

فهرست مطالب

فصل اول: مجموعه‌ها

۱	معرفی مجموعه	۱۰	۴	مجموعه‌ها و احتمال	۲۵
۲	مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها	۱۳	*	آزمون جمع‌بندی فصل	۳۱
۳	اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها	۱۹	✓	پاسخ‌های تشریحی فصل اول	۱۷۰

فصل دوم: عددهای حقیقی

۱	عددهای گویا	۳۳	*	آزمون جمع‌بندی فصل	۵۱
۲	عددهای حقیقی	۴۱	✓	پاسخ‌های تشریحی فصل دوم	۱۷۹
۳	قدر مطلق و محاسبه تقریبی	۴۵			

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

۱	استدلال	۵۳	۵	شکل‌های متشابه	۶۹
۲	آشنایی با اثبات در هندسه	۵۶	*	آزمون جمع‌بندی فصل	۷۴
۳	هم‌نهشتی مثلث‌ها	۶۰	✓	پاسخ‌های تشریحی فصل سوم	۱۸۶
۴	حل مسئله در هندسه	۶۵			

فصل چهارم: توان و ریشه

۱	توان صحیح	۷۷	۴	جمع و تفریق رادیکال‌ها	۹۰
۲	نماد علمی	۸۱	*	آزمون جمع‌بندی فصل	۹۴
۳	ریشه‌گیری	۸۵	✓	پاسخ‌های تشریحی فصل چهارم	۱۹۶

فصل پنجم: عبارت‌های جبری

۱۱۵ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۰۴ پاسخ‌های تشریحی فصل پنجم

۹۶ عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد ۱

۱۰۵ چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها ۲

۱۱۰ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها ۳

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی

۱۳۷ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۱۱ پاسخ‌های تشریحی فصل ششم

۱۱۷ معادله خط ۱

۱۲۳ شیب خط و عرض از مبدأ ۲

۱۳۱ دستگاه معادله‌های خطی ۳

فصل هفتم: عبارت‌های گویا

۱۵۳ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۱۹ پاسخ‌های تشریحی فصل هفتم

۱۳۹ معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا ۱

۱۴۳ محاسبات عبارت‌های گویا ۲

۱۴۸ تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۳

فصل هشتم: حجم و مساحت

۱۶۷ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۲۸ پاسخ‌های تشریحی فصل هشتم

۱۵۵ حجم و مساحت کره ۱

۱۵۸ حجم هرم و مخروط ۲

۱۶۳ سطح و حجم ۳

۲۴۳ آزمون پایان نوبت دوم (۲) *

۲۴۶ آزمون پایان نوبت دوم (۳) *

۲۴۹ پاسخ‌های تشریحی آزمون‌های پایان نوبت

۲۳۶ آزمون پایان نوبت اول (۱) *

۲۳۸ آزمون پایان نوبت اول (۲) *

۲۴۰ آزمون پایان نوبت دوم (۱) *

بخش اول

درستامه و پرسش‌ها

www.gajmarket.com

فصل سوم:
استدلال و اثبات در هندسه

۵۳

فصل دوم:
عددهای حقیقی

۳۳

فصل اول:
مجموعه‌ها

۱۰

فصل هشتم:
خط و معادله‌های خطی

۱۱۷

فصل پنجم:
عبارت‌های جبری

۹۶

فصل چهارم:
توان و ریشه

۷۷

فصل هشتم:
حجم و مساحت

۱۵۵

فصل هفتم:
عبارت‌های گویا

۱۳۹

فصل اول

مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه



● **مجموعه:** اگر تعدادی شیء (عدد، حرف، شکل و ...) را مشخص کنیم و آن‌ها را در یک منحنی بسته یا در داخل دو آکولاد قرار دهیم، می‌گوییم مجموعه‌ای از آن اشیاء را ساخته‌ایم. به عنوان نمونه، مجموعه اعداد اول یک رقمی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \quad \text{یا} \quad \{2, 3, 5, 7\}$$

برای نام‌گذاری مجموعه‌ها معمولاً از حروف انگلیسی بزرگ A، B، C و ... استفاده می‌شود و اگر از آکولاد برای نمایش مجموعه استفاده کنیم، اشیاء را با «،» از هم جدا می‌کنیم. مانند:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

به هریک از اشیاء درون یک مجموعه، عضو آن مجموعه گفته می‌شود. مثلاً مجموعه $B = \{2, 1, 4\}$ دارای سه عضو است که عبارت‌اند از عددهای ۱، ۲ و ۴. همچنین توجه کنید که عضوهای مجموعه باید به طور مشخص و معین، قابل تعیین شدن باشند.

مثال مجموعه C شامل تمام اعداد طبیعی یک رقمی زوج است. مجموعه C را با اعضایش نمایش دهید.

پاسخ

$$C = \{2, 4, 6, 8\} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}$$

نکته در نمایش مجموعه‌ها:

الف با تکرار عضوهای مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. (عضوهای تکراری را نمی‌نویسیم).

ب با جابه‌جایی عضوهای مجموعه، مجموعه جدیدی به دست نمی‌آید. (ترتیب نوشتن اعضا، مهم نیست).

مثال با ذکر دلیل، مشخص کنید هر مورد، آیا توصیف‌کننده یک مجموعه است یا خیر.

پ اعداد اول زوج

ب سه شاعر معروف ایرانی

الف سه شمارنده زوج ۶۰

پاسخ

الف مجموعه‌ای را توصیف نمی‌کند، زیرا اعضای آن به طور مشخص، قابل تعیین نیستند. مثلاً:

$$\{2, 4, 6\} \quad \text{یا} \quad \{2, 6, 30\} \quad \text{یا} \quad \{2, 4, 12\} \quad \text{یا} \quad \{2, 4, 6\}$$

ب مجموعه‌ای را توصیف نمی‌کند، زیرا اعضای آن به طور مشخص، قابل تعیین نیستند. مثلاً:

$$\{000\} \quad \text{یا} \quad \{\text{خیام}, \text{مولوی}, \text{فردوسی}\} \quad \text{یا} \quad \{\text{سعدی}, \text{حافظ}, \text{فردوسی}\}$$

پ یک مجموعه را توصیف می‌کند که برابر با $\{2\}$ است.

مثال مجموعه $A = \{2, \sqrt{4}, (-1)^2, 1\}$ دارای چند عضو است؟

پاسخ

$$A = \{2, \sqrt{4}, (-1)^2, 1\} \Rightarrow A = \{2, \cancel{\sqrt{4}}, \cancel{1}, 1\} \Rightarrow A = \{2, 1\}$$

تکراری تکراری

بنابراین مجموعه A دارای ۲ عضو است.

بنابراین می‌توان گفت:

در ریاضی، از مجموعه، برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز استفاده می‌کنیم.

● **عضویت در مجموعه:** برای اینکه نشان دهیم a عضوی از مجموعه A است، می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم « a عضو A است.»؛ همچنین برای اینکه نشان دهیم a عضوی از مجموعه A نیست، می‌نویسیم $a \notin A$ و می‌خوانیم « a عضو A نیست.» مثلاً:

$$A = \{2, 3, 7, 8\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \in A \Rightarrow 2 \text{ عضو } A \text{ است.} \\ 9 \notin A \Rightarrow 9 \text{ عضو } A \text{ نیست.} \end{cases}$$

مثال با توجه به مجموعه $A = \{3, 4, 2, 7, 5\}$ ، جاهای خالی را با علامت‌های $\in$ یا $\notin$ کامل کنید.

الف $2 \square A$

ب $6 \square A$

پ $-1 \square A$

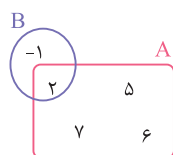
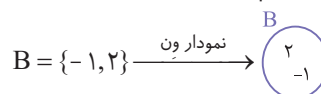
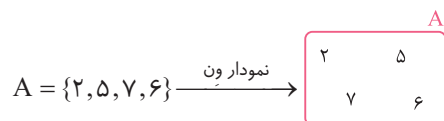
الف $2 \square A$

ب $6 \square A$

پ $-1 \square A$

پاسخ

● **نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون:** مجموعه‌ها را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد. در چنین حالتی می‌گوییم مجموعه را با استفاده از نمودار ون نمایش داده‌ایم. مثلاً:



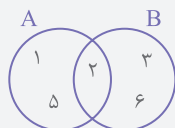
می‌توانیم دو مجموعه A و B را که در بالا داریم، با هم به صورت مقابل نمایش دهیم:

مثال با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ دو مجموعه A و B را با شرایط زیر، می‌سازیم.

$$1 \in A, 1 \notin B, 2 \in A, 2 \in B, 3 \notin A, 3 \in B, 4 \notin A, 4 \notin B, 5 \in A, 5 \notin B, 6 \notin A, 6 \in B$$

نمودار ون را طوری رسم کنید که مجموعه‌های A و B را نمایش دهد.

پاسخ



● **مجموعه تهی:** اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه «تهی» می‌نامیم و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

مثال کدام یک از عبارت‌های زیر، یک مجموعه تهی را توصیف می‌کند؟

الف عددهای صحیح بین ۴- و ۶-.

ب اعدادی که از قرینه خود کوچک‌ترند.

پ اعدادی که جذر آن‌ها منفی می‌شود.

الف $\{-5\}$

ب مجموعه تمام اعداد منفی

پ $\{\}$

پاسخ

بنابراین عبارت «اعدادی که جذر آن‌ها منفی می‌شود»، مجموعه‌ای تهی را توصیف می‌کند.

نکته عضوهای مجموعه، هر چیزی می‌توانند باشند، حتی از جنس مجموعه؛ در واقع می‌توانیم مجموعه‌ای داشته باشیم که اعضای آن خودشان مجموعه باشند. مانند:

$$A = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}}_{\text{مجموعه } B}, \underbrace{\{1, 4\}}_{\text{مجموعه } C}, \sqrt{2}\} \Rightarrow A = \{B, C, \sqrt{2}\}$$

یعنی مجموعه A ، یک مجموعه سه عضوی است. حالا مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \{\emptyset\}$$

می‌دانیم $\emptyset$ خودش یک مجموعه است، اگر آن را با C نشان دهیم، داریم:

$$B = \{\underbrace{\emptyset}_{\text{مجموعه } C}\} \Rightarrow B = \{C\} \Rightarrow B \Rightarrow \text{تهی نیست} \Rightarrow B \Rightarrow \text{مجموعه‌ای یک عضوی است.}$$

در نتیجه مجموعه $\{\emptyset\}$ مجموعه تهی نیست، زیرا دارای یک عضو است.

مثال مجموعه $A = \{\{\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ چند عضوی است؟

پاسخ

$$A = \{\underbrace{\{\}}_{\text{تکراری}}, \emptyset, \{\emptyset\}\} \Rightarrow A = \{\underbrace{\emptyset}_{\text{تهی است}}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{\text{تهی نیست}}\}$$

بنابراین مجموعه A مجموعه‌ای دو عضوی است.

پرسش‌های درس اول



درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(هماهنگ ایلام - ۱۴۰۱)

(هماهنگ خارج از کشور - ۱۴۰۳)

(هماهنگ کرمانشاه - ۱۴۰۲)

- ۱ هر مجموعه حداقل یک عضو دارد. ☐
- ۲ عبارت «نام دو شاعر ایرانی» یک مجموعه را مشخص می‌کند. ☐
- ۳ مجموعه تهی را می‌توان با $\{\}$ نشان داد. ☐
- ۴ مجموعه $\{1, 2, 5, 1\}$ دارای ۴ عضو است. ☐
- ۵ تعداد اعضای دو مجموعه $A = \{0, \emptyset\}$ و $B = \{1, 2\}$ با هم برابرند. ☐

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(هماهنگ کشوری - ۱۴۰۳)

(هماهنگ آذربایجان غربی - ۱۴۰۰)

- ۶ اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را می‌نامیم.
- ۷ مجموعه شمارنده‌های اول عدد ۳۶ دارای عضو است.
- ۸ مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای عضو است.
- ۹ مجموعه $\{-1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \dots, (-1)^{402}\}$ دارای عضو است.

گزینه درست را مشخص کنید.

۱۰ مجموعه $A = \{1^5, 5^0, 5^1, \sqrt{\frac{8}{2}}, \sqrt{4}, \frac{15}{15}\}$ چند عضو دارد؟

۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴ ۳

۱۱ با توجه به مجموعه A ، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

$$A = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

$$\emptyset \in A \quad \text{الف)}$$

$$0 \in A \quad \text{ب)}$$

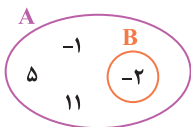
$$\{\{\emptyset\}\} \notin A \quad \text{پ)}$$

۱ صفر ۲ یک ۳ دو ۴ سه

۱۲ کدام عبارت، مشخص‌کننده مجموعه تهی است؟

۱ عددهای صحیح بین ۲- و ۲ ۲ شمارنده‌های اول عدد ۷

۳ عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ۴ عددهای صحیح منفی و بزرگ‌تر از ۳-



(هماهنگ خوزستان - ۱۴۰۰)

۱۳ با توجه به نمودار مقابل، کدام عدد عضو مجموعه B است؟

- ۲ -۱
۴ -۲

- ۱ ۱۱
۳ ۵

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(هماهنگ گلستان - ۱۴۰۲)

۱۴ عبارتی بنویسید که نشان دهنده مجموعه تهی باشد.

۱۵ اگر حروف کلمه «ریاضیات» را در یک مجموعه بنویسیم، این مجموعه چند عضو دارد؟ چرا؟

۱۶ در هر مورد در صورتی که عبارت داده شده مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، آن را بنویسید و در غیر این صورت علت را توضیح دهید.

- الف) سه شهر پر جمعیت ایران
ب) اعداد زوج پنج‌رقمی
ت) پنج اسم دخترانه
ث) اعداد اول بین ۵۰ و ۷۰

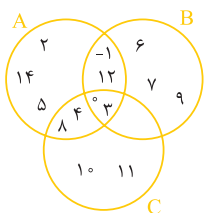
۱۷ مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

- الف) حروف الفبای فارسی که سه نقطه دارند
ب) اعداد فرد بین ۲۲ و ۳۷
ت) اعداد مربع کامل دو رقمی
ث) اعداد سه رقمی‌ای که مجموع ارقامشان ۵ است
ج) مضارب زوج عدد ۷ که بین ۱۰ و ۶۰ قرار دارند

۱۸ هر مجموعه را با یک عبارت کلامی توصیف کنید.

- الف) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
ب) $C = \{-2, -3, -5, -7\}$
ث) $E = \{1, 3, 5, 15\}$

- ب) $B = \{\}$
ث) $D = \{-3, -2, -1, 0\}$
ج) $F = \{8, 27, 64, 125\}$



۱۹ با توجه به نمودار و ن مقابل:

- الف) مجموعه‌های A، B، و C را با نوشتن اعضا نمایش دهید.
ب) کدام اعضا هم در مجموعه A و هم در مجموعه B قرار دارند؟
پ) کدام اعضا تنها در مجموعه A قرار دارند؟
ث) با توجه به مجموعه داده شده درستی یا نادرستی هر عبارت را تعیین کنید.

$$P = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$

- الف) $\emptyset \in P$
ب) $\{\emptyset\} \notin P$
پ) $\{\{\emptyset\}\} \in P$
ث) $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\} \in A$

۲۱ کدام موارد از عبارت‌های زیر، مجموعه‌ای تهی را توصیف می‌کنند؟

- الف) مجموعه اعداد مربع کامل فرد
ب) مجموعه اعداد طبیعی بین -۶ و ۱
پ) مجموعه اعداد اول بین ۵۵ و ۵۹
ث) مجموعه اعداد گویای بین $\frac{1}{1000}$ و $\frac{1}{1001}$

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

• دو مجموعه برابر: اگر A و B دو مجموعه باشند، به طوری که هر عضوی از A، عضوی از B باشد و برعکس، در این صورت، دو مجموعه A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$. اگر عضوی از A در B نباشد یا برعکس، آنگاه A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$. مثلاً دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 1, 4\}$ برابر نیستند؛ زیرا $3 \in A$ ولی $3 \notin B$ یا به طور مشابه $4 \in B$ ولی $4 \notin A$. پس می‌نویسیم $A \neq B$. اما دو مجموعه $C = \{1, 4, 7\}$ و $D = \{7, 1, 4\}$ برابرند؛ زیرا هر عضوی از مجموعه C، در D هم هست و برعکس. پس می‌نویسیم $C = D$.

مثال در جاهای خالی، علامت $=$ یا $\neq$ قرار دهید.

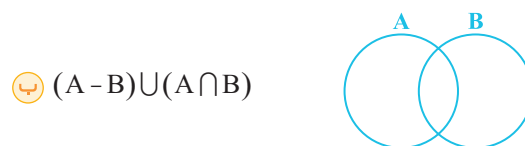
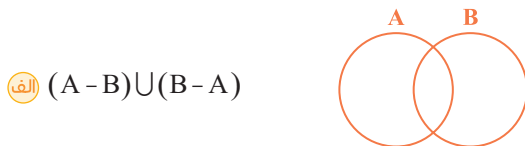
- الف) $\{2, 3, 6, 7\} \square \{2, 3, 6\}$
ب) $\{0\} \square \emptyset$
پ) $\{\sqrt{4}, (-1)^2, 1\} \square \{2, 1\}$

- الف) $7 \notin \{2, 3, 6\} \Rightarrow \square$
ب) $0 \notin \emptyset \Rightarrow \square$
پ) $\{\sqrt{4}, (-1)^2, 1\} = \{2, 1\}$ $\square \{2, 1\} \Rightarrow \square$

تکراری

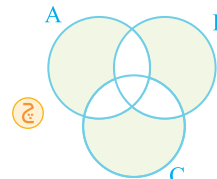
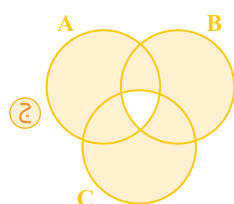
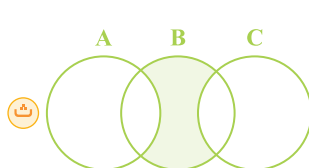
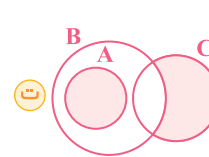
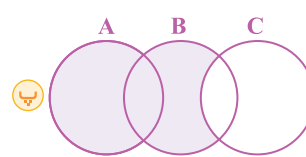
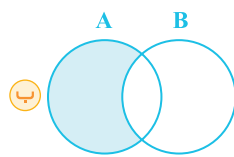
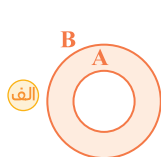
با توجه به مجموعه‌های داده‌شده، در هر نمودار قسمت مورد نظر را مشخص کنید.

۷۶



با توجه به قسمت‌های رنگی در نمودارهای ون، مجموعه متناظر با هر نمودار را بنویسید.

۷۷



اگر $A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 3\}$ ، $B = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ و $C = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$ باشد، مجموعه‌های A ، B ، C را با

۷۸

اعضا نوشته و روی نمودار ون نمایش دهید، سپس مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

الف) $(A \cap B) \cup C = ?$

ب) $(B - C) \cap A = ?$

پ) $(A \cup C) - B = ?$

ث) $(A - B) \cup (B - C) = ?$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال



● **احتمال:** می‌دانیم احتمال هر پیشامد، از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

حالا اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را با S نشان دهیم، آنگاه تعداد همه حالت‌های ممکن، برابر با $n(S)$ خواهد بود. همچنین اگر مجموعه حالت‌های مطلوب را با A نشان دهیم، تعداد حالت‌های مطلوب برابر با $n(A)$ خواهد بود. در نهایت اگر احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش دهیم، رابطه بالا به زبان ریاضی، به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

این رابطه می‌گوید که در مسائل مربوط به احتمال، باید دو چیز را کاملاً مشخص کنیم: اول، مجموعه S که شامل تمام حالت‌های ممکن است؛ دوم، مجموعه A که شامل حالت‌های مطلوب است.

مثال در هر مورد احتمال خواسته شده را محاسبه کنید.

الف احتمال اینکه در پرتاب یک تاس، عددی کمتر از ۵ ظاهر شود.

ب احتمال اینکه در پرتاب دو سکه، حداقل یکی از سکه‌ها «رو» بیاید.

پ از کیسه‌ای شامل سه مهره سیاه و چهار مهره سفید، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد.

ت از جعبه‌ای شامل ۲ مهره سیاه، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره سبز نباشد.

پاسخ **الف**

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6 \quad \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 4$$

ب

برای نوشتن تمام حالت‌های ممکن، از نمودار درختی کمک می‌گیریم:

سکه دوم سکه اول



$$S = \{(رو, رو), (پشت, رو), (پشت, پشت), (رو, پشت)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$A = \{(رو, رو), (پشت, رو), (پشت, پشت)\}$$

پ

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

ت

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

نکته گاهی اوقات نوشتن تمام اعضای S کمی طولانی و خسته‌کننده است. اما اگر تصور خوبی از تمام حالت‌های ممکن و حالت‌های مطلوب داشته باشید، می‌توانید تعداد اعضای S یعنی $n(S)$ را به صورت زیر، راحت‌تر حساب کنید (بدون نوشتن عضوهای آن).

الف پرتاب دو تاس : $\frac{6}{\text{تاس دوم}} \times \frac{6}{\text{تاس اول}} \Rightarrow n(S) = 36$

ب پرتاب دو سکه : $\frac{2}{\text{سکه دوم}} \times \frac{2}{\text{سکه اول}} \Rightarrow n(S) = 4$

پ پرتاب یک سکه و یک تاس : $\frac{2}{\text{سکه}} \times \frac{6}{\text{تاس}} \Rightarrow n(S) = 12$

ت پرتاب سه سکه : $\frac{2}{\text{سکه سوم}} \times \frac{2}{\text{سکه دوم}} \times \frac{2}{\text{سکه اول}} \Rightarrow n(S) = 8$

مثال در پرتاب دو تاس، چقدر احتمال دارد که مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۵ باشد؟

پاسخ

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\} \Rightarrow n(A) = 6 \quad \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

تاس دوم تاس اول

دقت کنید که منظور از (۱ , ۲) این است که تاس اول عدد ۲ و تاس دوم عدد ۱ را نشان می‌دهند.

مثال در پرتاب یک سکه و یک تاس، چقدر احتمال دارد که سکه «رو» بیاید و تاس عددی زوج را نشان دهد؟

پاسخ

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

$$A = \{(رو, ۲), (رو, ۴), (رو, ۶)\} \Rightarrow n(A) = 3 \quad \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(هماهنگ کرمان - ۱۴۰۲)

۸۳ احتمال رو شدن عدد ۳ در پرتاب یک تاس، برابر است.

۸۴ احتمال آنکه حداقل ۳ فرزند خانواده‌ای چهار فرزندی، پسر باشد، است.

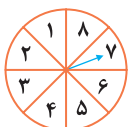
(هماهنگ فارس - ۱۴۰۲)

۸۵ در پرتاب دو سکه احتمال اینکه هر دو سکه «رو» بیاید است.

۸۶ یک سکه را دوبار می‌اندازیم. احتمال اینکه یکی رو و یکی پشت بیاید، است.

۸۷ یک سکه را دوبار می‌اندازیم. احتمال اینکه اولی رو و دومی پشت بیاید، است.

گزینه درست را مشخص کنید.



(هماهنگ بوشهر - ۱۴۰۲)

۸۸ چرخنده مقابل را می‌چرخانیم. احتمال آنکه عقربه روی یک عدد اول قرار بگیرد چقدر است؟

- ☐ ۱ $\frac{5}{8}$
☐ ۲ $\frac{3}{4}$
☐ ۳ $\frac{3}{8}$
☐ ۴ $\frac{1}{2}$

۸۹ اگر تاسی را بیندازیم احتمال اینکه عدد روشده مرکب باشد چقدر است؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{6}$
☐ ۲ $\frac{1}{3}$
☐ ۳ $\frac{1}{2}$
☐ ۴ $\frac{2}{3}$

۹۰ یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال اینکه تاس عددی کمتر از ۳ و سکه «رو» بیاید چقدر است؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{3}$
☐ ۲ $\frac{1}{4}$
☐ ۳ $\frac{1}{6}$
☐ ۴ $\frac{1}{12}$

(هماهنگ گیلان - ۱۴۰۲)

۹۱ اگر تاس سالمی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد هر دو بار عدد اول رو شود؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{6}$
☐ ۲ $\frac{1}{9}$
☐ ۳ $\frac{1}{2}$
☐ ۴ $\frac{1}{4}$

۹۲ دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال اینکه مجموع عددهای روشده ۱۰ باشد، چقدر است؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{6}$
☐ ۲ $\frac{1}{9}$
☐ ۳ $\frac{1}{12}$
☐ ۴ $\frac{1}{18}$

(هماهنگ کشوری - ۱۴۰۳)

۹۳ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد احتمال آنکه دقیقاً یک فرزند دختر داشته باشند، برابر است با:

- ☐ ۱ $\frac{1}{3}$
☐ ۲ $\frac{3}{8}$
☐ ۳ $\frac{1}{8}$
☐ ۴ $\frac{7}{8}$

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(هماهنگ اردبیل - ۱۴۰۲)

۹۴ خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد چقدر است؟

(هماهنگ قزوین - ۱۴۰۱)

۹۵ سه سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر سه، مثل هم ظاهر شوند چقدر است؟

۹۶ خانواده‌ای سه فرزند دارند، احتمال آنکه:

الف) حداقل دو پسر داشته باشند، چقدر است؟

ب) جنسیت فرزندان اول و دوم یکسان باشد، چقدر است؟

پ) جنسیت فرزندان اول و دوم متفاوت باشد و فرزند سوم دختر باشد، چقدر است؟

۹۷ اعداد ۲۱ تا ۴۰ را روی کارت‌های مجزا نوشته و داخل کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس بدون نگاه کردن، کارتی را از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال هریک از

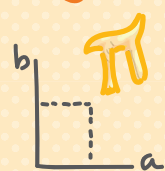
پیشامدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) عدد ظاهرشده مضرب ۵ باشد.

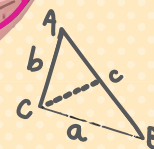
ب) عدد ظاهرشده مضرب ۳ باشد، ولی مضرب ۷ نباشد.

پ) عدد ظاهرشده مضرب ۴ نباشد.

ت) عدد ظاهرشده اول باشد.



آزمون جمع‌بندی ۱



$$\frac{1}{2}$$

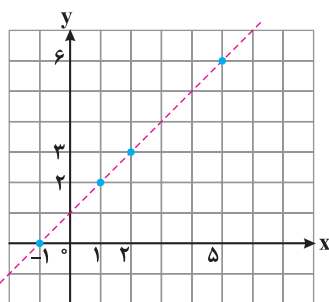
ردیف	آزمون فصل ۱	مجموعه‌ها	مدت زمان: ۷۵ دقیقه	بارم
۱۰۶	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.	الف) عبارت «عددهای طبیعی بین ۵ و ۶» یک مجموعه تهی است. ☐ ب) مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است. ☐ پ) اگر $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد صحیح و گویا باشند، آنگاه $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$. ☐ ت) اگر $n(A) = n(B)$ ، دو مجموعه A و B برابرند. ☐	(هماهنگ خوزستان-۱۴۰۲) (هماهنگ کشوری-۱۴۰۳) (هماهنگ مازندران-۱۴۰۱)	۱
۱۰۷	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.	الف) مجموعه زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است. ب) اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $A \cap B$ برابر با مجموعه است. پ) اجتماع دو مجموعه $(A - B)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه مساوی است. ت) در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد رو شده زوج باشد، است.	(هماهنگ کردستان-۱۴۰۱) (هماهنگ سمنان-۱۴۰۱) (هماهنگ آذربایجان شرقی-۱۴۰۰) (هماهنگ خراسان رضوی-۱۴۰۲)	۱
۱۰۸	گزینه درست را مشخص کنید.	الف) حاصل عبارت $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$ برابر است با: $\mathbb{Z}$ (۱) $\mathbb{N}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $\{0\}$ (۴) ب) اگر دو مجموعه $\{3, \sqrt{25}\}$ و $\{x, 5\}$ با هم مساوی باشند، مقدار x کدام است؟ ۵ (۱) -۳ (۲) -۵ (۳) ۳ (۴) پ) یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد رو شده عدد اول و سکه پشت بیاید، چقدر است؟ ۱/۴ (۱) ۱/۳ (۲) ۱/۶ (۳) ۵/۱۲ (۴) ت) در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۸ مهره قرمز و ۷ مهره آبی وجود دارد. اگر مهره‌ای را به طور تصادفی از این کیسه خارج کنیم احتمال آنکه قرمز نباشد، برابر است با: ۴/۵ (۱) ۲/۵ (۲) ۳/۵ (۳) ۱/۵ (۴)	(هماهنگ کرمان-۱۴۰۱) (هماهنگ خوزستان-۱۴۰۱) (هماهنگ اصفهان-۱۴۰۱) (هماهنگ آذربایجان غربی-۱۴۰۱)	۱
۱۰۹	به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.	با توجه به مجموعه $A = \{2, 3, 4\}$ در مربع نماد مناسب بگذارید. ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\subset$) الف) $2 \in A$ ☐ ب) $5 \in A$ ☐	(هماهنگ بوشهر-۱۴۰۱)	۰/۵
۱۱۰	هریک از مجموعه‌های زیر را با نمایش اعضا نشان دهید.	الف) $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ ب) $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < 3\}$	(هماهنگ چهارمحال و بختیاری-۱۴۰۲) (هماهنگ خراسان شمالی-۱۴۰۲)	۱
۱۱۱	در مجموعه‌های زیر جاهای خالی را طوری کامل کنید که دو مجموعه با هم برابر باشند.	الف) $\{5, \dots, 3, -1\} = \{2, \sqrt{25}, \dots, 3\}$ ب) $\{-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{4}{9}}, \dots, 7\} = \{\frac{2}{3}, \dots, -\frac{0}{5}, 5^2\}$	(هماهنگ شهر تهران-۱۴۰۲) (هماهنگ یزد-۱۴۰۱)	۱

فصل ششم



خط و معادله های خطی

درس اول: معادله خط



● **رابطه خطی:** فرض می کنیم دو پدیده x و y با هم در ارتباط هستند. مقادیر مربوط به آن ها را در یک جدول مانند جدول زیر قرار می دهیم و نظیر هر مقدار x ای که با y مرتبط است، یک نقطه در صفحه مختصات نمایش می دهیم؛ در این صورت اگر همه این نقاط روی یک خط راست واقع شوند، می گوییم x و y «رابطه خطی» دارند. مثلاً:

x	۲	۵	-۱	۱
y	۳	۶	۰	۲

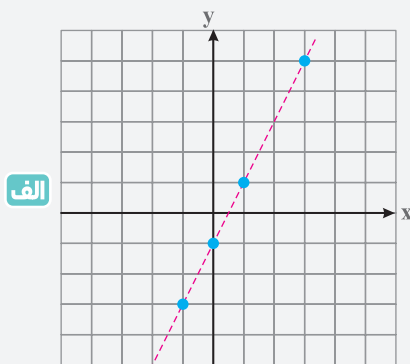
مثال در هر مورد، به کمک رسم نقاط در صفحه مختصات، توضیح دهید که آیا رابطه بین x و y خطی است یا خیر؟

الف

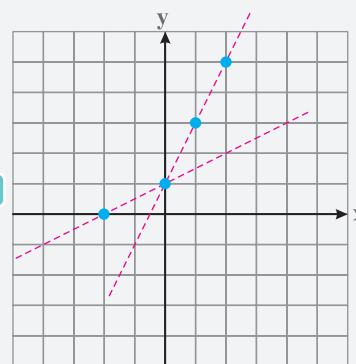
x	۳	-۱	۰	۱
y	۵	-۳	-۱	۱

ب

x	۲	۱	۰	-۲
y	۵	۳	۱	۰



یک خط راست داریم.



دو خط راست داریم.

همان طور که دیده می شود، نقاط مربوط به رابطه «الف» روی یک خط راست قرار دارند؛ بنابراین رابطه بین x و y خطی است. اما نقاط مربوط به رابطه «ب» روی یک خط راست نیستند، پس رابطه بین x و y خطی نیست.

● **معادله رابطه خطی:** همان طور که در بالا دیدیم، برای بررسی خطی بودن یک رابطه، می توانیم نقاط مربوط به آن را در صفحه مختصات رسم کنیم. اما می دانیم رسم نقاط و رسم خط روی آن، ممکن است با خطا مواجه شود و در نتیجه نتوانیم خطی بودن رابطه را به درستی تشخیص دهیم. از این رو بهتر است خطی بودن یک رابطه را از الگوی ریاضی (معادله) آن تشخیص دهیم. معادله یک رابطه خطی بین دو پدیده x و y همواره به صورت $y = ax + b$ است که در آن a و b عددهای حقیقی اند. در واقع اگر بتوانیم الگوی بین نقاط یک رابطه را به صورت $y = ax + b$ بنویسیم، مطمئناً آن رابطه،

خطی است. مانند:

x	۲	۰	۱	-۲
y	۴	-۲	۱	-۸

سعی می‌کنیم الگویی ریاضی بین اعداد سطر بالا (x ها) و اعداد سطر پایین (y ها) پیدا کنیم. می‌توانیم این کار را با حدس و آزمایش انجام دهیم:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 2 & & 1 & & -2 & & x \\ \downarrow \times 3 - 2 & \downarrow \times 3 - 2 & \downarrow \times 3 - 2 & \downarrow \times 3 - 2 & \Rightarrow & \downarrow \times 3 - 2 & \Rightarrow & y = 3x - 2 \\ 4 & -2 & 1 & -8 & & y \end{array}$$

بنابراین معادله این رابطه به صورت $y = \underbrace{3}_a x - \underbrace{2}_b$ است که به صورت $y = ax + b$ نوشته شده است و در نتیجه رابطه بین x و y خطی است.

نکته الف به طور کلی هر رابطه بین x و y که در آن توان x و y یک باشد، یا توان یکی یک و دیگری صفر باشد و x و y در هم ضرب نشده باشند،

یک رابطه خطی بین x و y است و می‌توان آن را به صورت $y = ax + b$ نوشت. مثلاً $x + y = -1$ ، $x + y = 0$ ، $2y - x + 1 = 0$ و... رابطه‌هایی خطی بین x و y هستند.

ب هر رابطه خطی بین x و y بی‌شمار جواب دارد، ولی اتحاد نیست.

مثال در هر مورد، با حدس زدن معادله مربوط به رابطه بین x و y ، خطی بودن یا نبودن رابطه را مشخص کنید.

الف $\begin{array}{c|cccc} x & 4 & 0 & 1 & 9 \\ \hline y & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}$

ب $\begin{array}{c|cccc} x & 4 & 0 & 5 & 9 \\ \hline y & 3 & -1 & 4 & 8 \end{array}$

الف $\begin{array}{ccccccc} 4 & 0 & 1 & 9 & x \\ \downarrow \text{جذر} & \downarrow \text{جذر} & \downarrow \text{جذر} & \downarrow \text{جذر} & \Rightarrow & \downarrow \text{جذر} & \Rightarrow y = \sqrt{x} \\ 2 & 0 & 1 & 3 & y \end{array}$

چون $y = \sqrt{x}$ به صورت $y = ax + b$ نوشته نمی‌شود، رابطه بین x و y خطی نیست.

ب $\begin{array}{ccccccc} 4 & 0 & 5 & 9 & x \\ \downarrow -1 & \downarrow -1 & \downarrow -1 & \downarrow -1 & \Rightarrow & \downarrow -1 & \Rightarrow y = x - 1 \\ 3 & -1 & 4 & 8 & y \end{array}$

چون $y = x - 1$ به صورت $y = ax + b$ نوشته می‌شود، رابطه بین x و y خطی است.

نکته اگر به ازای $x = 0$ و $y = 0$ در یک معادله خط، تساوی عددی برقرار شود، آن معادله خط به صورت $y = ax$ نوشته می‌شود و نمودار مربوط

به آن رابطه، خطی راست است که از مبدأ مختصات می‌گذرد. به عبارتی معادله تمام خط‌های راستی که از مبدأ مختصات می‌گذرند به صورت $y = ax$ است.

مثال می‌دانیم x و y با هم رابطه خطی دارند. اگر $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$ باشد، معادله مربوط به رابطه آن‌ها را حدس بزنید.

پاسخ چون $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ مربوط به رابطه خطی بین x و y است، معادله این رابطه خطی به صورت $y = ax$ است و داریم:

$$\begin{array}{ccc} 3 & x \\ \downarrow \times \frac{1}{3} & \Rightarrow \downarrow \times \frac{1}{3} & \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \\ 1 & y \end{array}$$

• **شرط قرار داشتن یک نقطه روی یک خط:** وقتی نقطه A روی خط $y = ax + b$ قرار داشته باشد، از معادله (الگوی ریاضی) آن خط پیروی می‌کند؛ یعنی طول و عرض نقطه A در این رابطه خطی صدق می‌کنند و اگر طول و عرض نقطه A را به ترتیب، به جای x و y معادله خط قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد شد. مثلاً:

الف نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x - 5$ قرار دارد، زیرا:

$$y = 3x - 5 \xrightarrow{\begin{array}{c} x \leftarrow 2 \\ y \leftarrow 1 \end{array}} 1 \stackrel{?}{=} 3 \times 2 - 5 \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark \text{ (تساوی برقرار است.)}$$

(همهانگ کهگیلویه و بویراحمد - ۱۴۰۰)

۵۴۵ خط $y = x - 3$ را رسم کرده و با ذکر دلیل تعیین کنید که آیا نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی آن قرار دارد یا خیر.

(همهانگ البرز - ۱۴۰۱)

۵۴۶ خط $y = -2x + 3$ را رسم کرده و مشخص کنید نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد یا خیر.

(همهانگ شهرستان های تهران - ۹۷)

۵۴۷ مختصات محل برخورد خط به معادله $y = 2x - 6$ را با محور طول ها به دست آورید.

۵۴۸ مقدار a را طوری تعیین کنید که نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط $x + ay = -8$ قرار داشته باشد.

۵۴۹ مقدار m را طوری تعیین کنید که نقطه $\begin{bmatrix} m-1 \\ m+1 \end{bmatrix}$ روی خط $2x = y + 3$ قرار داشته باشد.

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ



● **معادله خطی استاندارد:** اگر معادله یک خط راست را به صورت $y = ax + b$ بنویسیم، می گوئیم آن را استاندارد کرده ایم. در واقع در فرم استاندارد معادله یک خط، y در یک طرف تساوی تنها می ماند و بقیه عبارت ها در طرف دیگر نوشته می شوند. مثلاً:

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{یا} \quad y = -x + 3 \quad \text{یا} \quad y = \sqrt{2}x$$

مثال هریک از معادله های زیر را به صورت استاندارد ($y = ax + b$) بنویسید و مقادیر a و b را مشخص کنید.

الف $y + x = 1$

پ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+x}{3}$

ب $2y - x = 4$

ت $\frac{1}{2}y + 1 = \frac{x}{3}$

پاسخ

الف $y + x = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \xrightarrow{y=ax+b} a = -1, b = 1$

ب $2y - x = 4 \Rightarrow 2y = x + 4 \xrightarrow{\div 2} y = \frac{1}{2}x + 2 \xrightarrow{y=ax+b} a = \frac{1}{2}, b = 2$

پ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+x}{3} \xrightarrow{\times 6} \cancel{3}(\frac{x-3}{\cancel{2}}) = \cancel{2}(\frac{y+x}{\cancel{3}}) \Rightarrow 3(x-3) = 2(y+x) \Rightarrow 3x - 9 = 2y + 2x \Rightarrow -2y = 2x - 3x + 9$

$-2y = -x + 9 \xrightarrow{\div (-2)} y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2} \xrightarrow{y=ax+b} a = \frac{1}{2}, b = -\frac{9}{2}$

ت $\frac{1}{2}y + 1 = \frac{x}{3} \xrightarrow{\times 2} 2 \times (\frac{1}{2}y) + 2 \times 1 = 2 \times (\frac{x}{3}) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2 \xrightarrow{y=ax+b} a = \frac{2}{3}, b = -2$

● **عرض از مبدأ خط راست:** به محل برخورد خط با محور y ها (عرض ها)، عرض از مبدأ خط می گویند. برای پیدا کردن عرض از مبدأ یک خط راست، کافی است در معادله آن خط $x = 0$ را قرار دهیم و مقدار y را پیدا کنیم. مثلاً:

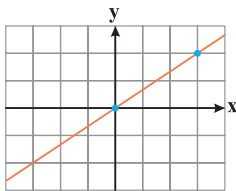
$$2y + 3x = 24 \xrightarrow{x=0} 2y + 3 \times 0 = 24 \Rightarrow 2y = 24 \Rightarrow y = 12$$

بنابراین عرض از مبدأ خط $2y + 3x = 24$ برابر ۱۲ است.

نکته اگر معادله خط به صورت استاندارد ($y = ax + b$) باشد، عرض از مبدأ خط برابر با b است. مثلاً:

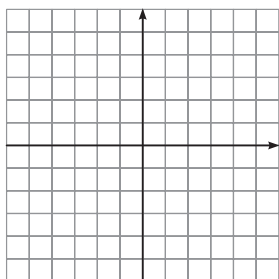
$$-2y - x = 1 \Rightarrow -2y = x + 1 \xrightarrow{\div (-2)} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

بنابراین عرض از مبدأ این خط $-\frac{1}{2}$ است.



(همهانگ خوزستان - ۱۴۰۰)

۵۷۹ در شکل مقابل شیب خط را تعیین کنید.



قطع $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(همهانگ کشوری - ۱۴۰۳)

می کند.

ب آیا این خط از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ می گذرد؟

(همهانگ گلستان - ۱۴۰۲)

۵۸۱ معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

(همهانگ خارج از کشور - ۱۴۰۳)

۵۸۲ معادله خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۵۸۳ نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف معادله خط گذرنده از این نقطه و موازی محور طول ها را بنویسید.

ب معادله خط گذرنده از این نقطه و موازی محور عرض ها را بنویسید.

۵۸۴ اگر خطوط $2y - (a+1)x = 6$ و $2ax + 3y = a + 6$ موازی باشند، ابتدا عدد a و سپس شیب و عرض از مبدأ هر خط را به دست آورید.

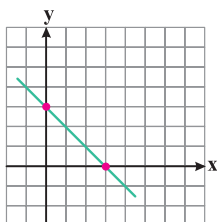
۵۸۵ خط $y = ax + b$ را در هریک از حالت های زیر به صورت کلی رسم کنید.

الف $a < 0, b < 0$

ب $a > 0, b < 0$

پ $a < 0, b > 0$

ت $a > 0, b > 0$



۵۸۶ خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۵۸۷ با توجه به شکل مقابل:

الف معادله خط d را بنویسید.

ب معادله خطی را بنویسید که موازی خط d باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

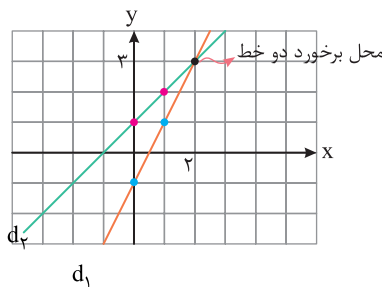
درس سوم: دستگاه معادله های خطی



دو خط d_1 و d_2 را در نظر بگیرید. می خواهیم مختصات نقطه برخورد این دو خط را پیدا کنیم. برای این منظور، دو روش کلی وجود دارد؛ یکی رسم دقیق دو خط و پیدا کردن مختصات محل برخورد و دیگری روش جبری (حل دستگاه معادله های خطی).

۱ رسم دقیق دو خط: اگر یک صفحه شطرنجی داشته باشیم و بتوانیم با یک خط کش، هر خط را به طور دقیق رسم کنیم، می توانیم مختصات محل برخورد دو خط را پیدا کنیم. مثلاً برای پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط $d_1: 2x - y = 1$ و $d_2: y = x + 1$ از طریق رسم داریم:

$$\begin{array}{l} d_1: 2x - y = 1 \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \\ \\ d_2: y = x + 1 \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \end{array}$$



همان طور که مشاهده می شود، مختصات محل برخورد دو خط، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ است.

۲ حل دستگاه معادله‌های خطی: دستگاه معادله‌های خطی به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{cases} \text{معادله یکی از خط‌ها} \\ \text{معادله خط دیگر} \end{cases}$$

با حل دستگاه معادله‌های خطی، مقداری (یا مقادیری) برای x و y به دست می‌آید که در هر دو معادله خط صدق می‌کند؛ یعنی مختصات نقطه (یا نقاط) برخورد دو خط به دست می‌آید. برای حل دستگاه معادله‌های خطی (که دستگاه دو معادله و دو مجهول نیز نامیده می‌شود) دو روش وجود دارد، یکی روش جایگزینی و دیگری روش حذفی.

الف روش جایگزینی: در این روش، معادله یکی از خط‌ها را به صورت استاندارد می‌نویسیم و مقدار y در آن را (که بر حسب x است) در معادله دیگر جایگزین می‌کنیم تا یک معادله بر حسب x به دست آید. با حل این معادله مقدار x به دست می‌آید و در نهایت با جای‌گذاری x در یکی از معادله‌های اولیه، مقدار y را می‌یابیم. مثلاً برای پیدا کردن محل برخورد دو خط $d_1: 2x - y = 1$ و $d_2: y = x + 1$ از طریق حل دستگاه معادله‌های خطی به روش جایگزینی داریم:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

این معادله استاندارد هست و نیازی به استاندارد کردن ندارد. $\rightarrow y = x + 1$

حالا به جای y در معادله بالایی، مقدار $y = x + 1$ از معادله پایینی را جایگزین می‌کنیم:

$$2x - (x + 1) = 1 \Rightarrow 2x - x - 1 = 1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

در نهایت مقدار x را در یکی از معادله‌های اولیه جایگزین می‌کنیم تا مقدار y به دست آید:

$$y = x + 1 \xrightarrow{x=2} y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین مختصات نقطه برخورد دو خط داده شده $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ است.

ب روش حذفی: در این روش، دو معادله خط را طوری می‌نویسیم که متغیرهای x و y در سمت چپ و اعداد ثابت در سمت راست قرار گیرند. همچنین معادله‌ها را طوری می‌نویسیم که متغیرهای x ، زیر هم و متغیرهای y نیز زیر هم قرار گیرند. هدف این است که ضریب یکی از متغیرها در دو معادله، قرینه شود. برای این منظور ممکن است نیاز باشد طرفین معادله‌ها را در اعدادی ضرب کنیم. بعد از ساختن متغیرهای قرینه در دو معادله، طرفین معادله‌ها را با هم جمع می‌کنیم و در این جمع کردن، متغیرهای قرینه، ساده (حذف) می‌شوند و از حل معادله حاصل، مقدار یکی از متغیرها به دست می‌آید. با جایگزین کردن مقدار متغیر به دست آمده در یکی از معادله‌های اولیه، مقدار متغیر دیگر به دست می‌آید. مثلاً محل برخورد دو خط $d_1: 2x - y = 1$ و $d_2: y = x + 1$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{قرینه‌اند}} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

چون از همان ابتدا متغیرهای قرینه وجود دارند، نیاز نیست طرفین معادله‌ها را در عددی ضرب کنیم؛ بلکه کافی است طرفین دو معادله را با هم جمع کنیم.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$2x - x = 1 + 1 \Rightarrow x = 2$$

حال مقدار $x = 2$ را در یکی از معادله‌های اولیه (مثلاً $2x - y = 1$) جایگزین می‌کنیم تا مقدار y به دست آید:

$$2x - y = 1 \xrightarrow{x=2} 2 \times 2 - y = 1 \Rightarrow 4 - y = 1 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین مختصات نقطه برخورد دو خط داده شده $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ است.

مثال هریک از دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

الف $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$
(روش جایگزینی)

ب $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$
(رسم شکل)

پ $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y - x = -4 \end{cases}$
(روش حذفی)

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۶۰۰ دستگاه‌های معادله‌های خط زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

- | | | | |
|--|---|---|---------------------------------|
| <p>الف $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$
(روش حذفی)</p> | <p>(هماهنگ قزوین - ۱۴۰۰)</p> | <p>ب $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$
(روش ترسیمی)</p> | <p>(هماهنگ کردستان - ۱۴۰۰)</p> |
| <p>پ $\begin{cases} -2x + y = 6 \\ 4x - 6y = 4 \end{cases}$
(روش جایگزینی)</p> | <p>(هماهنگ ایلام - ۱۴۰۱)</p> | <p>ت $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$
(روش ترسیمی)</p> | <p>(هماهنگ بوشهر - ۱۴۰۱)</p> |
| <p>ث $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$
(روش جایگزینی)</p> | <p>(هماهنگ چهارمحال و بختیاری - ۱۴۰۱)</p> | <p>ج $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
(روش حذفی)</p> | <p>(هماهنگ کرمانشاه - ۱۴۰۱)</p> |

۶۰۱ دستگاه‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

- | | | | |
|---|------------------------------------|---|---------------------------------------|
| <p>الف $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -x - 5y = 9 \end{cases}$</p> | <p>(هماهنگ خراسان رضوی - ۱۴۰۳)</p> | <p>ب $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$</p> | <p>(هماهنگ آذربایجان شرقی - ۱۴۰۲)</p> |
| <p>پ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$</p> | <p>(هماهنگ گیلان - ۱۴۰۳)</p> | <p>ت $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x + 8y = -15 \end{cases}$</p> | <p>(هماهنگ همدان - ۱۴۰۲)</p> |

۶۰۲ مجموع سن آرش و پدرش ۵۹ سال و اختلاف سن آن‌ها ۲۷ سال است. سن هر کدام از آن‌ها را با تشکیل دستگاه معادلات خطی و حل آن به دست آورید.

۶۰۳ سن علی دو برابر سن خواهرش است. اگر مجموع سن آن‌ها ۲۴ سال باشد، سن هریک را با تشکیل دستگاه معادلات خطی به دست آورید.

(هماهنگ کهگیلویه و بویراحمد - ۱۴۰۱)

۶۰۴ مجموع قیمت یک انبه و یک نارگیل ۴۲۰۰۰ تومان است. اگر قیمت ۲ نارگیل از ۳ انبه ۶۰۰۰ تومان کمتر باشد، قیمت هر انبه و هر نارگیل چند تومان است؟

(هماهنگ اصفهان - ۱۴۰۲)

۶۰۵ دو خط $2x - 3y = 6$ و $4x - 6y = 12$ چند نقطه برخورد دارند؟

(هماهنگ کهگیلویه و بویراحمد - ۱۴۰۲)

۶۰۶ x و y را طوری بیابید که تساوی $3^{x+y-1} = 2^{2x-y-2}$ برقرار باشد.

(راهنمایی: از قوانین توان و دستگاه دو معادله و دو مجهول کمک بگیرید.)

۶۰۷ مصرف برق کولر گازی تولیدی یک کارخانه، سه برابر مصرف برق کولر آبی تولیدی همان کارخانه می‌باشد.

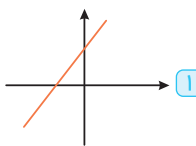
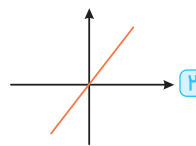
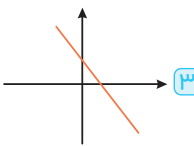
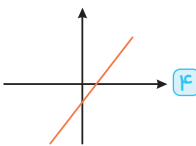
(هماهنگ گیلان - ۱۴۰۳)

اگر به طور هم‌زمان، دو کولر آبی و یک کولر گازی روشن باشند، ده کیلووات برق مصرف می‌شود. با تشکیل دستگاه معادلات خطی، میزان مصرف برق هر کدام از این دو دستگاه را مشخص نمایید.





آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون فصل ۶	خط و معادله‌های خطی	مدت زمان: ۷۵ دقیقه	بارم
۶۰۸	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x - 1$ قرار دارد. ☐ ب) عرض از مبدأ خط $y = 2x + 3$ عدد -3 است. ☐ پ) دو خط $y = -5x - 6$ و $y = 6 + 10x + 2y$ با هم موازی‌اند. ☐ ت) خط $y = 5$ موازی محور عرض‌هاست. ☐	(هماهنگ سیستان و بلوچستان - ۱۴۰۲) (هماهنگ خوزستان - ۱۴۰۱) (هماهنگ اردبیل - ۱۴۰۱) (هماهنگ آذربایجان غربی - ۱۴۰۱)	۱	
۶۰۹	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) در معادله خط $y = 3x + 5$ عدد ۳ را می‌نامند. ب) عرض از مبدأ خط در معادله $y = 4x - 1$ عدد است. پ) خط $x = 4$ موازی محور است. ت) شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، برابر با است.	(هماهنگ خراسان رضوی - ۱۴۰۰) (هماهنگ کرمانشاه - ۱۴۰۱) (هماهنگ خراسان شمالی - ۱۴۰۱) (هماهنگ خارج از کشور - ۱۴۰۳)	۱	
۶۱۰	گزینه درست را مشخص کنید. الف) شیب خطی مثبت و عرض از مبدأ آن منفی است. این خط از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟ اول ☐ دوم ☐ سوم ☐ چهارم ☐ ب) کدام یک از معادله‌های زیر معادله خطی است که موازی محور طول رسم شده است؟ ۱ $x = 3$ ☐ ۲ $y = -4$ ☐ ۳ $y = -5x - 6$ ☐ ۴ $y = x$ ☐ پ) نمودار خط به معادله $y = 3x - 2$ کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟  ☐  ☐  ☐  ☐ ت) معادله خطی که با خط $y = -7x + \frac{1}{4}$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد: ۱ $y = -7x + 4$ ☐ ۲ $y = -7x$ ☐ ۳ $y = 4x + \frac{1}{4}$ ☐ ۴ $y = \frac{1}{4}x + 4$ ☐	(هماهنگ زنجان - ۱۴۰۲) (هماهنگ اردبیل - ۱۴۰۲) (هماهنگ کشوری - ۱۴۰۳) (هماهنگ گیلان - ۱۴۰۰)	۱	
۶۱۱	به پرسش‌های زیر پاسخ دهید. معادله خطی را بنویسید که با $y = -2x + 3$ موازی بوده و از مبدأ مختصات بگذرد.	(هماهنگ آذربایجان غربی - ۱۴۰۱)	۰/۷۵	

بخش دوم

پاسخ نامه تشریحی

www.gajmarket.com

فصل سوم:
استدلال و اثبات در هندسه

۱۸۶

فصل دوم:
عددهای حقیقی

۱۷۹

فصل اول:
مجموعه ها

۱۷۰

فصل ششم:
خط و معادله های خطی

۲۱۱

فصل پنجم:
عبارت های جبری

۲۰۴

فصل چهارم:
توان و ریشه

۱۹۶

فصل هشتم:
حجم و مساحت

۲۲۸

فصل هفتم:
عبارت های گویا

۲۱۹

درس اول: معرفی مجموعه

فصل اول



۱ ✕

مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.

۲ ✕

اعضای این مجموعه را نمی‌توان به صورت یکتا، مشخص کرد.

۳ ✓

۴ ✕

$$\{1, 2, 5, \sqrt{\cdot}\} = \{1, 2, 5\} \Rightarrow \text{عضو } 3$$

تکراری

۵ ✓

هر کدام، دو عضو دارند.

۶

مجموعه تهی

۷

دو

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$A = \{2, \sqrt{\cdot}, 3, \sqrt{\cdot}\} = \{2, 3\}$$

تکراری تکراری

۸

۸

۹

دو

 همه اعضای مجموعه یا مساوی ۱ هستند یا ۱- که با حذف تکراری‌ها، مجموعه به صورت $\{1, -1\}$ در می‌آید.

۱۰ ۴

$$A = \{\sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}, \sqrt{\cdot}\} \Rightarrow A = \{1, \sqrt{\cdot}, 5, \sqrt{\cdot}, 2, \sqrt{\cdot}\}$$

$$\Rightarrow A = \{1, 5, 2\} \Rightarrow \text{مجموعه‌ای سه عضوی است.}$$

۱۱ ۳

 الف) $\emptyset$ همان $\{\}$ است که یکی از اعضای مجموعه A است. ✓

 ب) توجه کنید که عدد صفر، خودش عضو A نیست، بلکه صفر عضو یک مجموعه است که آن مجموعه عضو A است. ✕
 پ) در مجموعه A عضوی به صورت $\{\emptyset\}$ مشاهده نمی‌شود، پس این مورد درست است. ✓

 توجه کنید که $\{\emptyset\}$ با $\{\emptyset\}$ متفاوت است.

۱۲ ۳

عبارت گزینه «۳» به یک مجموعه صفر عضوی (مجموعه تهی) اشاره دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها

۱ گزینه $\{-1, 0, 1\}$

۲ گزینه $\{7\}$

۴ گزینه $\{-2, -1\}$

۱۳ ۴

۱۴

این پرسش می‌تواند پاسخ‌های مختلفی داشته باشد. مثلاً «مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از یک» یا «مجموعه حروف فارسی دارای بیش از سه نقطه» و ...

۱۵

 این مجموعه به صورت $\{ت, ا, ی, ض, و, ی, ر\}$ خواهد بود که اگر اعضای تکراری را خط بزنیم، به صورت $\{ت, ض, و, ی, ر\}$ در می‌آید. مشاهده می‌شود که این مجموعه دارای ۵ عضو است.

۱۶

 الف) یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون اعضا، دقیقاً مشخص نیستند، مثلاً: $A = \{\text{اصفهان, مشهد, تهران}\}$ یا $B = \{\text{تبریز, رشت, تهران}\}$ ، ...
 همچنین کلمه «پرجمعیت» ممکن است از نظر افراد مختلف، متفاوت باشد.
 ب) یک مجموعه را مشخص می‌کند.

$$C = \{10000, 10002, 10004, \dots, 99996, 99998\}$$

$$D = \{53, 59, 61, 67\}$$

پ) یک مجموعه را مشخص می‌کند.

ت) یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون اعضا، دقیقاً مشخص نیستند.

۱۷

الف) $A = \{\text{ش, ژ, ج, ث, پ}\}$

ب) $B = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\}$

پ) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

ت) $D = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

ث) $E = \{104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302,$

$$311, 320, 401, 410, 500\}$$

توجه کنید که در این مورد، برای پیدا کردن اعضای مجموعه، از روش الگوسازی استفاده کردیم.

ج) $F = \{14, 28, 42, 56\}$

۱۸

الف) مضارب طبیعی و کوچک‌تر از ۳۱ عدد ۵

ب) مجموعه اعداد اول مضرب ۶ (یا هر عبارتی که معادل مجموعه تهی باشد)

پ) مجموعه قرینه اعداد اول یک رقمی

ت) مجموعه اعداد صحیح نامثبت بزرگ‌تر از ۴-

ث) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۵

ج) مجموعه اعداد مکعب کامل بین ۱ تا ۲۰۰

۱۹

الف) $A = \{-1, 12, 0, 3, 4, 8, 5, 2, 14\}$, $B = \{-1, 12, 0, 3, 6, 7, 9\}$,

$$C = \{0, 3, 4, 8, 10, 11\}$$

ب) $-1, 12, 0, 3$

پ) $2, 14, 5$

۷۸

$$A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 3\} \Rightarrow A = \{0^2 - 1, 1^2 - 1, 2^2 - 1, 3^2 - 1\}$$

$x=0, 1, 2, 3$

$$\Rightarrow A = \{-1, 0, 3, 8\}$$

$$B = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

$x=1, 2, 3, 4$

$$\Rightarrow B = \{2(1)+1, 2(2)+1, 2(3)+1, 2(4)+1\}$$

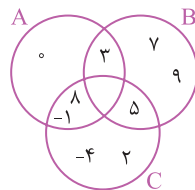
$$\Rightarrow B = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$$

$x=-1, 0, 1, 2, 3$

$$\Rightarrow C = \{3(-1)-1, 3(0)-1, 3(1)-1, 3(2)-1, 3(3)-1\}$$

$$\Rightarrow C = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$$



حال با توجه به نمودار و ن، داریم:

الف $(A \cap B) \cup C = \{3, -1, 8, 5, -4, 2\}$

ب $(B - C) \cap A = \{3\}$

پ $(A \cup C) - B = \{0, -1, 8, -4, 2\}$

ت $(A - B) \cup (B - C) = \{0, -1, 8, 3, 7, 9\}$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

فصل اول



۷۹

احتمال رخ دادن یک پیشامد غیرممکن، صفر است.

۸۰

۸۱

$$\text{تعداد کل حالات} = \underset{\text{تاس}}{6} \times \underset{\text{سکه}}{2} = 12$$

۸۲

اگر ناحیه‌ها را با ۱، ۲، و ۳ نام‌گذاری کنیم، داریم:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \Rightarrow n(S) = 9$$

۸۳

$\frac{1}{6}$

در پرتاب یک تاس سالم، احتمال رو شدن هریک از عددها برابر با $\frac{1}{6}$ است.

۷۵

الف $B - C = \{-12, 3, 5, -1, 10\}$

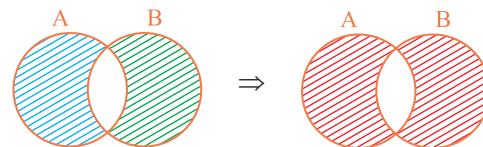
ب $(A \cap B) \cap (C - B) = \{5, -1, 6\} \cap \{4, 11, -8\} = \{\}$

پ $(C \cap A) - (B - A) = \{6\} - \{3, 9, 17, 10, -12\} = \{6\}$

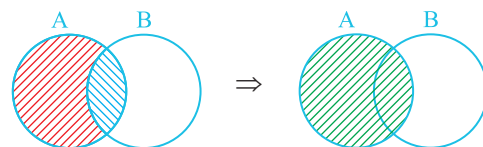
ت $(B \cap C) - A = \{9, 17, 6\} - \{5, -1, 6\} = \{9, 17\}$

۷۶

الف $(A - B) \cup (B - A)$



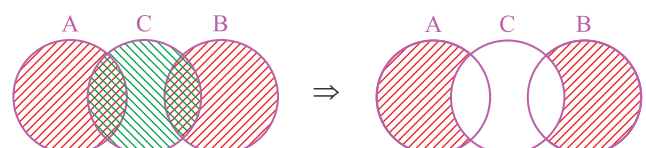
ب $(A - B) \cup (A \cap B)$



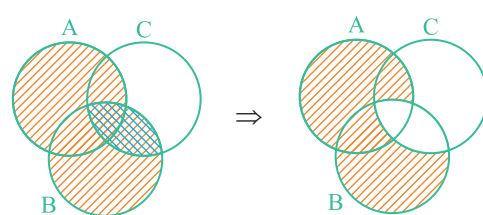
پ $(B \cap A) - C$



ت $(A \cup B) - C$



ث $(A \cup B) - (B \cap C)$



۷۷

الف $B - A$

ب $A - B$

پ $(A \cup B) - C$

ت $(A \cap B) \cup (C - B)$ یا $A \cup (C - B)$

ث $B - (A \cup C)$

ج $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

چ $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

۸۴

$$\frac{5}{16}$$

$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$A = \{(پ, پ, پ, د), (پ, پ, د, پ), (پ, د, پ, پ), (د, پ, پ, پ), (پ, پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{16}$$

۸۵

$$\frac{1}{4}$$

$$\text{کل حالت‌ها} : \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = 4$$

$$1 = \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \Rightarrow \{(ر, ر)\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{1}{4}$$

۸۶

$$\frac{1}{2}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

$$A = \{(ر, پ), (پ, ر)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۸۷

$$\frac{1}{4}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

$$A = \{(ر, پ)\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

۸۸

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

۸۹

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 6$$

$$2 = \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \Rightarrow \{4, 6\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۹۰

$$n(S) = 6 \times 2 = 12$$

$$A = \{(1, ر), (2, ر)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۹۱

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 6 \times 6 = 36$$

$$\text{حالت‌های مطلوب} : \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3),$$

$$(3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = 9$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۹۲

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۹۳

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\text{حالت‌های مطلوب} = \{(د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, د)\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{3}{8}$$

۹۴

هر فرزند، با احتمال $\frac{1}{4}$ ممکن است دختر باشد و با احتمال $\frac{1}{4}$ ممکن است پسر باشد و این موضوع ارتباطی به تعداد یا جنسیت فرزندان دیگر ندارد.

۹۵

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$A = \{(ر, ر, ر), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۹۶

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\text{الف} \quad A = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(توجه کنید که حداقل دو پسر، یعنی دو پسر یا سه پسر داشته باشد.)

$$\text{ب} \quad B = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو پیشامد A و B هم‌شانس هستند.)

$$\text{پ} \quad C = \{(د, پ, د), (پ, د, د)\} \Rightarrow n(C) = 2$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۹۷

$$S = \{21, 22, 23, \dots, 39, 40\} \Rightarrow n(S) = 20$$

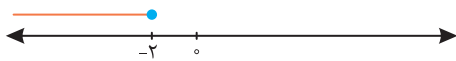
$$\text{الف} \quad A = \{25, 30, 35, 40\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ب} \quad B = \{24, 27, 30, 33, 36, 39\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

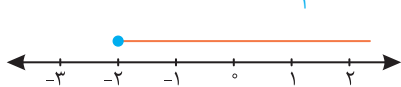
ت $3(2+3x) \leq 5x-2 \Rightarrow 6+9x \leq 5x-2 \Rightarrow 9x-5x \leq -2-6$
 $\Rightarrow 4x \leq -8 \Rightarrow x \leq -2$



ث $\frac{x-3}{5} \leq \frac{x}{2} \xrightarrow{[5,2]=10} \frac{2}{10} \times (x-3) \leq \frac{5}{10} \times (x)$

$\Rightarrow 2(x-3) \leq 5x \Rightarrow 2x-6 \leq 5x$

$\Rightarrow 2x-5x \leq 6 \Rightarrow -3x \leq 6 \Rightarrow x \geq -\frac{6}{3} \Rightarrow x \geq -2$



درس اول: معادله خط

فصل ششم



۵۲۳

این عبارت یک معادله خط است و هر چند بی شمار جواب دارد، اما این جواب‌ها ارتباط خاصی با هم دارند؛ مثلاً اگر به x مقدار صفر را بدهیم، به y فقط باید مقدار -3 بدهیم تا تساوی جبری برقرار شود. اما اگر یک تساوی جبری، اتحاد باشد، به ازای هر مقدار دلخواهی برای متغیر یا متغیرهایش، به تساوی عددی تبدیل می‌شود.

۵۲۴

$y = 3x - 1 \xrightarrow{0} 0 = 3 \times 0 - 1 \Rightarrow 0 \neq -1$

۵۲۵

$x - 2y = 3 \xrightarrow{\frac{x=1}{y=-2}} 1 - 2(-2) \neq 3$

۵۲۶

در رابطه خطی توان هر یک از متغیرها صفر یا ۱ است و متغیر در مخرج قرار ندارد.

۵۲۷

اگر طول ضلع مربع را با a و مساحت آن را با S نمایش دهیم، داریم:

$S = a^2$

این رابطه، خطی نیست چون متغیر از درجه ۲ دارد.

۵۲۸

اگر محیط مربع را با y و طول ضلع آن را با x نشان دهیم، داریم:

$y = 4x$

۵۲۹

$y = -4x + 1 \xrightarrow{x=2} y = -4 \times 2 + 1 = -7 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

۵۱۷

به کمک اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$101 \times 99 = (100+1)(100-1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

۵۱۸

X = درجه نسبت به

Z = درجه نسبت به X و $3+2=5$

۵۱۹

الف $(3x+2)(3x-2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$

ب $(3-2x)^2 = (3)^2 - 2 \times 3 \times (2x) + (2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$

پ $(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$

ت $(8x - \frac{1}{3})^2 = 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$

ث $(4-y)(4+y) = 16 - y^2$

ج $(x-7)(x+4) = x^2 - 3x - 28$

۵۲۰

الف $(5x-2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

ب $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + x + \frac{1}{16}$

پ $(4a-2b)^2 = (4a)^2 - 16ab + (2b)^2 = 16a^2 - 16ab + 4b^2$

۵۲۱

الف $x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $-4-3 \quad (-4) \times (-3)$

ب $ax^2 - a = a(x^2 - 1) = a(x-1)(x+1)$

پ $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

ت $t^2 + 20t + 91 = (t+13)(t+7)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $13+7 \quad 13 \times 7$

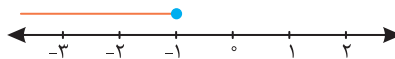
ث $x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$

۵۲۲

الف $3(x+2) - 6x \geq 7 - 2x \Rightarrow 3x + 6 - 6x \geq 7 - 2x$

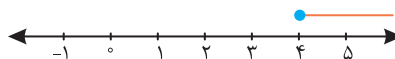
$\Rightarrow -3x + 6 \geq 7 - 2x \Rightarrow -3x + 2x \geq 7 - 6$

$\Rightarrow -x \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$



ب $3(x-1) \geq 2x+1 \Rightarrow 3x-3 \geq 2x+1$

$\Rightarrow 3x-2x \geq 3+1 \Rightarrow x \geq 4$



پ $4x+5 \leq 3x-1 \Rightarrow 4x-3x \leq -1-5 \Rightarrow x \leq -6$



۶۰۴

 قیمت انبه را با x و قیمت نارگیل را با y نشان می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x + y = 42000 \\ 3x - 2y = 6000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 84000 \\ 3x - 2y = 6000 \end{cases} \Rightarrow 5x = 90000 \Rightarrow x = 18000$$

$$x + y = 42000 \xrightarrow{x=18000} y = 24000$$

پس هر انبه ۱۸۰۰۰ و هر نارگیل ۲۴۰۰۰ تومان است.

۶۰۵

معادله خط دوم از ضرب طرفین معادله خط اول در یک عدد ثابت به دست آمده است. پس دو معادله، نشان‌دهنده یک خط هستند و به عبارتی دو خط بر هم منطبق‌اند و در نتیجه بی‌شمار نقطه مشترک دارند.

۶۰۶

با توجه به اینکه دو عدد ۲ و ۳ نسبت به هم اول هستند، این تساوی تنها در صورتی می‌تواند برقرار باشد که هم توان ۲ و هم توان ۳ برابر با صفر باشد:

$$2x - y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - y = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x + y = 1 \xrightarrow{x=1} y = 0$$

۶۰۷

 x = مصرف کولر آبی و y = مصرف کولر گازی

$$\begin{cases} y = 3x \\ 2x + y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{روش جایگذاری}} \begin{cases} y = 3x \\ 2x + 3x = 10 \end{cases} \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2, y = 3 \times 2 = 6$$

آزمون جمع‌بندی فصل

فصل ششم



۶۰۸

$$y = 3x - 1 \xrightarrow{x=2} y = 3(2) - 1 \Rightarrow y = 5 \neq 4$$

الف ✗

ب ✗

عرض از مبدأ این خط، ۳+ است.

پ ✓

$$\begin{cases} y = -5x - 6 \Rightarrow \text{شیب} = -5 \\ 10x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = -10x + 6 \Rightarrow y = -5x + 3 \Rightarrow \text{شیب} = -5 \end{cases}$$

ت ✗

این خط موازی محور طول‌هاست.

۶۰۹

عرض‌ها

ب -۱

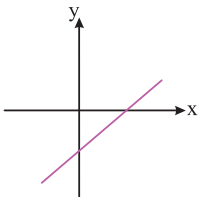
الف شیب خط

$$\text{شیب} = \frac{-2 - (-4)}{2 - 3} = \frac{2}{-1} = -2$$

ت -۲

۶۱۰

الف گزینه «۲» این خط در دستگاه مختصات به صورت شکل زیر خواهد بود:



ب گزینه «۲»

 خطوط به صورت «عدد ثابت y » موازی محور طول‌ها هستند.

ب گزینه «۴»؛ شیب خط مثبت و عرض از مبدأ منفی است، پس نمودار آن به شکل گزینه «۴» است.

$$y = 3x - 2$$

↑ عرض از مبدأ شیب

ت گزینه «۱»

 شیب خط جدید باید -۷ باشد، پس معادله آن به صورت $y = -7x + b$

 است. حال با توجه به اینکه خط از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، عرض از مبدأ آن ۴

 است، پس $b = 4$ و معادله خط $y = -7x + 4$ است.

۶۱۱

$$y = -2x \xrightarrow{\text{گذرنده از مبدأ}} \text{شیب} = -2$$

۶۱۲

$$y = ax + b \Rightarrow y = -4x + 2$$

$$\text{شیب} = -4 \quad \text{عرض از مبدأ} = +2$$

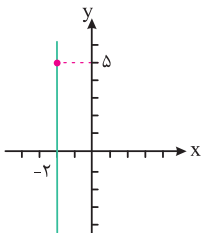
۶۱۳

 معادله این خط باید به صورت «عدد ثابت x » باشد که در آن، عدد ثابت

همان طول نقطه داده شده است؛ پس

 معادله خط مورد نظر $x = -2$ است و

شکل آن به صورت مقابل است:

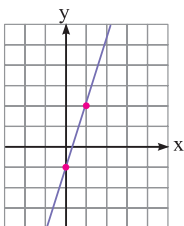


۶۱۴

$$\text{عرض از مبدأ} = -1$$

$$\text{شیب} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow y = 3x - 1$$

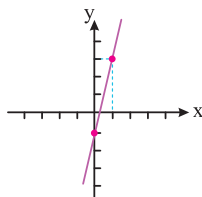


۶۱۵

x	۰	۱
y	-۱	۳
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

-۱ عرض از مبدأ

$$\text{شیب} = \frac{3 - (-1)}{1 - 0} = 4$$



بخش سوم

آزمون‌های پایان نوبت

www.gajmarket.com

آزمون پایان نوبت اول:

دی ماه (۲)

۲۳۸

آزمون پایان نوبت اول:

دی ماه (۱)

۲۳۶

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت

اول: دی ماه (۲)

۲۵۰

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت

اول: دی ماه (۱)

۲۴۹

آزمون پایان نوبت دوم:

خرداد ماه (۳)

۲۴۶

آزمون پایان نوبت دوم:

خرداد ماه (۲)

۲۴۳

آزمون پایان نوبت دوم:

خرداد ماه (۱)

۲۴۰

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت

دوم: خرداد ماه (۳)

۲۵۵

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت

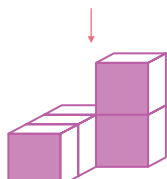
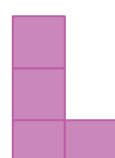
دوم: خرداد ماه (۲)

۲۵۳

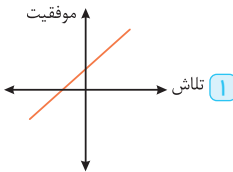
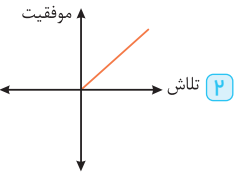
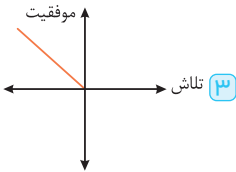
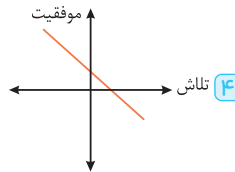
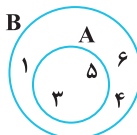
پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت

دوم: خرداد ماه (۱)

۲۵۲

بارم	مدت زمان: ۹۰ دقیقه	هماهنگ کشوری - ۱۴۰۴ (۱)	آزمون پایان نوبت دوم (۱)	ردیف
۱		درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) $Q \cap Q' = \emptyset$ ☐ ب) محل برخورد ارتفاع‌های یک مثلث، همواره درون مثلث است. ☐ پ) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$ ☐ ت) اگر $a - b = 1$ در این صورت $a > b$. ☐	۱	
۱		جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $A = \{5, 2, 5, 2\}$ باشد آنگاه $n(A) = \dots$ ب) درجه $5x^2y^3z$ نسبت به متغیر y برابر $\dots$ است. پ) وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود حداقل مقدار یکی از آنها $\dots$ است. ت) خطی به معادله $y = 3$ موازی محور $\dots$ است.	۲	
۱		گزینه درست را مشخص کنید. الف) کدام یک از عبارت‌های زیر «عبارت گویا» نیست؟ $\frac{1}{x}$ (۱) $3x^2 + 4x$ (۲) $\sqrt{x}$ (۳) 8 (۴) ب) حجم کره‌ای به شعاع R با $\dots$ برابر است. $4\pi R^2$ (۱) $2\pi R^2$ (۲) $\frac{2}{3}\pi R^3$ (۳) $\frac{4}{3}\pi R^3$ (۴) پ) هزینه استفاده از دو نوع خط تلفن برحسب ساعت در نمودار زیر داده شده است. با توجه به نمودار زیر تا چه ساعتی هزینه استفاده از خط دو کمتر از یک است؟ هزینه خط دو خط یک ساعت ۴ (۱) ۱۰ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ت) اگر حجم داده شده را از بالا نگاه کنید. چه شکلی دیده می‌شود؟   (۱)  (۲)  (۳)  (۴)	۳	

۴	به پرسش‌های زیر پاسخ دهید. با توجه به نمودار ون داده شده: الف) تساوی‌ها را کامل کنید. $A - B = ?$ ب) به جای $\square$ یکی از نمادهای $(\in, \notin, \subseteq, \varnothing)$ را قرار دهید. پ) اعضای مجموعه C، شامل اعداد طبیعی بین ۲ و ۱- را بنویسید.	۰/۷۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵
۵	در چرخنده مقابل چقدر احتمال دارد عقربه روی مضرب‌های عدد ۳ بایستد؟ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = ?$	۰/۵
۶	الف) اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{3}$ باشد. آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید. ب) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر برابر است؟ چرا؟	۰/۷۵ ۰/۵
۷	در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس‌اند، نشان دهید BC و AD برابرند. الف) ب) دو مثلث ABC و DEF متشابه‌اند. با توجه به اندازه‌های داده شده، تساوی‌های زیر کامل کنید.	۰/۷۵ ۰/۵
۸	الف) حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. ب) مخرج کسر زیر را گویا کنید.	۰/۵ ۰/۷۵ ۰/۵

ردیف	آزمون پایان نوبت دوم (۲)	هماهنگ کشوری - ۱۴۰۴ (۲)	مدت زمان: ۹۰ دقیقه	بارم	
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) مجموعه اعداد صحیح، زیرمجموعه اعداد گویا است. ☐ ب) $\frac{3}{14}$ عددی گنگ است. ☐ پ) سه برابر 3^{-2} برابر است با 3^{-3} ☐ ت) اگر $a + b > 0$ آن‌گاه، a و b هر دو مثبت‌اند. ☐	۱			
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد می‌گوییم. ب) خط $x = 2$ موازی محور است. پ) مساحت رویه یک کره به شعاع R از دستور به دست می‌آید. ت) با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن پدید می‌آید.	۱			
۳	گزینه درست را مشخص کنید. الف) درجه $2a^3b^2 - 4a^2b^3$ نسبت به متغیر a برابر است. ب) کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند گسترده کلاه تولد مخروطی شکل روبه‌رو باشد؟ پ) کدام یک از عبارت‌های گویای زیر را می‌توان ساده کرد؟ ت) کدام یک از نمودارهای زیر رابطه تلاش و موفقیت یک دانش‌آموز را برای پیشرفت تحصیلی نشان می‌دهد؟	۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸	     $\frac{2a-2b}{a-b}$ ☐ $\frac{a+5}{b+5}$ ☐ $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ ☐ $\frac{3a+4}{3a}$ ☐    		
۴	به پرسش‌های زیر پاسخ دهید. الف) در نمودار ون داده شده مجموعه $A - B$ را هاشور بزنید. ب) پ)	 $A \cap B = \{ \quad \}$ $n(A \cup B) =$	۱		
۵	۵ کلاس پایه هفتم، ۴ کلاس پایه هشتم و ۳ کلاس پایه نهم از دبیرستان خلیج فارس در یک اردوی تفریحی شرکت کرده‌اند. قرار است تمامی کارهای اردو با مشارکت دانش‌آموزان به صورت قرعه‌کشی انجام شود. برای تعیین تیم برپاکننده چادرها، چقدر احتمال دارد یک کلاس پایه نهم انتخاب شود؟		۰/۷۵		

آزمون پایان نوبت دوم، خرداد ماه (۱)

پاسخ نامه



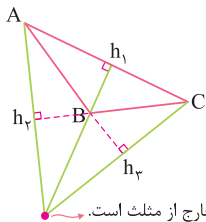
۱۴

۱

الف ✓

ب ✗

مثال نقض:



محل برخورد ارتفاعها خارج از مثلث است.

$$6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

ب ✗

ت ✓: اگر $a - b = 1$ باشد یعنی a به اندازه یک واحد بیشتر از b است، پس $a > b$.

۲

الف

عضوهای تکراری در مجموعه شمارش نمی شوند.

ب

پ صفر

ت طولها (ها)

۳

الف گزینه «۳»: صورت و مخرج یک عبارت گویا باید چند جمله ای باشد و $\sqrt{x}$ چند جمله ای نیست.

ب گزینه «۴»

پ گزینه «۱»: با توجه به نمودار، مشاهده می شود خط دو پایین تر از خط یک قرار دارد یعنی تا ۴ ساعت هزینه استفاده از خط دو کمتر از خط یک است.

ت گزینه «۲»

۴

الف $A \cap B = \emptyset$

$A - B = \{1, 2\}$

ب $5 \in A \cup B$

پ $C = \{1\}$

۵

$S = \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$

$A = \{3, 6\}$ = مضرب های عدد ۳ روی چرخنده

$\Rightarrow n(A) = 2$

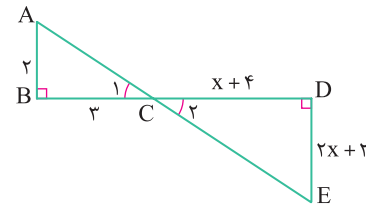
$\Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

۶

الف $|2a - b| = \frac{a = \frac{1}{2}}{b = \sqrt{3}} \quad |2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}| = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$
منفی

ب $A = \{0, 1, 2, 3\}$

چون مجموعه نشان داده شده روی شکل شامل اعداد گنگ و گویا نیست.



$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{2}{2x+2} = \frac{3}{x+4} \Rightarrow 2(x+4) = 3(2x+2) \\ \Rightarrow 2x+8 = 6x+6 \Rightarrow 2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۱۵

دو متوازی الاضلاع متشابهند، پس داریم:

نسبت اضلاع کوچک = نسبت اضلاع بزرگ

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1+x+3} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+1) = (x-1)(2x+2)$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+1) = 2(x-1)(x+1) \Rightarrow x+1 = 2x-2 \Rightarrow x = 3$$

۱۶

الف $(\frac{3}{5})^7 \times (\frac{5}{3})^{-2} = (\frac{3}{5})^7 \times (\frac{3}{5})^2 = (\frac{3}{5})^{7+2} = (\frac{3}{5})^9$

ب $(\frac{2}{3})^7 \div (\frac{3}{2})^{-4} = (\frac{2}{3})^7 \times (\frac{2}{3})^4 = (\frac{2}{3})^{7+4} = (\frac{2}{3})^{11}$

۱۷

الف کیلومتر $384000 = 384000 \div 1000 = 384 \times 10^3 = 384 \times 10^5 \times 10^{-2} = 384 \times 10^5 \times 10^{-2} = 384 \times 10^3$
حالا از آنجا که هر کیلومتر برابر با 10^3 متر است، داریم:

متر $384 \times 10^5 \times 10^3 = 384 \times 10^8 = 384 \times 10^5 \times 10^3$

ب $\frac{25 \times 12 \times 10^3}{3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-8}} = \frac{25 \times 12 \times 10^{-1} \times 10^3}{3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-1} \times 10^{-8}} = \frac{25 \times 12 \times 10^2}{12 \times 10^{-11}} \\ = 25 \times 10^2 - (-11) = 25 \times 10 \times 10^{12} = 25 \times 10^{13}$

۱۸

الف $2/54 \times 10^{-15} < 2/53 \times 10^{-14}$
 $10^{-15} < 10^{-14}$

ب $702/3 \times 10^{-5} > 93/04 \times 10^{-6}$
 $702/3 \times 10^{-3} > 93/04 \times 10^{-5}$
 $10^{-3} > 10^{-5}$

۱۹

الف $\sqrt[3]{9} \times 4\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{9 \times 3} = 4\sqrt[3]{27} = 4 \times 3 = 12$

ب $5\sqrt{2} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - \sqrt{9 \times 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

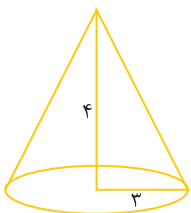
ب $\frac{x^2+4x+3}{x+1} \times \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)} \times \frac{(x+2)}{(x+3)} = x+2$

ب $p = \frac{5}{x} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x} = \frac{12}{x}$

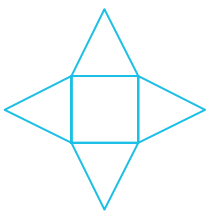
$$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 24 \\ + x^2 - 7x \\ \hline 2x^2 - 12x - 24 \\ + 2x^2 - 14 \\ \hline -10 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-7 \\ x+2 \end{array}$$

شعاع توپ: $r = 20 \div 2 = 10 \text{ cm}$

$S = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2$



ب $V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$



آزمون پایان نوبت دوم، خرداد ماه (۲)

پاسخ نامه



۱

الف

ب

$3/14 = \frac{314}{100} \in \mathbb{Q}$

دقت کنید ۳/۱۴ عددی گویا است ولی π عددی گنگ است.

$3 \times 3^{-2} = 3 \times \frac{1}{3^2} = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$

ب

ت

مثال نقض: اگر $a = +3$ و $b = -2$ باشد: $a + b = 3 + (-2) = 1 > 0$

۷

الف $\begin{cases} \hat{B} = \hat{A} = 90^\circ \\ OA = OB \text{ (شعاع)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow BC = AD$
(ض ز)

ب $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{\lambda}{y} \Rightarrow y = 16$

زاویه‌ها در مثلث‌های متشابه برابرند. $\hat{A} = 31^\circ$

۸

الف $A = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 2$

$B = (\sqrt{48} - \sqrt{27}) = \sqrt{16 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

ب $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

۹

الف مخروط

الف $(x+4)^2 - 8x = x^2 + 8x + 16 - 8x = x^2 + 16$

ب $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$

ب $-3x - 4 \leq 11 \Rightarrow -3x \leq 11 + 4 \Rightarrow -3x \leq 15 \xrightarrow{\div -3} x \geq -5$
تغییر جهت

۱۰

الف $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

شیب خط $= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{3-1} = 1$

ب می‌دانیم معادله خط برابر $y = ax + b$ است که در آن a برابر با شیب خط و b عرض از مبدأ است. با توجه به نمودار و قسمت «الف»:

$a = 1, \quad b = 1$

$\Rightarrow y = x + 1$

ب هر نقطه روی محور عرض‌ها، طولی برابر صفر دارد، پس در خط داده شده x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$y = 5x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -3 \Rightarrow \text{نقطه برخورد} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

۱۱

الف $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$
 $2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$x - y = 1 \xrightarrow{x=2} 2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$

۱۲

الف $\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$

یعنی عبارت داده شده به ازای $x = 8$ و $x = 0$ تعریف نشده است.