۲)

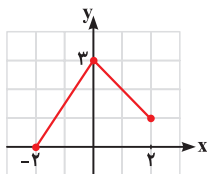
۲۷. اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار  $y = f\left(\frac{1}{k}x\right)$  از ..... (انبساط - انقباض) افقی نمودار تابع  $y = f(x)$  حاصل می‌شود.

۲۸. اگر دامنه تابع  $y = f(x)$  بازه  $[-4, 1]$  باشد، با شرط  $a < 0$ ، دامنه تابع  $y = f(ax) + b$  برابر بازه ..... می‌شود.

● پرسش‌های تشریحی

(خرداد ۱۴۰۱)

۲۹. نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع  $g(x) = f(x-1)$  را رسم کرده و دامنه تابع  $g$  را تعیین کنید.



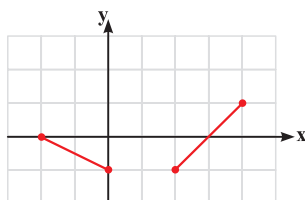
۳۰. نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در بازه  $[0, 4]$  رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۱)

ب) به کمک نمودار  $f(x)$ ، نمودار تابع  $g(x) = 2f(x-1)$  را رسم کنید، سپس دامنه و برد  $g$  را تعیین کنید.

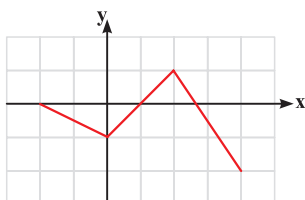
(دی ۱۴۰۱ خارج)

۳۱. اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، نمودار  $y = -2f(x+1)$  را رسم کنید.



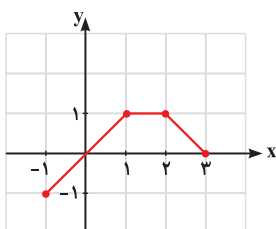
۳۲. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. نمودار تابع  $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$  را رسم کرده و سپس برد تابع  $g(x)$  را تعیین کنید.

(دی ۱۴۰۲)



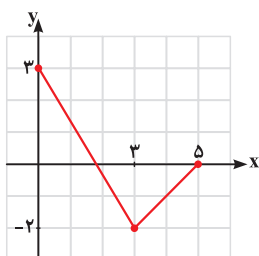
۳۳. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. نمودار تابع  $g(x) = f(2x-1)$  را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.

(دی ۹۹)



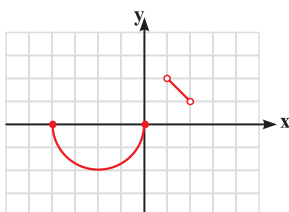
۳۴. نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع  $g(x) = f(3-x)$  را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.

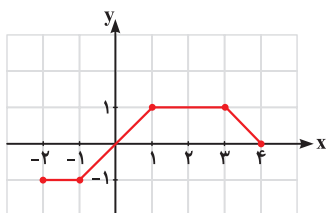
(شهریور ۹۸)



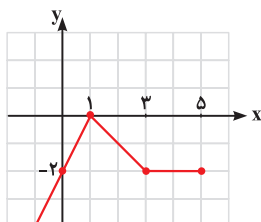
۳۵. نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f(1-x) + 1$  را رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)





۳۶. با توجه به نمودار تابع  $f(x)$  که در شکل زیر آمده است. ابتدا نمودار تابع  $g(x) = 2f(2x+1) - 1$  را رسم کنید. سپس دامنه تابع  $g(x)$  را بیابید. (خرداد ۱۴۰۰ خارج)



۳۷. نمودار تابع  $f(x)$  در زیر رسم شده است. نمودار تابع  $y = -f(2x-1)$  را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۳)

۳۸. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (شبه‌نهایی ۱۴۰۰)

۳۹. نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$  را نسبت به محور  $y$ ها قرینه کرده، سپس منحنی حاصل را ۲ واحد به سمت  $x$ های مثبت و ۱ واحد به سمت  $y$ های منفی انتقال می‌دهیم و در انتها با ضریب ۲ در راستای محور  $y$ ها منبسط می‌کنیم. ضابطه نمودار جدید را بنویسید.

۴۰. ابتدا قرینه نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2$  را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی را به دست آورید.

۴۱. اگر نقطه‌ای به طول ۱ روی منحنی  $y = x^3 + 1$  باشد، تبدیل یافته آن روی  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ ، چه نقطه‌ای است؟ (شبه‌نهایی ۱۴۰۲)

۴۲. نمودار تابع  $y = |x-1| - 1$  را با استفاده از نمودار  $y = |x|$  رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۴۳. با استفاده از نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  و تبدیل، نمودار توابع زیر را رسم کنیم.

۱  $y = \sqrt{x-2} - 1$       ب  $y = \sqrt{2x+4}$       پ  $y = 2\sqrt{1-x}$

۴۴. نمودار تابع  $y = 1 - 2^x$  را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

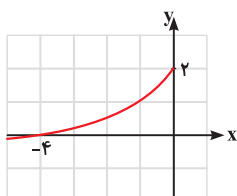
۴۵. نمودار تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$  را به کمک نمودار  $y = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

۴۶. نمودار تابع  $y = \cos 2x - 1$  زیر را به کمک نمودار تابع  $y = \cos x$  رسم کنید. (شهریور ۹۹)

۴۷. با استفاده از نمودار  $y = \cos x$ ، نمودار تابع  $y = -2 \cos(-\frac{1}{4}x)$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید.

۴۸. با استفاده از نمودار  $y = \sin x$ ، نمودار تابع  $y = 1 - \sin(-2x)$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید.

۴۹. نمودار تابع مقابل، فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید. (شبه‌نهایی ۱۴۰۲)



۵۰. با استفاده از نمودار تابع  $y = \log_a x$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید:

۱  $f(x) = |\log(x+1)|$       ب  $g(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1)$

۵۱. اگر دامنه تابع  $y = f(x)$ ، بازه  $[-3, 3]$  باشد، دامنه تابع  $y = 2f(-3x+1)$  را تعیین کنید.

۵۲. اگر دامنه تابع  $g$  بازه  $[-2, 4]$  باشد، آنگاه دامنه تابع  $k(x) = 3g(-2x)$  را به دست آورید.

۵۳. اگر دامنه تابع  $y = f(\frac{x}{3} - 3)$ ، بازه  $[-6, 2]$  باشد، دامنه تابع  $y = f(x)$  را بیابید.

۵۴. اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$ ، به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد  $y = kf(x)$  را تعیین کنید. ( $k \neq 0$ )

۵۵. اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$ ، به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد  $y = f(kx)$  را تعیین کنید. ( $k \neq 0$ )

(مرداد ۱۴۰۳)

۵۶. اگر دامنه تابع  $y = 5f(\frac{x+1}{4})$  بازه  $[-3, 7]$  باشد، دامنه تابع  $y = 4f(3-x) + 7$  را بیابید.

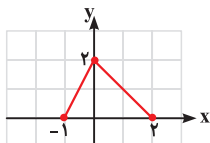
۵۷. نقطه  $A(-3, 2)$  روی نمودار تابع  $y = f(x)$  می باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $y = -2f(-3x+1)$  را به دست آورید.

۵۸. نقطه  $A(2, -1)$  روی نمودار تابع  $y = \frac{1+f(5x-1)}{4}$  می باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $y = f(x)$  را به دست آورید.

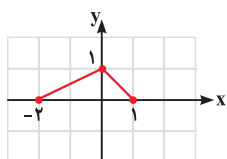
۵۹. نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار تابع  $y = f(x)$  است. نقطه متناظر آن روی نمودار  $y = \frac{1}{4}f(\frac{3x-2}{4}) + 1$  را مشخص کنید.

۶۰. نقطه  $A(-2, -2)$  روی نمودار تابع  $y = f(\frac{x-2}{4}) - 1$  می باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $y = -f(2x-1)$  را به دست آورید.

۶۱. اگر نمودار  $y = f(x-1)$  به صورت روبه رو باشد، نمودار تابع  $y = -f(\frac{1-x}{4})$  را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



۶۲. اگر نمودار  $y = f(-x+2)$  به صورت روبه رو باشد، نمودار تابع  $y = f(2x+1)$  را رسم کنید.



۶۳. نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} 5^x - 1 & x < 0 \\ -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$  را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۶۴. نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را رسم کرده، سپس به کمک آن، نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  را رسم کنید.

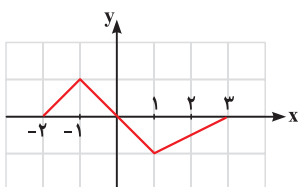
۶۵. **آ** با استفاده از نمودار  $y = |x|$ ، نمودار تابع  $f(x) = ||x-1| - 1|$  را رسم کنید.

**ب** سطح محصور بین نمودار تابع  $f(x)$  و محور طول ها را به دست آورید.

(شبه نهایی ۱۴۰۲)

۶۶. با کمک رسم نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$  را رسم کنید.

۶۷. اگر نمودار  $y = f(x-1)$  به صورت روبه رو باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{(x-1)f(\frac{x}{4})}$  را تعیین کنید.



۶۸. نمودار تابع  $f(x) = 2 \sin |x|$  را در بازه  $(-\pi, 2\pi)$  رسم کنید.

۶۹. نمودار  $y = \sqrt{x}$  را رسم کنید، سپس به کمک تبدیل، نمودار توابع زیر را به دست آورید.

**آ**  $y = \sqrt{|x+1|}$

**ب**  $y = \sqrt{|x|+1}$

۷۰. **آ** با استفاده از نمودار  $y = (\frac{1}{4})^x$ ، نمودار تابع  $y = |(\frac{1}{4})^x| - 1$  را رسم کنید.

**ب** دامنه و برد تابع جدید را به دست آورید.

۷۱. نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax-3}{x+b}$  را نسبت به محور عرض ها قرینه کرده، سپس ۲ واحد به سمت راست انتقال می دهیم و در انتها، نسبت به محور طول ها

قرینه می کنیم. اگر نمودار تابع به دست آمده، بر نمودار  $f(x)$  منطبق شود، مقدار  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

۷۲. به روش هندسی، معادله  $\sin \pi x - \log_4 x = 0$  را حل کنید.

۲

بخش



پاسخ نامه

فصل ۱  
تابع

۱ درست

**توضیح:** در تابع  $y = kf(x)$ ، عدد  $k$  فقط روی عرض نقاط  $f(x)$  تأثیر می‌گذارد، بنابراین طول نقاط و در نتیجه دامنه تابع تغییری نمی‌کند.

۲ نادرست

**توضیح:** اگر طول نقاط نمودار  $f(x)$  را نصف کنیم، به تابع  $f(2x)$  می‌رسیم نه  $f(\frac{x}{2})$ .

۳ درست

**توضیح:** در تابع  $y = -x^3$ ، باید به جای  $x$ ،  $x - 3$  قرار دهیم:  
 $-x^3 \xrightarrow{\text{واحد به راست } 3} -(x-3)^3 = (-x+3)^3$

۴ نادرست

**توضیح:** اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از انقباض افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود. برای مثال؛ اگر طول نقاط نمودار  $y = f(x)$  را نصف کنیم، نمودار  $y = f(2x)$  به دست می‌آید.

۵ نادرست

**توضیح:** اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  به دست می‌آید. برای مثال؛ اگر عرض نقاط نمودار  $y = f(x)$  را دو برابر کنیم، نمودار  $y = 2f(x)$  حاصل می‌شود.

۶ درست

**توضیح:** در تابع‌های  $y = f(3x)$  و  $y = f(5x)$ ، ضریب  $x$  تأثیری روی برد تابع ایجاد نمی‌کند، پس برد این دو تابع یکسان است.

۷ نادرست

**توضیح:** اگر بخواهیم از نمودار  $f(x)$  به نمودار  $\frac{1}{4}f(x)$  برسیم، عرض تمام نقاط آن نصف می‌شود. پس نظیر نقطه  $(-8, 6)$ ، نقطه  $(-8, 3)$  است.

۸ نادرست

**توضیح:**  $f(x) + 1 \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} -(f(x) + 1)$   
در این حالت به  $1 - f(x)$  می‌رسیم که نادرست است. روش درست به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} -f(x) \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{یک واحد}} -f(x) + 1$$

۹ نادرست

**توضیح:** وقتی نمودار  $f(2x)$  را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، باید به جای  $x$ ،  $x+1$  قرار دهیم. بنابراین به  $f(2x+2) = f(2(x+1))$  می‌رسیم. روش درست این است که بعد از رسم نمودار  $f(2x)$ ،  $\frac{1}{4}$  واحد به سمت چپ انتقال دهیم و یا این‌که نمودار  $f(x)$  را ابتدا یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم و سپس طول نقاط را نصف کنیم.

۱۰

درست

**توضیح:** در تابع  $y = \sqrt{x+1}$ ، اگر طول نقاط را ۳ برابر کنیم، در ضابطه تابع، باید به جای  $x$ ،  $\frac{x}{3}$  قرار دهیم:

$$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{3}+1} = \sqrt{\frac{x+3}{3}}$$

۱۱

درست

**توضیح:** روش اول با استفاده از مفاهیم تبدیل:

$$D_{f(x)} = [1, 3] \xrightarrow[\text{راست}]{\text{یک واحد به}} D_{f(x-1)} = [2, 4]$$

$$\xrightarrow[\text{نصف}]{\text{طول نقاط}} D_{f(2x-1)} = [1, 2]$$

**نکته** اگر  $D_{f(x)} = [m, n]$  باشد، برای محاسبه دامنه  $f(ax+b)$  کافی است نامعادله  $m \leq ax+b \leq n$  را حل کرد.

**روش دوم** با استفاده از نکته: نامعادله  $1 \leq 2x-1 \leq 3$  را حل می‌کنیم:

$$1 \leq 2x-1 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f(2x-1)} = [1, 2]$$

۱۲

درست

**توضیح:** روش اول با استفاده از مفاهیم تبدیل:

$$D_{f(3x+1)} = [-2, 1] \xrightarrow[\text{برابر } 3]{\text{طول نقاط}} D_{f(x+1)} = [-6, 3]$$

$$\xrightarrow[\text{راست}]{\text{یک واحد}} D_{f(x)} = [-5, 4]$$

**نکته** اگر  $D_{f(ax+b)} = [m, n]$  باشد، برای محاسبه دامنه  $f(x)$  کافی است از نامساوی  $m \leq x \leq n$ ، محدوده  $ax+b$  را به دست آوریم.

**روش دوم** با استفاده از نکته:

$$-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow -6 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3x+1 \leq 4$$

$$\Rightarrow D_{f(x)} = [-5, 4]$$

۱۳

درست

**توضیح:** برای این‌که از نمودار  $y = \sin x$ ، به نمودار  $y = \frac{1}{4} \sin(\frac{x}{4})$  برسیم، داریم:

$$\sin x \xrightarrow[\text{انبساط افقی}]{\text{طول نقاط، ۲ برابر}} \sin(\frac{x}{2}) \xrightarrow[\text{انقباض عمودی}]{\text{عرض نقاط، نصف}} \frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2})$$

۱۴

نادرست

**توضیح:** چون علامت  $k$  را مشخص نکرده، پس عبارت داده شده نادرست است. بنابراین اگر  $k > 0$ ، برد تابع بازه  $[-2k, 3k]$  و اگر  $k < 0$  باشد، برد تابع به صورت بازه  $[3k, -2k]$  حاصل می‌شود.

حال تبدیل یافته نقطه  $A \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  را می‌یابیم:

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{عرض}]{\text{طول نقاط, نصف}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به } -1} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

۲۱

(۵, ۰)

**توضیح:** برای تبدیل  $1 - f(2x+1)$  به  $f(x)$  به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

$$f(2x+1) \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به } -1} -f(2x+1) \xrightarrow[\text{بالاتا}]{\text{یک واحد}} -f(2x+1) - 1$$

$$f(x) \xrightarrow[\text{راست}]{\text{یک واحد}} f(x+1) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{طول نقاط, ۲ برابر}} f(2x+1)$$

حال تبدیل یافته نقطه  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  را می‌یابیم:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{بالاتا}]{\text{یک واحد}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به } 0} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{طول نقاط, ۲ برابر}} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{یک واحد}} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

۲۲

$[-\frac{1}{4}, 1]$

**توضیح:** روش اول با استفاده از مفاهیم تبدیل: دامنه تابع  $f(x)$  به صورت بازه  $[-1, 2]$  است، حال اگر طول نقاط را نصف کنیم به تابع  $f(2x)$  می‌رسیم و در نتیجه دامنه تابع، بازه  $[-\frac{1}{4}, 1]$  می‌شود. توجه داشته باشید که  $-f(2x)$ ، قرینه نمودار حاصل نسبت به محور طول‌ها و  $1 - f(2x)$  انتقال نمودار  $-f(2x)$  به سمت بالا می‌باشد که هیچ‌یک تأثیری روی دامنه ندارند.

**روش دوم:** با استفاده از نکته: کافی است نامعادله  $2 \leq 2x \leq 1$  را حل کنیم:

$$-1 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{f(2x)} = [-\frac{1}{4}, 1]$$

دامنه تابع  $1 - f(2x)$ ، همان دامنه تابع  $f(2x)$  یعنی بازه  $[-\frac{1}{4}, 1]$  است.

۲۳

$[-7, 5]$

**توضیح:** روش اول با استفاده از مفاهیم تبدیل: با توجه به مراحل زیر، دامنه  $f(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$D_{f(2x+1)} = [-4, 2] \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{طول نقاط, ۲ برابر}} D_{f(x+1)} = [-8, 4]$$

$$D_{f(x)} = [-7, 5] \xrightarrow[\text{راست}]{\text{یک واحد}}$$

**روش دوم:** با استفاده از نکته: از نامساوی  $2 \leq x \leq -4$ ، محدوده  $2x+1$  را به دست می‌آوریم:

$$-4 \leq x \leq 2 \Rightarrow -8 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -7 \leq 2x+1 \leq 5$$

بنابراین دامنه  $f(x)$ ، بازه  $[-7, 5]$  می‌شود.

۲۴

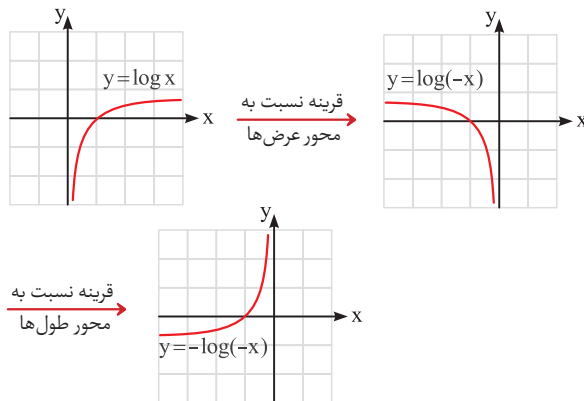
$[2, 4]$

**توضیح:** اگر نمودار  $\sqrt{x}$  را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم به تابع  $\sqrt{x-2}$  می‌رسیم که روی برد تابع تأثیری نمی‌گذارد. حال نمودار را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = 2 + \sqrt{x-2}$  به دست آید. چون عرض نقاط ۲ واحد زیاد شده، پس برد تابع بازه  $[2, 4]$  می‌شود.

۱۵

درست

**توضیح:** نمودار تابع  $y = -\log(-x)$  را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

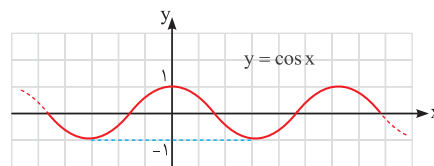


همان طور که ملاحظه می‌کنید، این نمودار از نواحی اول و چهارم عبور نمی‌کند.

۱۶

نادرست

**توضیح:** نمودار  $y = \cos x$  به صورت زیر است:



برای رسیدن به  $y = \cos(x+2)$ ، باید نمودار  $\cos x$  را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم. بنابراین قسمتی از نمودار حاصل، بالا و قسمتی از آن، پایین محور طول‌ها قرار می‌گیرد.

**توجه:** نمودار  $y = (\cos x) + 2$  همواره بالای محور طول‌ها قرار دارد.

۱۷

عرض‌ها

**توضیح:** در تابع  $y = f(x)$ ، از تبدیل  $x$  به  $-x$ ، طول نقاط قرینه می‌شود، بنابراین  $f(-x)$ ، قرینه نمودار  $y = f(x)$  نسبت به محور  $y$  است.

۱۸

انقباض افقی (انقباض)

**توضیح:** برای مثال؛ اگر طول نقاط  $f(x)$  را نصف کنیم به تابع  $f(2x)$  می‌رسیم که انقباض افقی در راستای محور طول‌ها می‌باشد.

۱۹

انبساط افقی

**توضیح:** برای مثال؛ اگر طول نقاط  $f(x)$  را ۲ برابر کنیم به تابع  $f(\frac{1}{2}x)$  می‌رسیم که انبساط افقی در راستای محور طول‌ها می‌باشد.

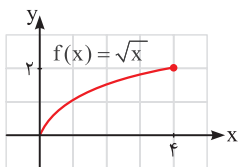
۲۰

$(-1, -4)$

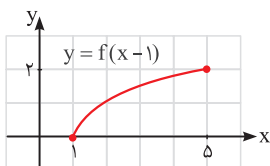
**توضیح:** برای تبدیل  $f(x)$  به  $-f(2x)$  به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{نصف}]{\text{طول نقاط, ۲ برابر}} f(2x) \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به } -1} -f(2x)$$

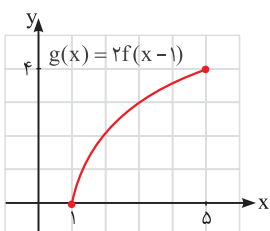
۳۰



آ) نمودار  $f(x) = \sqrt{x}$  در بازه  $[0, 4]$  به صورت مقابل می باشد:



ب) ابتدا نمودار  $f$  را یک واحد به سمت راست انتقال می دهیم:

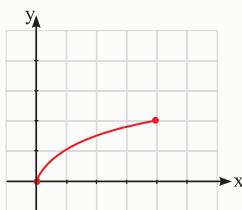


حال عرض نقاط را دو برابر کرده (انبساط عمودی با ضریب ۲) تا به نمودار  $g(x) = 2f(x-1)$  برسیم:

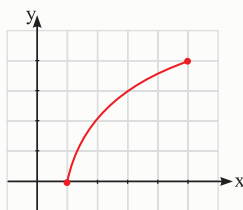
$$\Rightarrow D_g = [1, 5], R_g = [0, 4]$$

(بارم کل: ۱ نمره)

کلیدنهایی



(آ)



(ب)

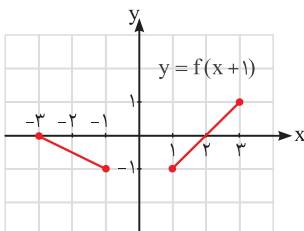
هر قسمت (۵/۵) ،  $D_g = [1, 5]$  ،  $R_g = [0, 4]$

۳۱

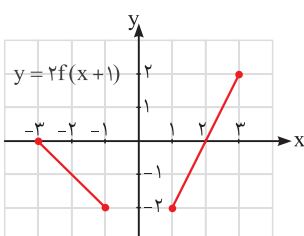
مراحل رسم را به ترتیب زیر انجام می دهیم:

$$f(x) \Rightarrow f(x+1) \Rightarrow 2f(x+1) \Rightarrow -2f(x+1)$$

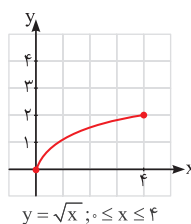
بنابراین ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم:



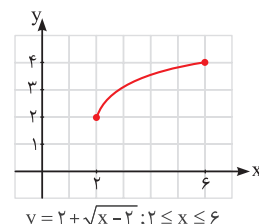
حالا عرض نقاط را دو برابر می کنیم (انبساط عمودی با ضریب ۲):



برای درک بهتر، به نمودار آن توجه کنید.



۲ واحد به راست  
و ۲ واحد به بالا



۲۵

$[1, 9]$

توضیح: می دانیم در تابع  $y = mf(ax+b) + n$  ، ضرایب  $a$  و  $b$  روی برد تابع تأثیری ندارند. بنابراین:

$$\begin{aligned} -3 < f(x) \leq 1 &\Rightarrow -3 < f(3x-1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2 \leq -2f(3x-1) < 6 \\ &\xrightarrow{+3} 1 \leq -2f(3x-1) + 3 < 9 \end{aligned}$$

در نتیجه برد تابع، بازه  $[1, 9]$  می شود.

۲۶

$$y = 4 \log x$$

توضیح: اگر نمودار تابع  $y = 2 \log \frac{x}{2}$  ، انقباض افقی و انبساط عمودی داشته باشد، آن گاه:

$$2 \log \frac{x}{2} \xrightarrow[\text{(انقباض افقی)}]{\text{طول نقاط، نصف}} 2 \log x \xrightarrow[\text{(انبساط عمودی)}]{\text{عرض نقاط، ۲ برابر}} 4 \log x$$

۲۷

انقباض

توضیح: اگر  $0 < k < 1$  ، آن گاه  $\frac{1}{k} > 1$  و در نتیجه نمودار  $f(\frac{1}{k}x)$  از

انقباض افقی نمودار  $f(x)$  حاصل می شود. برای مثال؛ با فرض  $k = \frac{1}{2}$  ،  $f(\frac{1}{k}x) = f(2x)$  می شود که برای رسیدن به آن کافی است طول نقاط

$y = f(x)$  را نصف می کنیم.

۲۸

$$\left[\frac{1}{a}, \frac{-4}{a}\right]$$

توضیح: عدد  $b$  تأثیری روی دامنه ندارد، اما ضریب  $a$  باعث می شود طول تمام نقاط آن بر  $a$  تقسیم شود.

$$D_{f(x)} = [-4, 1] \xrightarrow{a < 0} D_{f(ax)} = \left[\frac{1}{a}, \frac{-4}{a}\right]$$

توجه داشته باشید، چون  $a < 0$  است، نسبت به محور عرض ها قرینه می شود.

تذکره با حل نامعادله  $-4 \leq ax \leq 1$  نیز می توان دامنه را تعیین کرد:

$$-4 \leq ax \leq 1 \xrightarrow[\text{(a < 0)}]{\text{تقسیم بر a}} \frac{1}{a} \leq x \leq \frac{-4}{a}$$

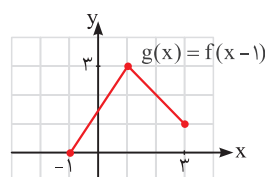
۲۹

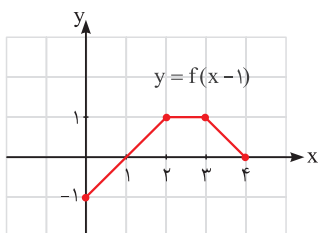
کافی است نمودار  $f$  را یک واحد به

سمت راست انتقال دهیم:

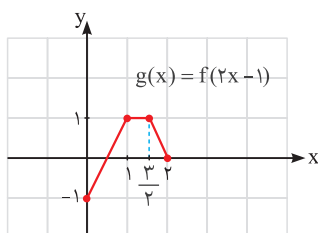
بنابراین دامنه تابع به صورت

$D_g = [-1, 3]$  می شود.

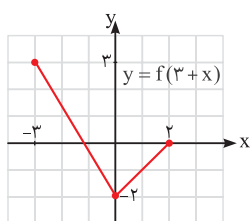




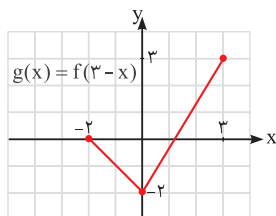
در نتیجه در این سؤال، ابتدا نمودار  $f(x)$  را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا  $f(x-1)$  حاصل شود:



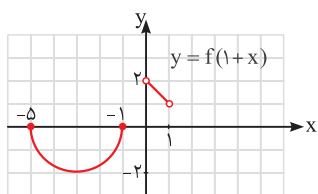
حال طول نقاط را نصف می‌کنیم (انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ) تا نمودار  $g(x) = f(2x-1)$  به دست آید:  
 $\Rightarrow D_g = [0, 2], R_g = [-1, 1]$



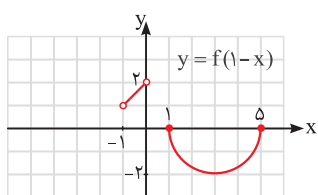
ابتدا نمودار  $f(x)$  را ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار  $y = f(3+x)$  حاصل شود.



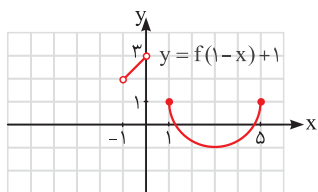
با قرینه کردن نمودار بالا نسبت به محور عرض‌ها، نمودار  $g(x) = f(3-x)$  به دست می‌آید.  
 با توجه به نمودار، دامنه تابع بازه  $[-2, 3]$  می‌شود.



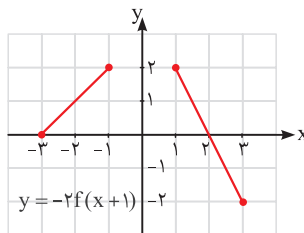
ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم:



نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم:



در انتها یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



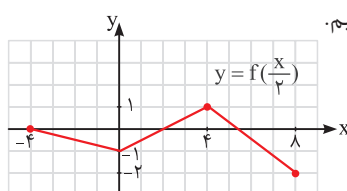
در انتها، نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -2f(x+1)$  به دست آید:

معمولاً، بچه‌ها مرحله دوم و سوم رو با هم انجام می‌دن. شما هم می‌تونید بعد از رسم  $f(x+1)$ ، عرض نقاط رو در  $-2$  ضرب کنید تا مستقیم به  $-2f(x+1)$  برسید.

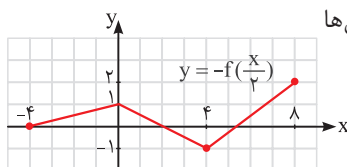
۳۲

مراحل رسم به ترتیب زیر می‌باشد:

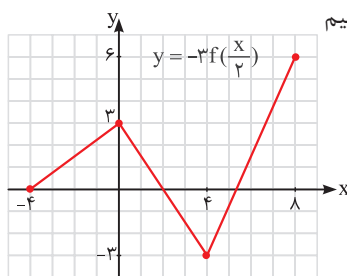
$$f(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow -f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow -2f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow -2f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$



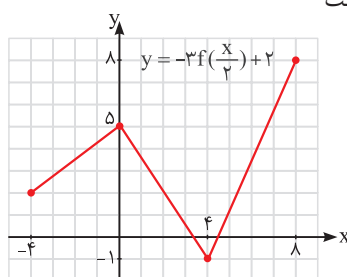
ابتدا طول نقاط را ۲ برابر می‌کنیم (انبساط افقی با ضریب ۲):



نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم:



عرض نقاط را ۳ برابر می‌کنیم (انبساط عمودی با ضریب ۳):



در انتها، نمودار را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

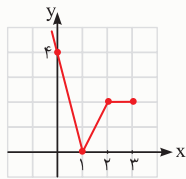
۳۳

طبق مطالب درسنامه، برای تبدیل  $f(x)$  به  $f(ax+b)$ ، بهتر است به صورت زیر اقدام کنیم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{برابر } \frac{1}{a}]{\text{انتقال افقی}} f(x+b) \xrightarrow{\text{طول نقاط}} f\left(\frac{x+b}{a}\right)$$

(بارم کل: ۱/۲۵ نمره)

کلیدنهایی



دامنه:  $(-\infty, 3]$  (۰/۲۵)

برد:  $[0, +\infty)$  (۰/۲۵)

رسم نمودار: (۰/۷۵)

توضیحات جهت تصحیح: در رسم نمودار، هر قسمت که درست رسم شده است، (۰/۲۵) نمره تعلق می‌گیرد. در صورتی که دانش‌آموزی نمودار را اشتباه رسم کرده، اما مطابق آن نمودار اشتباه، دامنه یا برد را درست نوشته است، نمره دامنه یا برد منظور می‌شود.

۳۸

ابتدا دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:

$$x^2 - 2x + 1 - 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1$$

حال، یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، بنابراین به جای  $x + 1$ ، قرار می‌دهیم:

$$(x+1)^2 - 2(x+1) - 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 - 1 \Rightarrow x^2 - 2$$

و در انتها نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم:

$$-(x^2 - 2) \Rightarrow -x^2 + 2$$

پس به تابع  $y = -x^2 + 2$  می‌رسیم.

۳۹

تبدیل را در هر مرحله انجام داده و ضابطه جدید را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{x+1} \xrightarrow[\text{محور } y\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} \sqrt{-x+1} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۲ واحد}} \sqrt{-(x-2)+1}$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد}} \sqrt{-(x-2)+1} - 1 \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{عرض نقاط،}} 2(\sqrt{-(x-2)+1} - 1)$$

تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y = 2(\sqrt{-(x-2)+1} - 1) = 2\sqrt{-x+2+1} - 2$$

$$\Rightarrow y = 2\sqrt{-x+3} - 2$$

۴۰

**نکته** قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به مبدأ مختصات،  $y = -f(-x)$  می‌باشد. یعنی باید نمودار را هم نسبت به محور طول‌ها و هم نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرد.

مراحل تعیین ضابطه جدید را می‌نویسیم:

$$y = (x-1)^2 \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x-1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(-x-1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{بالا}]{\text{۴ واحد}} y = -(-x-1)^2 + 4 \xrightarrow[\text{ساده می‌کنیم}]{\text{۴ واحد}} y = -x^2 - 2x + 3$$

تابع به دست آمده را مساوی تابع اصلی قرار می‌دهیم تا نقاط تلاقی به دست آید:

$$(x-1)^2 = -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

به سؤال: سر امتحان باید همه مراحل رو بنویسیم و رسم کنیم؟

راستش در پاسخنامه آموزش پرورش فقط برای نمودار انتهایی بارم گذاشته، ولی بهتره مرحله به مرحله رسم کنی، چون دو تا فایده داره. هم کمتر اشتباه می‌کنی و هم اگه به اشتباه کوچیک توی مراحلش داشتی، خیلی نمره کم نمی‌کنن.

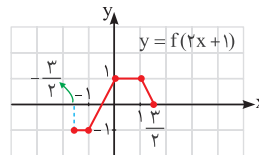
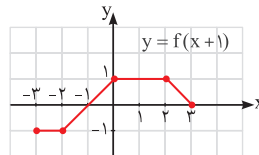
۳۶

با ترتیب زیر، نمودار  $g(x)$  را رسم می‌کنیم:

$$f(x) \Rightarrow f(x+1) \Rightarrow f(2x+1) \Rightarrow 2f(2x+1) \Rightarrow 2f(2x+1) - 1$$

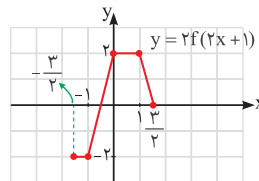
پس ابتدا نمودار را یک واحد به

سمت چپ انتقال می‌دهیم:



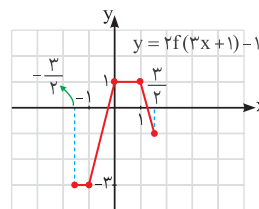
در این مرحله، طول نقاط را تقسیم

بر ۲ می‌کنیم (انقباض افقی):



حال، عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم

(انبساط عمودی):



سرانجام با یک واحد انتقال

نمودار به سمت پایین، نمودار

$$g(x) = 2f(2x+1) - 1$$

به دست می‌آید.

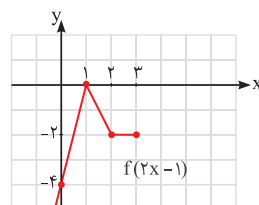
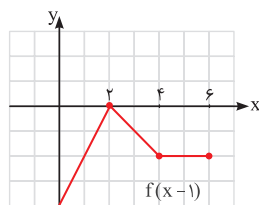
باتوجه به شکل  $D_g = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$  است.

۳۷

ابتدا نمودار  $f(x)$  را یک واحد به

سمت راست انتقال می‌دهیم تا

$f(x-1)$  حاصل شود.



برای رسم  $f(2x-1)$ ، طول نقاط

را نصف می‌کنیم (انقباض افقی با

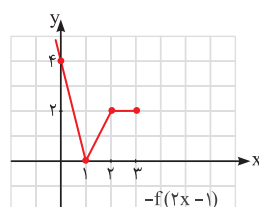
ضرب  $\frac{1}{2}$ ):

نمودار را نسبت به محور

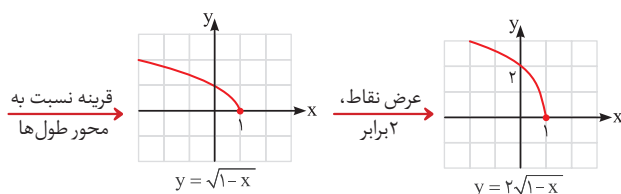
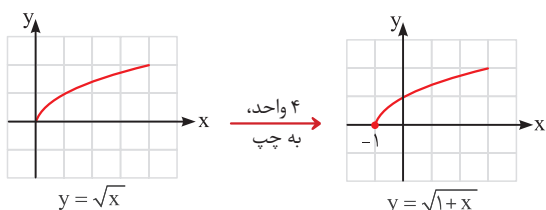
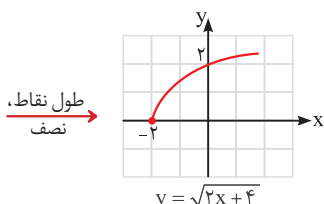
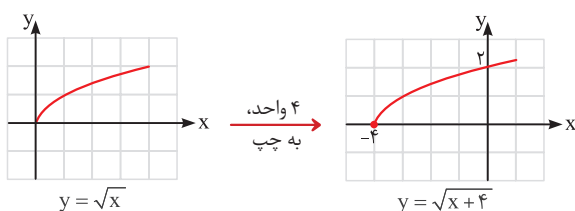
طول‌ها قرینه می‌کنیم تا به

$y = -f(2x-1)$  برسیم:

$$\Rightarrow D_y = (-\infty, 3], R_y = [0, +\infty)$$

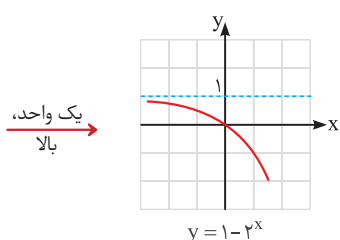
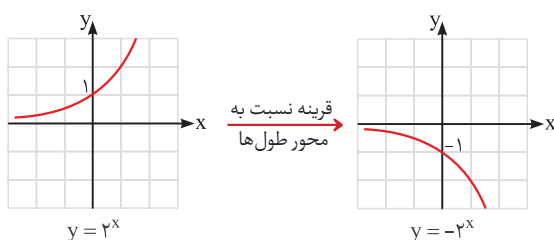


(ب)



(پ)

نمودار  $y = 2^x$  را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده، سپس یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



با استفاده از نمودار  $y = 1 - 2^x$ ، داریم:

$$D_y = \mathbb{R}, \quad R_y = (-\infty, 1)$$

۴۱

مقدار تابع  $y = x^3 + 1$  به ازای  $x = 1$  برابر ۲ می‌شود. حال برای آن‌که تبدیل‌یافته نقطه به مختصات  $(1, 2)$  را پیدا کنیم، ابتدا  $f$  را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = (x-2)^3 + 3$$

پس باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$x^3 + 1 \xrightarrow[\text{راست}]{\text{2 واحد بالا}} (x-2)^3 + 1 \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{2 واحد بالا}} (x-2)^3 + 3$$

یعنی برای این‌که از تابع  $y = x^3 + 1$  به  $f(x) = (x-2)^3 + 3$  برسیم، کافی است نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بنابراین برای نقطه  $(1, 2)$  داریم:

$$(1, 2) \xrightarrow[\text{راست}]{\text{2 واحد بالا}} (3, 2) \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{2 واحد بالا}} (3, 4)$$

کلیدنهایی

(بارم کل: ۱ نمره)

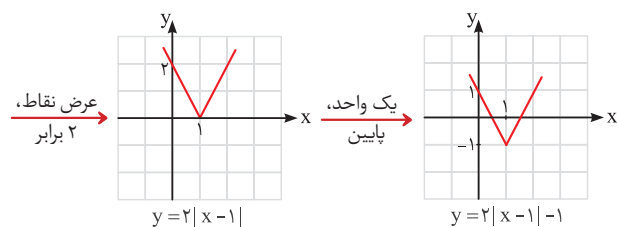
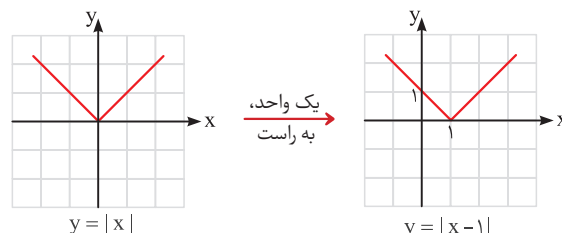
نقطه  $(1, 2)$  (۰/۲۵)

$$f(x) = (x-2)^3 + 3 \quad (۰/۲۵)$$

نقطه تبدیل‌یافته  $(3, 4)$  (هر مؤلفه ۰/۲۵)

۴۲

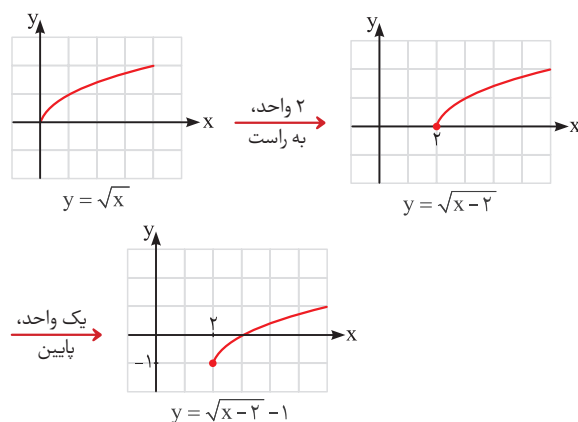
نمودار  $f(x)$  را با ترتیب زیر رسم می‌کنیم:



باتوجه به نمودار  $f(x)$ ، دامنه تابع، برابر  $\mathbb{R}$  و برد تابع، بازه  $[-1, +\infty)$  است.

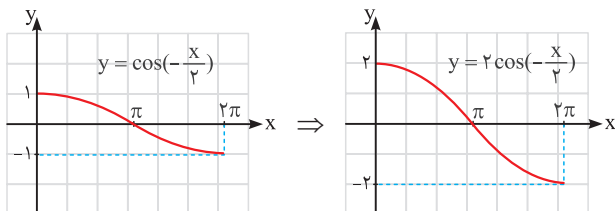
۴۳

نمودار هر یک را با توجه به مراحل زیر رسم می‌کنیم:

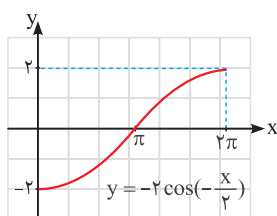


می‌بینید که روی نمودار، تغییری حاصل نشد. حتماً از مثلثات پارسال یادتون هست که  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  می‌شد.

حال طول نقاط و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم تا به ترتیب  $\cos(-\frac{x}{2})$  و  $2\cos(-\frac{x}{2})$  حاصل شوند:

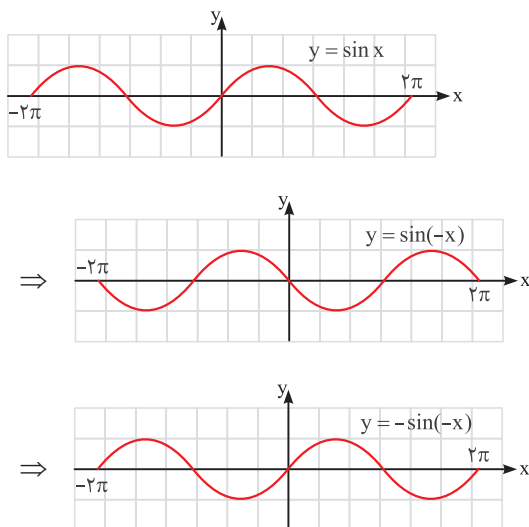


در انتها نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده تا به نمودار  $y = -2\cos(-\frac{1}{2}x)$  برسیم:

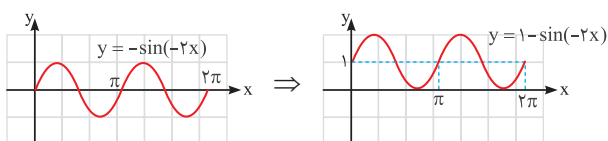


۴۸

نمودار  $\sin x$  را ابتدا نسبت به محور عرض‌ها و سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده تا به ترتیب  $\sin(-x)$  و  $-\sin(-x)$  حاصل شوند:

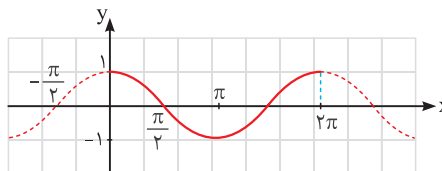


می‌بینید که نمودار  $\sin x$  و  $-\sin(-x)$  مثل هم شدن. حتماً از مثلثات پارسال یادتون هست که  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  و در نتیجه  $-\sin(-\alpha) = \sin \alpha$ . طول نقاط را نصف کرده تا  $-\sin(-2x)$  به‌دست آید، و در انتها نمودار حاصل را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

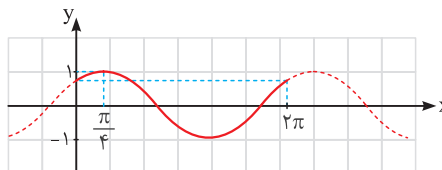


۴۵

نمودار  $y = \cos x$  به‌صورت زیر می‌باشد:

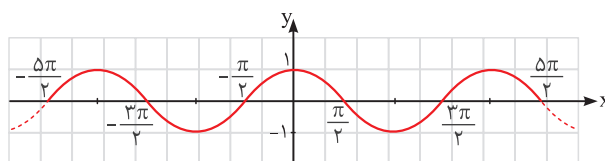


$\frac{\pi}{4}$  واحد به سمت راست انتقال داده تا به نمودار  $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$  برسیم:

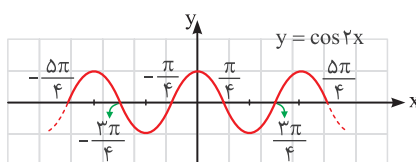


۴۶

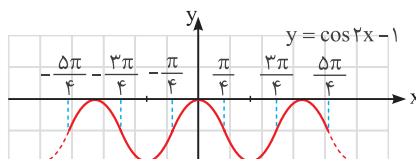
ابتدا نمودار  $y = \cos x$  را رسم می‌کنیم:



طول نقاط را نصف می‌کنیم (انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ):

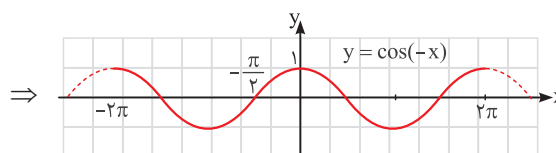
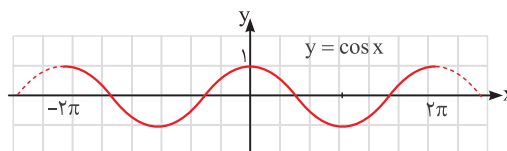


یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار  $y = (\cos 2x) - 1$  حاصل شود.



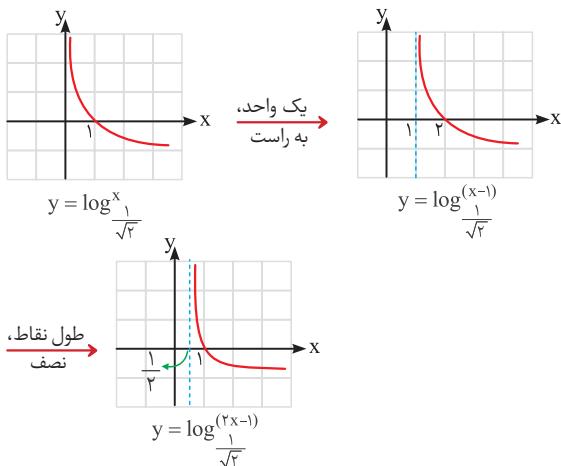
۴۷

ابتدا نمودار  $y = \cos x$  را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا  $y = \cos(-x)$  به‌دست آید:



ب) در تابع  $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$  مبنا کوچک‌تر از یک و در نتیجه نمودار آن

کاهشی (نزولی) است، پس آن را رسم کرده و با تبدیل، به  $g(x)$  می‌رسیم:



۵۱

ضریب ۲، روی دامنه تابع تأثیری ندارد. حال برای محاسبه دامنه  $f(-3x+1)$  می‌توان به یکی از دو روش زیر اقدام کرد:

روش اول با استفاده از مفاهیم تبدیل:

$$D_{f(x)} = [-3, 3] \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} D_{f(x+1)} = [-4, 2]$$

$$\xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} D_{f(-x+1)} = [-2, 4]$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر ۳}]{\text{طول نقاط،}} D_{f(-3x+1)} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$$

**نکته** اگر  $D_{f(x)} = [m, n]$  باشد، برای محاسبه  $D_{f(ax+b)}$  کافی است نامعادله  $m \leq ax+b \leq n$  را حل کرد. محدوده  $x$  به دست آمده، همان دامنه  $f(ax+b)$  می‌باشد.

روش دوم با استفاده از نکته:

$$-3 \leq -3x+1 \leq 3 \Rightarrow -4 \leq -3x \leq 2 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow D_{f(-3x+1)} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$$

هر کدام از این روش‌ها رو در امتحان نهایی بنویسی، نمره کامل می‌گیری.

۵۲

روش اول با استفاده از مفاهیم تبدیل:

$$D_{g(x)} = [-2, 4] \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} D_{g(-x)} = [-4, 2]$$

$$\xrightarrow[\text{نصف}]{\text{طول نقاط،}} D_{g(-2x)} = [-2, 1]$$

البته همیشه دو تا مرحله رو با هم، توی یک مرحله نوشت.

ضریب ۳ تأثیری روی دامنه ندارد، پس دامنه تابع  $k(x) = 3g(-2x)$  بازه  $[-2, 1]$  می‌شود.

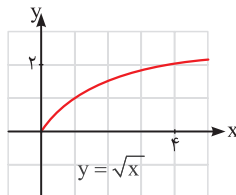
روش دوم با استفاده از نکته: با حل نامعادله  $-2 \leq -2x \leq 4$ ، دامنه  $k(x)$  به دست می‌آید:

$$-2 \leq -2x \leq 4 \xrightarrow[\text{(جهت عوض می‌شود)}]{\div (-2)} -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{g(-2x)} = [-2, 1]$$

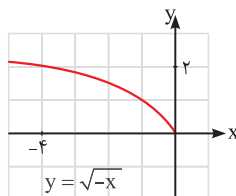
یعنی دامنه  $k(x)$  بازه  $[-2, 1]$  می‌شود.

۴۹

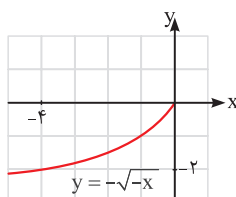
نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به صورت زیر است:



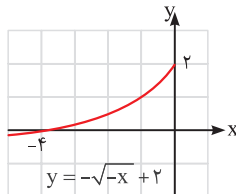
نمودار داده شده در صورت سؤال، سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد، پس ابتدا قرینه آن را نسبت به محور  $y$ ها به دست آورده تا نمودار  $y = \sqrt{-x}$  به دست آید:



حال نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده تا به نمودار  $y = -\sqrt{-x}$  برسیم:

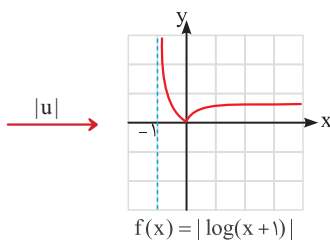
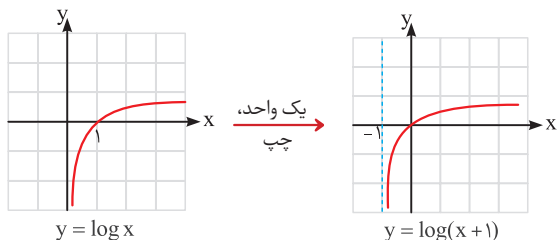


در انتها، ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم و در نتیجه ضابطه تابع به صورت  $y = -\sqrt{-x} + 2$  می‌باشد.



۵۰

آ) می‌دانیم اگر لگاریتم مبنا نداشته باشد، یعنی مبنا  $10$  است. پس نمودار  $y = \log x$  را رسم کرده، سپس با تبدیل آن، نمودار  $f(x)$  را به دست می‌آوریم:



**روش دوم** با استفاده از نکته: با توجه به  $-3 \leq x \leq 7$ ، محدوده  $\frac{x+1}{2}$  را تعیین می‌کنیم:

$$-3 \leq x \leq 7 \Rightarrow -2 \leq x+1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 4$$

پس دامنه تابع  $f(x)$ ، بازه  $[-1, 4]$  می‌شود. حال دامنه  $f(3-x)$  را به دست می‌آوریم:

$$-1 \leq 3-x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 4$$

در نتیجه، دامنه تابع خواسته شده، بازه  $[-1, 4]$  می‌شود.

۵۷

**روش اول** برای تبدیل  $f(x)$  به  $f(-3x+1)$  به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} f(x+1) \xrightarrow[\text{تقسیم بر } -3]{\text{طول نقاط}} f(-3x+1)$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب در } -2]{\text{عرض نقاط}} -2f(-3x+1)$$

حال تبدیل یافته نقطه  $A \left| \begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right|$  را می‌یابیم:

$$A \left| \begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} \left| \begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow[\text{تقسیم بر } -3]{\text{طول نقاط}} \left| \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow[\text{ضرب در } -2]{\text{عرض نقاط}} \left| \begin{smallmatrix} 4 \\ -6 \end{smallmatrix} \right|$$

پس متناظر نقطه  $A$ ، نقطه  $A' \left( \frac{4}{3}, -6 \right)$  به مختصات  $\left( \frac{4}{3}, -6 \right)$  می‌باشد.

**روش دوم** چون نقطه  $(-3, 2)$  روی نمودار تابع  $y = f(x)$  قرار دارد،

پس  $f(-3) = 2$  می‌شود. از طرفی داریم:

$$y = -2f(-3x+1) \Rightarrow f(-3x+1) = \frac{-y}{2}$$

با مقایسه تساوی‌های به دست آمده، نقطه متناظر را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-3x+1) = \frac{-y}{2} \\ f(-3) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+1 = -3 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ \frac{-y}{2} = 2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

۵۸

**روش اول** برای تبدیل  $f(x)$  به  $\frac{1+f(5x-1)}{2}$  به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

$$\frac{1+f(5x-1)}{2} \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد}} 1+f(5x-1) \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{عرض نقاط}} 1+f(5x-1)$$

$$\xrightarrow[\text{برابر}]{\text{طول نقاط}} f(x-1) \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} f(x)$$

حال تبدیل یافته نقطه  $A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|$  را می‌یابیم:

$$A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد}} \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{طول نقاط}} \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{عرض نقاط}} \left| \begin{smallmatrix} 10 \\ -3 \end{smallmatrix} \right|$$

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{یک واحد}} \left| \begin{smallmatrix} 9 \\ -3 \end{smallmatrix} \right|$$

**روش دوم** نقطه  $A(2, -1)$  را در تابع  $y = \frac{1+f(5x-1)}{2}$  قرار می‌دهیم:

$$-1 = \frac{1+f(10-1)}{2} \Rightarrow -2 = 1+f(9) \Rightarrow f(9) = -3$$

پس متناظر نقطه  $A$ ، نقطه به مختصات  $(9, -3)$  می‌شود.

۵۳

**روش اول** با استفاده از مفاهیم تبدیل:

$$D_{f\left(\frac{x}{2}-3\right)} = [-6, 2] \xrightarrow[\text{نصف}]{\text{طول نقاط}} D_{f(x-3)} = [-3, 1]$$

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۳ واحد}} D_{f(x)} = [-6, -2]$$

**نکته** اگر  $D_{f(ax+b)} = [m, n]$  باشد، برای محاسبه  $D_{f(x)}$ ، کافی است از نامساوی  $m \leq x \leq n$ ، محدوده  $ax+b$  را به دست آوریم.

**روش دوم** با استفاده از نکته:

$$-6 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -6 \leq \frac{x}{2} - 3 \leq -2 \Rightarrow D_{f(x)} = [-6, -2]$$

این‌جا هم، همین‌طور، از هر دو روش می‌تونی در امتحان نهایی استفاده کنی.

۵۴

مقدار  $k$  فقط روی برد تابع تأثیر دارد و دامنه تابع تغییری نمی‌کند:

$$D_{kf(x)} = [a, b]$$

محدوده برد  $f(x)$ ، به علامت  $k$  بستگی دارد:

$$c \leq f(x) \leq d \xrightarrow{\times k} \begin{cases} k > 0: kc \leq kf(x) \leq kd \\ k < 0: kd \leq kf(x) \leq kc \end{cases}$$

اگر دو سمت یک نامساوی رو در یک عدد منفی ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شه.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} R_{kf(x)} = [kc, kd] & , k > 0 \\ R_{kf(x)} = [kd, kc] & , k < 0 \end{cases}$$

۵۵

مقدار  $k$  فقط روی دامنه تابع تأثیر دارد و برد تابع تغییری نمی‌کند:

$$R_{f(kx)} = [c, d]$$

محدوده دامنه  $f(kx)$ ، به علامت  $k$  بستگی دارد:

$$a \leq kx \leq b \xrightarrow{\div k} \begin{cases} k > 0: \frac{a}{k} \leq x \leq \frac{b}{k} \\ k < 0: \frac{b}{k} \leq x \leq \frac{a}{k} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} D_{f(kx)} = \left[ \frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right] & , k > 0 \\ D_{f(kx)} = \left[ \frac{b}{k}, \frac{a}{k} \right] & , k < 0 \end{cases}$$

۵۶

در تابع  $y = 5f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ ، ضریب ۵ و در تابع  $y = 4f(3-x) + 7$ ، اعداد

۴ و ۷ روی دامنه، تأثیری ندارند. حال برای محاسبه دامنه  $y = f(3-x)$ ، می‌توان به یکی از دو روش زیر اقدام کرد:

**روش اول** با استفاده از مفاهیم تبدیل:

$$D_{f\left(\frac{x+1}{2}\right)} = [-3, 7] \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{یک واحد}} D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = [-2, 8]$$

$$\xrightarrow[\text{نصف}]{\text{طول نقاط}} D_{f(x)} = [-1, 4] \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۳ واحد}} D_{f(3+x)} = [-4, 1]$$

$$\xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} D_{f(3-x)} = [-1, 4]$$