مقدمه

تقدیم به همسر عزیزم

به جای آنکه چندین کتاب بخوانید،
کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

اهمیت کتاب ریاضی(۲) در کنکور تجربی چه از نظر تعداد سؤالات و چه از نظر مباحثی که در این کتاب وجود دارد و معمولاً نقطهٔ ضعف داوطلبان رشته تجربی در کنکور است بر کسی پوشیده نیست. از طرفی تغییر رویکرد طراحان کنکور به سمت مفهومی شدن سؤالات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان باید رویهٔ جدید و مطمئنی را برای آماده‌سازی در پیش بگیرند.

کتابی که پیش روی شماست با در نظر گرفتن تمامی موارد فوق آماده شده است که ویژگی‌های کلی کتاب به صورت زیر است:

۱ درسنامه‌های جامع، روان و مهندسی شده که خط به خط کتاب درسی را به‌طور کامل مدنظر قرار داده و تمام تمرین‌های کتاب در آن بررسی شده است تا شما خط فکری طراحان و چگونگی استخراج تست‌های کنکور از کتاب درسی را بفهمید و یاد بگیرید که طراحان چگونه،تمرینات و مفاهیم کتاب را عمیق‌تر و پیچیده‌تر در تست‌های کنکور به‌کار می‌گیرند.

۲ تست‌های کتاب با چینش آسان به سخت و توجه به کنکورهای سراسری در نظام جدید که با هر سطح علمی می‌توانید از این کتاب به‌عنوان منبع اول و آخر استفاده کنید و قدم به قدم خود را به سطح ایده‌آل برسانید.

۳ پاسخ‌های واقعاً تشریحی، دقیق و آموزش‌محور که علاوه بر ارائهٔ راه‌حل، مسیر استدلال و تفکر را نیز به شما آموزش می‌دهد.

۴ یک نوآوری بی‌سابقه در ایران که با حل ویدیویی تک‌تک سؤالات سعی کردم آموزش از نوشتار فراتر رفته و به تجربه‌ای دیداری، تعاملی و کامل تبدیل شود. با دیدن ویدیوی حل سؤالات، نحوهٔ پاسخگویی به آن‌ها را در یک فضای واقعی تجربه خواهید کرد و یاد می‌گیرید چگونه و از کجا شروع به حل سؤال کنید و سرعت خود را در حل بالا ببرید. با این ویژگی باید گفت **«به جای آنکه چندین کتاب بخوانید، این کتاب را چندین بار بخوانید و چندین بار ببینید.»**

در انتها تشکر ویژه می‌کنم از تمامی همکارانم در انتشارات بین‌المللی گاج که بدون کمک آن‌ها آماده کردن این کتاب امکان‌پذیر نبود. با بنده می‌توانید از طریق آیدی تلگرام @ar_amid در ارتباط باشید.

.

موفق باشید.

آرش عمید
@ArashAmid
ar.Amid

فهرست

GAJLIVE

مدرسه اینترنتی گاج

گاجلایو

فهرست

GAJLIVE گاج‌لایو

فصل ۱

فصل ۲

فهرست

GAJLIVE

گاج‌لایو

فصل ۳

فصل ۴

گاج‌لایو

GAJLIVE

فصل ۵

فصل ۶

فصل ۷

درس ۲ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجه ۲

۱ معادلهٔ درجه دوم

۲ تابع درجه دوم (سهمی)

۱ معادلهٔ درجه دوم

بعد از مطالعهٔ این قسمت به سؤالات زیر مراجعه کنید.
سؤالات: ۱۷۰ تا ۲۶۱

در سال قبل، با معادلهٔ درجهٔ دوم آشنا شدین و روش‌های مختلفی نظیر تجزیه، فرمول کلی (یا همون روش دلتا)، روش مربع کامل، ضرایب خاص و ... برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم یاد گرفتین. تو کتاب ریاضی (۲) می‌خوایم بدون به‌دست آوردن ریشه‌های معادله، حاصل عبارت‌هایی برحسب ریشه‌ها رو از روی ضرایب معادله به‌دست بیاریم. با داشتن ریشه‌های معادله بتونیم خود معادله رو به‌دست بیاریم و در آخر بعضی معادلاتی که اصلاً درجهٔ ۲ نیستن رو با تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم حل کنیم.

روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، می‌توان مجموع ریشه‌ها ($S=x_1+x_2$)، حاصل‌ضرب ریشه‌ها ($P=x_1x_2$) و قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها ($D=|x_1-x_2|$) را بدون نیاز به حل معادله و به‌دست آوردن ریشه‌ها و با استفاده از ضرایب معادله به‌دست آورد که در زیر می‌بینید:

$$x_1+x_2=S=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=P=\frac{c}{a} \qquad |x_1-x_2|=D=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

اینجوری هم ببین برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ با فرمول کلی یا همون روش Δ، ریشه‌ها از روابط $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ به‌دست میان که $\Delta=b^2-4ac$ هستش. حالا می‌تونی هر یک از روابط بالا رو خودت اثبات کنی. مثلاً ببین چرا مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ میشه:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

کتاب درسی صفحه ۱۳

در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید. (کاردرکلاس صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$ ضرایب $a=-2$، $b=1$ و $c=5$ است، پس:

$$S=-\frac{b}{a}\Rightarrow S=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$P=\frac{c}{a}\Rightarrow P=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-2=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱ ضرایب معادله $a=1$، $b=3$ و $c=-2$ هستند، x_1x_2 و x_1+x_2 را می‌توانیم بر حسب ضرایب معادله به‌دست آوریم، پس:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{3}{1}=-3 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow x_1x_2=\frac{-2}{1}=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

زرنگ باش

گاهی اوقات با ضرب طرفین معادله در یک عبارت مناسب و استفاده از اتحادهایی که در سال‌های قبل خوندین، معادله به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل میشه.

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+1)(x+1)=3\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}$ باشند، حاصل $3x_1x_2+4x_1+4x_2$ کدام است؟

۱) 7 ۲) -7 ۳) 9 ۴) -9

۴ طرفین معادلهٔ $(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+1)(x+1)=3\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}$ را در $\sqrt{x}$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{x}\times(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+1)(x+1)=\sqrt{x}\times(3\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}})\Rightarrow\underbrace{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x+1)=3x+6$$

$$\Rightarrow\underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=3x+6\Rightarrow x^2-1=3x+6\Rightarrow x^2-3x-7=0$$

حال در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-3x-7=0$ داریم:

$$x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=3\quad;\quad x_1x_2=\frac{-7}{1}=-7$$

بنابراین حاصل $3x_1x_2+4x_1+4x_2$ برابر است با:

$$3x_1x_2+4(x_1+x_2)=3\times(-7)+4\times3=-21+12=-9$$

به دست آوردن حاصل یک عبارت برحسب ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، از شما می‌خواهند حاصل یک عبارت برحسب α و β را به دست آورید. *(معادله‌ها رو طوری میدن که نه میشه تجزیه کرد و نه جواب رُند و درست و حسابی دارن. بنابراین اصلاً به صرفه نیست بری ریشه‌ها رو پیدا کنی و بعد بری حاصل اون عبارت رو به‌دست بیاری.)* عبارت‌هایی که برحسب α و β می‌دهند به دو دستهٔ کلی عبارت‌های متقارن و عبارت‌های نامتقارن تقسیم می‌شوند.

عبارات متقارن و نامتقارن: به یک عبارت برحسب α و β متقارن می‌گوییم هرگاه α را به β و β را به α تبدیل کنیم، عبارت تغییری نکند، مثلاً عبارات $\alpha^2+\beta^2$، $\alpha^3+\beta^3$، $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$، $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2$ و... عبارات متقارن هستند. واضح هست که عباراتی که متقارن نیستند، عبارات نامتقارن می‌باشند. مثلاً عبارت‌هایی نظیر $\alpha^3+\beta^2$، $\alpha^2+7\beta$ و ... عبارت‌های نامتقارن هستند.

به‌دست آوردن حاصل عبارات متقارن: در این عبارت‌ها با استفاده از اتحادهای جبری، تجزیه کردن، فاکتورگیری، مخرج مشترک‌گیری، به توان رساندن و... می‌توان عبارت را برحسب $S=\alpha+\beta$، $P=\alpha\beta$ و $D=|\alpha-\beta|$ نوشت. چند نمونه در جدول زیر ببینید و حتماً به جای حفظ کردن، نحوهٔ به‌دست آوردن آن‌ها را تمرین کنید. ضمناً بسیاری از عبارات متقارن را می‌توان به‌صورت فارسی نیز بیان کرد.

عبارت ریاضی	بیان فارسی	نحوه به‌دست آوردن برحسب S، P و D
$\alpha^2+\beta^2$	مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$
$\alpha^3+\beta^3$	مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$	مجموع معکوس ریشه‌ها	$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$
$\|\alpha^2-\beta^2\|$	قدر مطلق تفاضل مربعات ریشه‌ها	$\|\alpha^2-\beta^2\|=\|(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\|=D\times\|S\|$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	مجموع جذر ریشه‌ها	$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}$ $\Rightarrow\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

زرنگ باش

در بین عبارت‌های متقارن، « $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ » و « $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$ » رو حفظ کن. خیلی جاها به دردت می‌خورن.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ باشند، حاصل هر یک از عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\alpha^۲ + \beta^۲$　ب) $\alpha^۳ + \beta^۳$　پ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

ت) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$　ث) $\alpha^۳\beta + \beta^۳\alpha$

در معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{-۵}{۱} = ۵ \text{ و } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{۲}{۱} = ۲$$

حال حاصل هر یک از عبارت‌ها که عبارت‌های متقارن برحسب α و β هستند را به‌دست می‌آوریم:

الف) $\underbrace{\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P}_{\text{قرار بود حفظ کنیم.}} \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = ۵^۲ - ۲(۲) = ۲۵ - ۴ = ۲۱$

ب) $\underbrace{\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS}_{\text{قرار بود حفظ کنیم.}} \Rightarrow \alpha^۳ + \beta^۳ = ۵^۳ - ۳(۲)(۵) = ۱۲۵ - ۳۰ = ۹۵$

پ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A$

$$A^۲ = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^۲ \Rightarrow A^۲ = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Rightarrow A^۲ = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A^۲ = ۵ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow A = \sqrt{۵ + ۲\sqrt{۲}} \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{۵ + ۲\sqrt{۲}}$$

حتماً حواست هست که $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ منفی نمیشه. وگرنه از $A^۲ = ۵ + ۲\sqrt{۲}$ مقدار A برابر $\pm\sqrt{۵ + ۲\sqrt{۲}}$ میشه.

ت) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{۲}(\sqrt{۵ + ۲\sqrt{۲}}) = \sqrt{۱۰ + ۴\sqrt{۲}}$

مقدار $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ رو تو قسمت قبلی پیدا کرده بودیم.

ث) $\alpha^۳\beta + \beta^۳\alpha = \alpha\beta(\alpha^۲ + \beta^۲) = P(S^۲ - ۲P) \Rightarrow \alpha^۳\beta + \beta^۳\alpha = ۲ \times ۲۱ = ۴۲$

مقدار $\alpha^۲ + \beta^۲$ رو قبلاً حساب کرده بودیم.

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۵x^۲ - ۸x - ۴ = ۰$ باشند، مقدار $|x_۱^۲ - x_۲^۲|$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۴}{۲۵}$　۲) $\frac{۹۰}{۲۵}$　۳) $\frac{۹۶}{۲۵}$　۴) $\frac{۱۰۲}{۲۵}$

۳ به کمک اتحاد مزدوج می‌توان $x_۱^۲ - x_۲^۲$ را به‌صورت $(x_۱ - x_۲)(x_۱ + x_۲)$ نوشت، پس:

$$|(x_۱ - x_۲)(x_۱ + x_۲)| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times |(-\frac{b}{a})| = \frac{\sqrt{۶۴ - ۴(۵)(-۴)}}{۵} \times |(-\frac{-۸}{۵})| = \frac{\sqrt{۶۴ + ۸۰}}{۵} \times \frac{۸}{۵} = \frac{\sqrt{۱۴۴}}{۵} \times \frac{۸}{۵} = \frac{۱۲}{۵} \times \frac{۸}{۵} = \frac{۹۶}{۲۵}$$

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha\beta^۴ + \beta\alpha^۴$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵　۲) ۱/۲۵-　۳) ۱/۵-　۴) ۱/۷۵

۲ عبارت $\alpha\beta^۴ + \beta\alpha^۴$ را می‌توان برحسب S و P نوشت، بنابراین داریم:

$$\alpha\beta^۴ + \beta\alpha^۴ = \alpha\beta(\beta^۳ + \alpha^۳) = P(S^۳ - ۳PS)$$

در معادلهٔ داده شده داریم:

$$S = -\frac{-۲}{۲} = ۱ \ , \ P = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین حاصل $\alpha\beta^۴ + \beta\alpha^۴$ برابر است با:

$$\alpha\beta^۴ + \beta\alpha^۴ = (-\frac{۱}{۲})(۱^۳ - ۳ \times (-\frac{۱}{۲})(۱)) = (-\frac{۱}{۲})(\frac{۵}{۲}) = -\frac{۵}{۴} = -۱/۲۵$$

به دست آوردن حاصل عبارات نامتقارن: اگر عبارت برحسب ریشه‌ها، نامتقارن بود انجام یکی از کارهای زیر راهگشاست.

۱ می‌دانیم «ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند.»، احتمالاً قسمتی از ساختار عبارت نامتقارن شبیه ساختار معادله است. با قرار دادن آن ریشه در معادله و جایگزینی معادل آن در عبارت، عبارت متقارن می‌شود و می‌توان آن را برحسب S، P و D نوشت.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-1=0$ باشند، حاصل $(3\alpha-1)^2+\beta^4$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۱۹ ۳) ۱۲۳ ۴) ۱۴۲

۲ عبارت $(3\alpha-1)^2+\beta^4$ متقارن نیست، امّا $3\alpha-1$ شبیه قسمتی از معادله است، پس:

$$x^2+3x-1=0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2+3\alpha-1=0 \Rightarrow 3\alpha-1=-\alpha^2$$

بنابراین در عبارت $(3\alpha-1)^2+\beta^4$ داریم:

$$(3\alpha-1)^2+\beta^4=(-\alpha^2)^2+\beta^4=\alpha^4+\beta^4=(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P})^2-\underbrace{2\alpha^2\beta^2}_{2P^2}=(S^2-2P)^2-2P^2$$

از طرفی در معادلهٔ $x^2+3x-1=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{-1}{1}=-1$$

بنابراین حاصل عبارت $(3\alpha-1)^2+\beta^4$ برابر است با:

$$(3\alpha-1)^2+\beta^4=(S^2-2P)^2-2P^2=(9-2(-1))^2-2(-1)^2=11^2-2=121-2=119$$

۲ گاهی اوقات می‌توان از یک عبارت نامتقارن، یک عبارت متقارن را استخراج کرد و سپس دنبال به دست آوردن حاصل عبارت باقی‌مانده که نامتقارن است، برویم.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x-3=0$ باشند، حاصل $4\beta^2+2\alpha^2-16\beta$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۴۶

۴ می‌توان یک عبارت متقارن از عبارت داده شده خارج کرد، پس:

$$4\beta^2+2\alpha^2-16\beta=2\alpha^2+2\beta^2+2\beta^2-16\beta=2(\alpha^2+\beta^2)+2(\beta^2-8\beta)=2(S^2-2P)+2(\beta^2-8\beta)$$

در معادلهٔ $x^2-8x-3=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=8\quad,\quad P=\alpha\beta=-3$$

هم‌چنین β در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\beta^2-8\beta-3=0\Rightarrow \beta^2-8\beta=3$$

بنابراین حاصل $4\beta^2+2\alpha^2-16\beta$ برابر است با:

$$4\beta^2+2\alpha^2-16\beta=2(S^2-2P)+2(\beta^2-8\beta)=2(64-2(-3))+2(3)=140+6=146$$

اینجوری هم ببین اگه اطلاعاتی راجع به ریشه‌های معادله نداشته باشیم مثلاً ندونیم α بزرگ‌تره یا β و …، می‌تونیم فرض کنیم عبارت نامتقارن برحسب α و β برابر A هستش. حالا اگر بیایم α رو به β و β رو به α تبدیل کنیم، حاصل عبارت جدید هم A میشه. کافیه دو تا عبارت رو با هم جمع کنیم یک عبارت متقارن تشکیل میشه که حاصل اون برابر $2A$ هستش. کافیه تقسیم بر ۲ کنی تا A به‌دست بیاد. مثلاً در تمرین اول α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-1=0$ بودن و ما حاصل $(3\alpha-1)^2+\beta^4$ رو می‌خواستیم، پس:

$$\begin{cases}(3\alpha-1)^2+\beta^4=A\\(3\beta-1)^2+\alpha^4=A\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}(3\alpha-1)^2+(3\beta-1)^2+\alpha^4+\beta^4=2A$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2+9\beta^2-6\alpha-6\beta+2+(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=9((-3)^2-2(-1))-6(-3)+2+((-3)^2-2(-1))^2-2(-1)^2$$

$$=9\times11+18+2+121-2=238\Rightarrow 2A=238\Rightarrow A=119$$

زرنگ باش

اگه حاصل عبارتی برحسب ریشه‌ها رو بدن و مقدار پارامتری رو در معادله بخوان، قطعاً حاصل‌ضرب ریشه‌ها و مجموع ریشه‌ها در به‌دست آوردن پارامتر کارساز هستن. در این جا باید دقت کنی که حتماً دلتای معادله مثبت باشه تا مطمئن بشیم معادله حتماً دو تا ریشه رو داره.

به ازای مقدار مشخص m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - (m+۳)x + ۵ = ۰$ برابر ۶ است. ریشهٔ بزرگ‌تر معادله کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۲۶} - ۳}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۹} - ۱}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲۶} - ۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲۶} - ۱}{۳}$

۴ اگر α و β ریشه‌های معادله باشد، باتوجه به صورت سؤال $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۶$ است. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \alpha^۲ + \beta^۲ = ۶ \\ S = \frac{m+۳}{m} \\ P = \frac{۵}{m} \end{cases} \xrightarrow{\alpha^۲+\beta^۲ = S^۲ - ۲P} (\frac{m+۳}{m})^۲ - ۲(\frac{۵}{m}) = ۶ \Rightarrow (m+۳)^۲ - ۱۰m = ۶m^۲$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۰m = ۶m^۲ \Rightarrow ۵m^۲ + ۴m - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+c+b=۰} \begin{cases} m = ۱ \\ m = -\frac{۹}{۵} \end{cases}$$

حال باید بررسی کنیم که حتماً دلتای معادله مثبت باشد، به ازای $m = -\frac{۹}{۵}$ چون a و c مختلف العلامت می‌شوند حتماً $\Delta > ۰$ است. به‌ازای $m = ۱$ داریم:

$$\Delta = (-(m+۳))^۲ - ۴m(۵) \xrightarrow{m=۱} \Delta < ۰ \quad \text{غ ق ق}$$

بنابراین معادله به صورت $-\frac{۹}{۵}x^۲ - \frac{۶}{۵}x + ۵ = ۰$ است. برای حل معادله، آن را در ۵ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$-۹x^۲ - ۶x + ۲۵ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶ + ۹۰۰}}{-۱۸} = \frac{۶ \pm ۶\sqrt{۲۶}}{-۱۸} \xrightarrow{\text{ریشهٔ بزرگ‌تر}} x = \frac{\sqrt{۲۶} - ۱}{۳}$$

تعیین علامت ریشه‌ها از روی ضرایب معادله

در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ با فرض آن‌که معادله دو ریشه دارد، از روی علامت جمع و ضرب ریشه‌ها، یعنی علامت S و P، می‌توان اطلاعاتی راجع به علامت ریشه‌ها و ... به‌دست آورد. به جدول زیر توجه کنید:

$ax^۲ + bx + c = ۰ \quad , \quad S = \alpha + \beta \quad , \quad P = \alpha\beta$			
$P > ۰$		$P < ۰$	
معادله دو ریشهٔ هم‌علامت دارد.		معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.	
$S > ۰$	$S < ۰$	$S > ۰$	$S < ۰$
دو ریشهٔ مثبت دارد.	دو ریشهٔ منفی دارد.	ریشهٔ مثبت، از قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر است.	قدرمطلق ریشهٔ منفی، بزرگ‌تر است.

زرنگ باش

در حالتی که دو ریشه هم‌علامت هستن (P بزرگ‌تر از صفره) باید حتماً شرط $\Delta > ۰$ بررسی بشه. امّا در حالتی که دو ریشه مختلف‌العلامت هستن (P کوچک‌تر از صفره) نیازی به بررسی Δ نیست، چون وقتی $P < ۰$ باشه، حتماً $\Delta > ۰$ هستش. (چون وقتی $P < ۰$ هستش یعنی $\frac{c}{a} < ۰$ میشه و این یعنی a و c مختلف‌العلامت هستن، پس $\Delta = b^۲ - ۴ac$ به صورت «مثبت + نامنفی = Δ» میشه که حتماً بزرگ‌تر از صفره.)

در هر قسمت شرط یا شرط‌های لازم را برای معادلهٔ درجهٔ دوم معلوم کنید.

الف) معادله دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. **ب) معادله دو ریشه داشته باشد.**

پ) معادله دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. **ت) معادله دو ریشهٔ منفی داشته باشد.**

ث) اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، $\alpha < ۰ < \beta$ و $|\alpha| > \beta$ باشد.

الف) $\Delta > ۰$ ب) $\Delta \geq ۰$

پ) $P > ۰$ و $S > ۰$ و $\Delta > ۰$ ت) $P > ۰$ و $S < ۰$ و $\Delta > ۰$

ث) $P < ۰$ و $S < ۰$ (مثلاً ریشه‌ها ۵- و ۲ باشن.)

فرض کنید α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم و $\alpha < \beta < 0$ است. معادله کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x^2 + x + 4 = 0$ ۲) $x^2 + 5x - 10 = 0$ ۳) $x^2 - 7x + 3 = 0$ ۴) $x^2 + 8x + 2 = 0$

۴ اولاً باید دلتای معادله مثبت باشد. در گزینهٔ (۱) دلتای معادله منفی است. در ضمن باید ضرب ریشه‌ها مثبت باشد که در گزینه‌های (۳) و (۴) این چنین است. در ضمن باید جمع ریشه‌ها منفی باشد که فقط در معادلهٔ $x^2 + 8x + 2 = 0$ مجموع ریشه‌ها منفی می‌باشد.

$$x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 8^2 - 4(1)(2) = 56 \\ P = \frac{2}{1} = 2 \\ S = -\frac{8}{1} = -8 \end{cases}$$

به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $x^2 + (m-1)x + m^2 = 9$ دارای ریشه‌های مختلف العلامت است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲ برای آن که معادله ریشه‌های مختلف العلامت داشته باشد، باید $P < 0$ باشد، پس:

$$P < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 9}{1} < 0 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow$$ ۵ مقدار صحیح

زرنگ باش

اگه دو ریشهٔ معادله قرینهٔ هم باشن، باید $S=0$ باشه *(چون $S = -\frac{b}{a}$ هستش پس باید $b = 0$ باشه.)* و همچنین $\Delta > 0$ باشه.

(بزرگ‌تر از صفر بودن دلتا در این حالت یعنی در معادلهٔ $ax^2 + c = 0$، a و c مختلف‌العلامت باشن.)

اگر ریشه‌های معادلهٔ $-x^2 + (m^2 - 1)x + 4m - 3 = 0$ قرینهٔ هم باشند، مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + (m+2)x + 2m - 3 = 0$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

۳ چون ریشه‌های معادلهٔ $-x^2 + (m^2 - 1)x + 4m - 3 = 0$ قرینهٔ یکدیگرند، پس $S = 0$ و در نتیجه $b = 0$ می‌باشد:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

چون باید $\Delta > 0$ باشد *(a و c مختلف‌العلامت باشن.)* پس $m = 1$ قابل قبول است. حال به ازای $m = 1$ معادلهٔ $x^2 + (m+2)x + 2m - 3 = 0$ به صورت $x^2 + 3x - 1 = 0$ می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-3)^2 - 2(-1) = 9 + 2 = 11$$

زرنگ باش

اگه دو ریشهٔ معادله معکوس هم باشن، باید $P=1$ باشه *(چون $P = \frac{c}{a}$ هستش پس باید $a = c$ باشه.)* و همچنین $\Delta > 0$ باشه.

ریشه‌های معادلهٔ $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند. مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + (2m-5)x - m = 0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲ برای آن‌که ریشه‌های معادلهٔ $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگر باشند، باید $P = 1$ و در نتیجه $a = c$ باشد، پس:

$$m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

در ضمن باید $\Delta > 0$ باشد. می‌دانیم $\Delta = 9 - 4m(m^2 - 2)$ است. به جای تعیین علامت Δ، $m = 2$ و $m = -1$ را چک می‌کنیم. فقط به ازای $m = -1$، دلتا بزرگ‌تر از صفر می‌شود پس $m = -1$ قابل قبول است. حال به ازای $m = -1$ معادلهٔ $x^2 + (2m - 5)x - m = 0$ به‌صورت $x^2 - 7x + 1 = 0$ می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 7 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{7}{1} = 7$$

زرنگ باش

اگر دو ریشهٔ معادله، قرینه و معکوس هم باشن، فقط کافیه $P=-۱$ باشه. (چون $P=\frac{c}{a}$ هستش پس باید a و c قرینهٔ هم باشن و این یعنی $a+c=۰$ هستش.) دقت کن چون $P<۰$ هستش، a و c مختلف‌العلامت هستن و حتماً $\Delta>۰$ میشه و نیازی به چک کردن Δ نیست.

به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادلهٔ $-۳mx^۲+(۲-m)x+m^۲+۲=۰$ معکوس و قرینه هم بوده ولی قدرمطلق ریشه‌ها با هم برابر نیستند؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۱ و ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۳ باید $P=-۱$ و در نتیجه $a+c=۰$ باشد؛ پس:

$$-۳m+m^۲+۲=۰ \Rightarrow m^۲-۳m+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۱ \\ m=۲ \end{cases}$$

چون باید قدرمطلق ریشه‌ها با هم برابر نباشند، پس حتماً ریشه‌ها ۱ و -۱ نیستند، پس m نمی‌تواند ۲ باشد، زیرا اگر $m=۲$ باشد معادله به‌صورت $-۶x^۲+۶=۰$ می‌شود و ریشه‌های آن ۱ و -۱ خواهند بود.

تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم

در این قسمت می‌خواهیم با داشتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم یا اطلاعاتی راجع به آن‌ها، معادلهٔ درجهٔ دوم را به دست آوریم.

۱ اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، آن‌گاه معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \Rightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$$

بنابراین با توجه به معادلهٔ فوق می‌توان گفت اگر مجموع ریشه‌ها یعنی S و حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی P را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ درجهٔ دوم را بنویسیم.

$$x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \Rightarrow x^۲-Sx+P=۰$$

کتاب درسی صفحه ۱۳

الف) دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $-۱/۵$ و حاصل‌ضربشان -۷ باشد. (کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

ب) آیا مستطیلی با محیط ۱۱ واحد و مساحت ۶ واحد مربع وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید. (کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

پ) معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند. (کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

الف) فرض می‌کنیم α و β دو عدد حقیقی باشند، از آن‌جایی که مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را داریم، معادله‌ای که ریشه‌هایش α و β است را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-۱/۵ \\ P=\alpha\beta=-۷ \end{cases} \xrightarrow{x^۲-Sx+P=۰} x^۲-(-۱/۵)x+(-۷)=۰ \Rightarrow x^۲+۱/۵x-۷=۰$$

حال ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم تا α و β مشخص شوند:

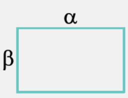
$$\Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow \Delta=(۱/۵)^۲-۴(۱)(-۷)=۲/۲۵+۲۸=۳۰/۲۵$$

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۱=\frac{-۱/۵+\sqrt{۳۰/۲۵}}{۲}=\frac{-۱/۵+۵/۵}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۲=\frac{-۱/۵-\sqrt{۳۰/۲۵}}{۲}=\frac{-۱/۵-۵/۵}{۲}=\frac{-۷}{۲}=-۳/۵$$

بنابراین دو عدد ۲ و $-۳/۵$ هستند.

ب) فرض می‌کنیم α و β طول و عرض مستطیل باشند، پس:



$$\begin{cases} ۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow S=\alpha+\beta=۵/۵ \\ \alpha\beta=۶ \Rightarrow P=\alpha\beta=۶ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۵/۵x+۶=۰$$

حال چون در معادلهٔ $x^۲-۵/۵x+۶=۰$ دلتا بزرگ‌تر از صفر است پس معادله جواب دارد و این یعنی مستطیلی با این مشخصات وجود دارد. بنابراین داریم:

$$\Delta=(-۵/۵)^۲-۴(۱)(۶)=۳۰/۲۵-۲۴=۶/۲۵$$

$$\alpha=\frac{۵/۵+\sqrt{۶/۲۵}}{۲}=\frac{۵/۵+۲/۵}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$\beta=\frac{۵/۵-\sqrt{۶/۲۵}}{۲}=\frac{۵/۵-۲/۵}{۲}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

پس طول و عرض مستطیل ۴ و ۱/۵ هستند.

پ) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$\begin{cases} S=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳ \\ P=(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲})(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۹-۵}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

❷ یک معادلهٔ درجهٔ دوم داریم و می‌خواهیم معادلهٔ درجهٔ دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های معادلهٔ اولیه، رابطهٔ مشخصی دارند. در این‌جا دو کار می‌توانیم انجام دهیم:

الف) ریشه‌های معادلهٔ اولیه را α و β و یا هر چیزی که سؤال گفته در نظر می‌گیریم و سپس مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را از روی ضرایب معادله به‌دست می‌آوریم. حال با توجه به رابطهٔ معادلهٔ جدید با معادلهٔ اولیه، مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را به‌دست می‌آوریم *(S و P معادلهٔ جدید را به‌دست میاریم.)*

معادلهٔ جدید به فرم $x^۲ - Sx + P = ۰$ یا مضربی از آن می‌باشد.

اگر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ax + b = ۰$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۵x - ۴ = ۰$ بیشتر باشد، مقدار $۳a - ۶b$ کدام است؟

۱) -۲۲ ۲) -۲۸ ۳) -۳۸ ۴) -۴۲

۳ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۵x - ۴ = ۰$ باشند، پس:

$$\alpha + \beta = -\frac{-۵}{۳} = \frac{۵}{۳} \quad , \quad \alpha\beta = -\frac{۴}{۳}$$

با توجه به صورت سوال $\alpha + ۱$ و $\beta + ۱$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ax + b = ۰$ هستند، پس:

$$S = \alpha + ۱ + \beta + ۱ = \alpha + \beta + ۲ \xRightarrow{\alpha+\beta=\frac{۵}{۳}} S = \frac{۵}{۳} + ۲ = \frac{۱۱}{۳}$$

$$P = (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ \xRightarrow[\alpha\beta=-\frac{۴}{۳}]{\alpha+\beta=\frac{۵}{۳}} P = -\frac{۴}{۳} + \frac{۵}{۳} + ۱ = \frac{۴}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر به‌صورت $x^۲ - \frac{۱۱}{۳}x + \frac{۴}{۳}$ است اما چون ضریب $x^۲$ در معادلهٔ داده شده ۲ می‌باشد پس:

$$x^۲ - \frac{۱۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} = ۰ \xRightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - \frac{۲۲}{۳}x + \frac{۸}{۳} = ۰$$

با مقایسهٔ معادلهٔ به‌دست آمده و معادلهٔ $۲x^۲ + ax + b = ۰$ داریم:

$$\begin{cases} a = -\frac{۲۲}{۳} \\ b = \frac{۸}{۳} \end{cases} \Rightarrow ۳a - ۶b = -۲۲ - ۱۶ = -۳۸$$

البته می‌توانستیم معادلهٔ جدید را تشکیل ندهیم و بگوییم در معادلهٔ $۲x^۲ + ax + b = ۰$ مجموع ریشه‌ها $-\frac{a}{۲}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\frac{b}{۲}$ است، پس:

$$\begin{cases} -\frac{a}{۲} = \frac{۱۱}{۳} \Rightarrow a = -\frac{۲۲}{۳} \\ \frac{b}{۲} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow b = \frac{۸}{۳} \end{cases} \Rightarrow ۳a - ۶b = -۳۸$$

ب) ریشه‌های معادلهٔ داده شده را x و ریشه‌های معادلهٔ جدید را X در نظر می‌گیریم. با توجه به خواستهٔ سؤال x را برحسب X به‌دست می‌آوریم و با جای‌گذاری در معادلهٔ اول، معادلهٔ جدید که برحسب X است، معلوم می‌شود. مثلاً حل تمرین بالا را با این روش ببینید:

$$X = x + ۱ \Rightarrow x = X - ۱ \Rightarrow ۳(X - ۱)^۲ - ۵(X - ۱) - ۴ = ۰ \Rightarrow ۳X^۲ - ۱۱X + ۴ = ۰ \xRightarrow{\times \frac{۲}{۳}} ۲X^۲ - \frac{۲۲}{۳}X + \frac{۸}{۳} = ۰$$

اینجوری هم ببین **از روش دوم نمیشه در همهٔ مسائل استفاده کرد. مخصوصاً زمانی‌که ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم جدید برحسب هر دو ریشهٔ معادلهٔ اولیه باشن یا ارتباط بین ریشه‌های معادلهٔ جدید و اولیه پیچیده باشه روش دوم اصلاً به صرفه نیست.**

زرنگ باش

در حالات خاص زیر نیازی به هیچ‌کدوم از روش‌های فوق نیست و میشه سریع معادلهٔ مدنظر رو نوشت.

۱ برای ساختن معادله‌ای که ریشه‌هاش قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشن کافیه فقط ضریب x رو قرینه کنیم یعنی به‌صورت $ax^۲-bx+c=۰$ می‌شه. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $۷x^۲+۵x-۳=۰$ قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $۷x^۲-۵x-۳=۰$ هستن.

۲ برای ساختن معادله‌ای که ریشه‌هاش عکس ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشن، کافیه جای a و c رو عوض کنیم یعنی معادله به‌صورت $cx^۲+bx+a=۰$ می‌شه. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۷x+۳=۰$ عکس ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۲=۰$ هستن.

۳ برای ساختن معادله‌ای که ریشه‌هاش k برابر ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشن، کافیه که b رو k برابر و c رو $k^۲$ برابر کنیم. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۹x+۹=۰$ سه برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x+۱=۰$ هستن.

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم

بعضی از معادلات درجهٔ دوم نیستند امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن‌ها را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد. (مثلاً معادلهٔ $x^4-2x^2-3=0$ درجهٔ دوم نیست امّا اگه $t = x^2$ باشه، اونوقت معادله به‌صورت $t^2-2t-3=0$ درمیاد که یک معادلهٔ درجهٔ دومه.) حال معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل که بر حسب متغیر جدید مثلاً t هست را حل می‌کنیم تا t به‌دست آید. سپس عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم را مساوی t‌های به‌دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود. مثلاً حل معادلهٔ $x^4-2x^2-3=0$ را ببینید:

$$x^2=t \Rightarrow t^2-2t-3=0 \xrightarrow[1+(-3)=-2]{\text{خاص شد}} t=-1\,,\,t=3$$

حال x^2 را برابر t‌های به‌دست آمده قرار می‌دهیم تا مقادیر x یعنی جواب‌های معادلهٔ $x^4-2x^2-3=0$ به دست آید:

$$\begin{cases} t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ t=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

کتاب درسی صفحه ۱۱ و ۱۳

معادلات زیر را حل کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ و تمرین صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

الف) $x^4-10x^2+9=0$ ب) $2x^4-7x^2-4=0$ پ) $4x^6+1=5x^3$

ت) $x+\sqrt{x}-12=0$ ث) $x^2+|x|-20=0$

الف) با فرض $x^2=t$ داریم:

$$x^4-10x^2+9=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-10t+9=0 \xrightarrow{a+c+b=0} t=1\,,\,t=9$$

حال داریم:

$$t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$$
$$t=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm3$$

ب) با فرض $x^2=t$ داریم:

$$2x^4-7x^2-4=0 \xrightarrow{x^2=t} 2t^2-7t-4=0 \Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49-4(2)(-4)}}{2(2)} \Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{7\pm9}{4} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال داریم:

$$t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$$
$$t=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

پ) با فرض $x^3=t$ داریم:

$$4x^6+1=5x^3 \xrightarrow{x^3=t} 4t^2+1=5t \Rightarrow 4t^2-5t+1=0 \xrightarrow{a+c+b=0} \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{4} \end{cases}$$

حال داریم:

$$t=1 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$$
$$t=\frac{1}{4} \Rightarrow x^3=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

ت) با فرض $\sqrt{x}=t$ داریم:

$$x+\sqrt{x}-12=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2+t-12=0 \Rightarrow (t+4)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=3 \end{cases}$$

حال داریم:

$$t=-4 \Rightarrow \sqrt{x}=-4 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$
$$t=3 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$$

ث) با فرض $|x|=t$، از آن‌جایی‌که $x^2=|x|^2$ است، پس:

$$x^2+|x|-20=0 \Rightarrow |x|^2+|x|-20=0 \xrightarrow{|x|=t} t^2+t-20=0 \Rightarrow (t+5)(t-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-5 \\ t=4 \end{cases}$$

حال داریم:

$$t=-5 \Rightarrow |x|=-5 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$
$$t=4 \Rightarrow |x|=4 \Rightarrow x=\pm4$$

اینجوری هم ببین می‌تونی در معادلهٔ $x^2+|x|-20=0$، با تعیین علامت x، قدرمطلق رو برداری و معادله‌ها رو حل کنی.

$$x\geq0 \Rightarrow x^2+x-20=0 \Rightarrow (x+5)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \text{ غ ق ق} \\ x=4 \end{cases}$$

$$x<0 \Rightarrow x^2-x-20=0 \Rightarrow (x-5)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \text{ غ ق ق} \\ x=-4 \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادله ۴ و ۴- هستند.

زرنگ باش روش دوم بهت کمک می‌کنه که مثلاً اگر معادلهٔ $x^2-2|x-3|-24=0$ رو دیدی الکی ذهنت سمت تغییر متغیر نره و بدونی که تو این معادله باید قدرمطلق رو برداری.

مجموع ریشه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر معادلهٔ $(x^۲-۳x)^۲-(x^۲-۳x)-۶=۰$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۴ اگر فرض کنیم $x^۲-۳x=t$ باشد، معادله به‌صورت $t^۲-t-۶=۰$ می‌شود. حال ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$t^۲-t-۶=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t-۳=۰\Rightarrow t=۳\\t+۲=۰\Rightarrow t=-۲\end{cases}$$

سپس $x^۲-۳x$ را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم:

$$t=۳\Rightarrow x^۲-۳x=۳\Rightarrow x^۲-۳x-۳=۰\xrightarrow{\Delta=۹-۴(۱)(-۳)=۲۱}x=\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲},\ x=\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$$

$$t=-۲\Rightarrow x^۲-۳x=-۲\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\xrightarrow[۱+۲+(-۳)=۰]{\text{خاص شد}}x=۱,\ x=۲$$

واضح است که ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}$ و ریشهٔ کوچک‌تر آن $\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$ است، پس مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}=\frac{۳+\sqrt{۲۱}+۳-\sqrt{۲۱}}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

برای این‌که بتونیم مسائل پارامتری مربوط به معادلات قابل تبدیل به معادلات درجهٔ دوم رو حل کنیم، نیازه که حالت‌های معروف رو دقیق‌تر بررسی کنیم.

چند حالت معروف در معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم:

۱) در معادله‌هایی به فرم $ax+b\sqrt{x}+c=۰$ کافی است فرض کنیم $\sqrt{x}=t$ است. در این صورت معادله به فرم $at^۲+bt+c=۰$ درمی‌آید. در معادلهٔ حاصل جواب‌های منفی غیرقابل قبول هستند و به‌ازای هر t نامنفی، یک مقدار برای x به‌دست می‌آید.

اگر معادلهٔ $x+(m-۲)\sqrt{x}+m+۱=۰$ دو جواب متمایز داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۱<m<۸$　　۲) $m>۸$　　۳) $-۲<m<۰$　　۴) $-۱<m<۰$

۴ با فرض $\sqrt{x}=t$ معادله به صورت $t^۲+(m-۲)t+m+۱=۰$ درمی‌آید. برای آن‌که معادلهٔ داده شده دو جواب متمایز داشته باشد باید معادلهٔ درجهٔ دوم $t^۲+(m-۲)t+m+۱=۰$ دو جواب مثبت و متمایز داشته باشد، پس:

$$P>۰\Rightarrow m+۱>۰\Rightarrow m>-۱$$

$$S>۰\Rightarrow-(m-۲)>۰\Rightarrow m-۲<۰\Rightarrow m<۲$$

$$\Delta>۰\Rightarrow(m-۲)^۲-۴(۱)(m+۱)>۰\Rightarrow m^۲-۴m+۴-۴m-۴>۰\Rightarrow m^۲-۸m>۰\Rightarrow m<۰\ \text{یا}\ m>۸$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده، $-۱<m<۰$ می‌باشد.

۲) در معادله‌هایی به فرم $ax^۴+bx^۲+c=۰$ کافی است فرض کنیم $x^۲=t$ می‌باشد. در این صورت معادله به فرم معادلهٔ درجهٔ دوم $at^۲+bt+c=۰$ درمی‌آید. در معادلهٔ حاصل جواب‌های منفی غیرقابل قبول هستند. برای $t=۰$ فقط یک جواب برای x به‌دست می‌آید و به ازای هر t مثبت، دو جواب قرینه برای x حاصل می‌شود.

اگر معادلهٔ $x^۴+(m+۴)x^۲+۲m=۰$ فاقد جواب باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۴<m<۰$　　۲) $m>۰$　　۳) $m<-۴$　　۴) $m<-۴$ یا $m>۰$

۲ با تغییر متغیر $x^۲=t$ معادله به $t^۲+(m+۴)t+۲m=۰$ درمی‌آید. برای آن‌که معادلهٔ اولیهٔ فاقد جواب باشد باید معادلهٔ $t^۲+(m+۴)t+۲m=۰$ جواب نداشته باشد یا جواب‌های معادله منفی باشند. واضح است در این صورت Δ هر مقداری می‌تواند داشته باشد، پس در حالتی که جواب دارد باید دو جواب منفی باشند:

$$P>۰\Rightarrow۲m>۰\Rightarrow m>۰$$

$$S<۰\Rightarrow-(m+۴)<۰\Rightarrow m+۴>۰\Rightarrow m>-۴$$

از اشتراک حدود به دست آمده $m>۰$ می‌باشد. توجه کنید در این معادله Δ همواره بزرگ‌تر از صفر است.

زرنگ باش

اگه معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ ریشه داشته باشه، همواره مجموع ریشه‌ها برابر صفر هستش. *(چون جواب‌های معادله دوبه دو قرینه هستن.)*

اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴-۸x^۲-۳=۰$ به ترتیب S و P باشند، حاصل $۲P^۲+۳S^۲-۵PS$ کدام است؟

۱) $۷۰-۱۶\sqrt{۱۹}$ ۲) ۷۶ ۳) $۴+\sqrt{۱۹}$ ۴) $۷۰+۱۶\sqrt{۱۹}$

۴ می‌دانیم مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴-۸x^۲-۳=۰$ برابر صفر است، پس $۲P^۲+۳S^۲-۵PS$ برابر $۲P^۲$ می‌باشد. حال با فرض $x^۲=t$ معادله به فرم $t^۲-۸t-۳=۰$ درمی‌آید و داریم:

$$t=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴+۱۲}}{۲}=۴\pm\sqrt{۱۹}\Rightarrow\begin{cases}t=۴+\sqrt{۱۹}\Rightarrow x^۲=۴+\sqrt{۱۹}\Rightarrow x=\pm\sqrt{۴+\sqrt{۱۹}}\\ t=۴-\sqrt{۱۹}\Rightarrow x^۲=۴-\sqrt{۱۹}\ \text{غ‌ق}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$P=(\sqrt{۴+\sqrt{۱۹}})\times(-\sqrt{۴+\sqrt{۱۹}})=-(۴+\sqrt{۱۹})\Rightarrow ۲P^۲=۲(-(۴+\sqrt{۱۹}))^۲=۲(۱۶+۱۹+۸\sqrt{۱۹})=۷۰+۱۶\sqrt{۱۹}$$

۳ در معادله‌هایی به فرم $ax^۲+b|x|+c=۰$، چون $|x|^۲=x^۲$ است، پس معادله در حقیقت به فرم $a|x|^۲+b|x|+c=۰$ بوده و با تغییر متغیر $|x|=t$ به معادلهٔ $at^۲+bt+c=۰$ می‌رسیم. واضح است در معادلهٔ حاصل جواب‌های منفی قبول نیستند زیرا $|x|$ منفی نمی‌شود. امّا اگر $t=۰$ باشد یک جواب برای x و اگر $t>۰$ باشد، دو جواب قرینه برای x به دست می‌آید. واضح است که در این حالت نیز مجموع جواب‌ها در صورت وجود برابر صفر است.

معادلهٔ $mx^۲-(۲m+۱)|x|+m-۱=۰$ سه جواب متمایز دارد. حاصل‌ضرب جواب‌های کوچک‌تر و بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۹- ۲) ۶- ۳) ۸ ۴) ۴

۱ با فرض $|x|=t$ معادله به فرم $mt^۲-(۲m+۱)t+m-۱=۰$ می‌شود. چون معادلهٔ اولیه سه جواب متمایز دارد، پس معادلهٔ $mt^۲-(۲m+۱)t+m-۱=۰$ یک جواب صفر و یک جواب مثبت دارد. بنابراین داریم:

$$m-۱=۰\Rightarrow m=۱\Rightarrow t^۲-۳t=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\Rightarrow|x|=۰\Rightarrow x=۰\\ t=۳\Rightarrow|x|=۳\Rightarrow x=\pm۳\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های کوچک‌تر و بزرگ‌تر معادله برابر ۹- است.

! حالت‌های $a\sqrt{x}+b\sqrt[۴]{x}+c=۰$، $ax^۶+bx^۳+c=۰$، $ax^{-۱}+bx^{-\frac{۱}{۲}}+c=۰$ و ... نیز وجود دارند که با تسلط بر مطالب فوق به راحتی قابل تحلیل هستند.

زرنگ باش

گاهی اوقات در یک معادلهٔ درجه دوم، یک عبارت بر حسب x تکرار میشه. در این‌جا هم می‌تونیم اون عبارت تکرارشونده رو t فرض کنیم و ریشه‌های معادلهٔ جدید، یعنی t رو به‌دست بیاریم. در آخر عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم رو مساوی tهای به‌دست آمده میزاریم تا x به‌دست بیاد.

ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $(۳x+۱)^۲+۹(۳x+۱)+۱۴=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $-\frac{۵}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

۴ عبارت $۳x+۱$ در معادله تکرار می‌شود. با فرض $t=۳x+۱$ معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود و داریم:

$$t^۲+۹t+۱۴=۰\Rightarrow(t+۲)(t+۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}t+۲=۰\Rightarrow t=-۲\\ t+۷=۰\Rightarrow t=-۷\end{cases}$$

حال $۳x+۱$ را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود:

$$t=-۲\Rightarrow ۳x+۱=-۲\Rightarrow ۳x=-۲-۱\Rightarrow ۳x=-۳\Rightarrow x=-۱$$

$$t=-۷\Rightarrow ۳x+۱=-۷\Rightarrow ۳x=-۷-۱\Rightarrow ۳x=-۸\Rightarrow x=-\frac{۸}{۳}$$

بنابراین ریشهٔ کوچک‌تر معادله $x=-\frac{۸}{۳}$ است.

توجه کن معادلهٔ داده شده یک معادله درجهٔ دومه، اما چون $۳x+۱$ تو معادله تکرار میشه، $۳x+۱$ رو t گرفتیم و معادله رو حل کردیم. می‌تونستیم معادله رو به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ در بیاریم و حل کنیم که کمی وقت‌گیره.

$$(۳x+۱)^۲+۹(۳x+۱)+۱۴=۰\Rightarrow ۹x^۲+۶x+۱+۲۷x+۹+۱۴=۰\Rightarrow ۹x^۲+۳۳x+۲۴=۰\xrightarrow{a+c=b}x=-۱,x=\frac{-۲۴}{۹}=-\frac{۸}{۳}$$

۲ تابع درجه دوم (سهمی)

بعد از مطالعهٔ این قسمت به سؤالات زیر مراجعه کنید.

سؤالات: ۲۶۲ تا ۳۸۷

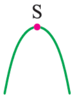
ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم (سهمی)

به تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ که در آن $a \neq ۰$ است، تابع درجهٔ دوم می‌گوییم. *(این‌که در ضابطهٔ سهمی، a مخالف صفره، یعنی ضابطهٔ سهمی حتماً جمله‌ای داره که توان x در اون ۲ هستش.)*

نمودار سهمی: نمودار سهمی به یکی از دو صورت  یا  است. در سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ با توجه به مثبت یا منفی بودن a یعنی ضریب $x^{۲}$ داریم:

الف) اگر $a > ۰$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا بوده و سهمی دارای نقطه‌ای است که کم‌ترین مقدار را دارد.

ب) اگر $a < ۰$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین بوده و سهمی دارای نقطه‌ای است که بیش‌ترین مقدار را دارد.



رأس سهمی: به نقطهٔ S رأس سهمی می‌گویند. *(همون نقطه‌ای که کم‌ترین مقدار یا بیش‌ترین مقدار رو داره.)* در سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ طول رأس سهمی $x_S = -\frac{b}{۲a}$ و عرض رأس سهمی $y_S = -\frac{\Delta}{۴a}$ می‌باشد.

$$\boxed{f(x) = ax^{۲} + bx + c \Rightarrow S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})}$$

اینجوری هم ببین برای به‌دست آوردن عرض رأس سهمی، می‌تونیم x_S رو در ضابطهٔ سهمی جایگذاری کنیم تا عرض رأس سهمی معلوم بشه. *(البته همیشه این کار به‌صرفه نیست، در ادامه در موردش صحبت خواهم کرد.)*

$$\boxed{f(x)=ax^{۲}+bx+c \Rightarrow y_S = f(x_S) = f(-\frac{b}{۲a})}$$

رأس سهمی $f(x) = ۳x^{۲} + ۶x + ۵$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$
۲) $(۱,-۲)$
۳) $(-۱,۲)$
۴) $(۱,۱۴)$

۳ طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x_S = -\frac{۶}{۲\times۳} = -\frac{۶}{۶} = -۱$$

حال عرض رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم، کافی است $x = -۱$ را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری کنیم:

$$y_S = f(-۱) = ۳(-۱)^{۲} + ۶(-۱) + ۵ = ۳ - ۶ + ۵ = ۲$$

بنابراین نقطهٔ $S(-۱,۲)$ رأس سهمی است. *(لطفاً y_S رو از فرمول $-\frac{\Delta}{۴a}$ هم به‌دست بیار.)*

زرنگ باش

اگر معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x)=a(x-h)^{۲}+k$ داده شده باشه، نقطهٔ (h,k) رأس سهمی هستش.

$$\boxed{f(x)=a(x-h)^{۲}+k \Rightarrow S(h,k)}$$

اگر نقطهٔ $(x_{۰},۵)$، رأس سهمی $y = ۲(x+۲)^{۲} + m$ باشد، مقدار $m + x_{۰}$ کدام است؟

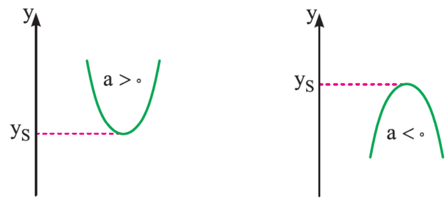
۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۱ در سهمی $y = ۲(x+۲)^{۲} + m$ مختصات رأس $(-۲,m)$ است، پس:

$$(-۲,m) = (x_{۰},۵) \Rightarrow \begin{cases} x_{۰} = -۲ \\ m = ۵ \end{cases} \Rightarrow m + x_{۰} = ۵ + (-۲) = ۳$$

کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار سهمی

کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همان عرض رأس سهمی است. اگر ضریب x^2 مثبت باشد، عرض رأس آن، کم‌ترین مقدار و اگر ضریب x^2 منفی باشد، عرض رأس سهمی بیش‌ترین مقدار می‌باشد.



اینجوری هم ببین **در تابع $y=ax^2+bx+c$، اگه ضریب x^2 مثبت باشه برد اون $[y_S,+\infty)$ و اگه ضریب x^2 منفی باشه، برد اون $(-\infty,y_S]$ هستش.**

کتاب درسی صفحه ۱۴

کدام نتیجه‌گیری در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ درست است؟ (مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۱) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ است.
۲) کم‌ترین مقدار تابع برابر ۴ است.
۳) کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱ است.
۴) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۴ است.

۴ تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ یک سهمی است که چون ضریب x^2 منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین بوده و دارای بیش‌ترین مقدار است. حال عرض رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$x_S = -\frac{2}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1 \Rightarrow y_S = -(1)^2 + 2(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

اگر بیش‌ترین مقدار تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴-
۴) ۵-

۳ چون بیش‌ترین مقدار تابع درجهٔ دوم صفر است، دو نتیجه می‌توان گرفت. اولاً چون سهمی بیش‌ترین مقدار را دارد یعنی دهانهٔ سهمی رو به پایین است. *(ضریب x^2 باید منفی باشه.)* ثانیاً عرض رأس سهمی صفر می‌باشد. *($y_S = 0$)* بنابراین داریم:

$$y_S = 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(k+3)k = 0 \Rightarrow 16 - 4(k^2 + 3k) = 0$$

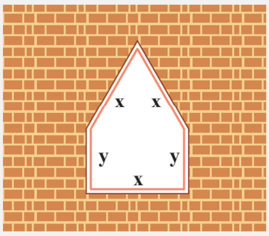
$$\xRightarrow{\div 4} 4 - (k^2 + 3k) = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

چون ضریب x^2، یعنی $(k+3)$ باید منفی باشد، پس $k = -4$ قابل قبول است.

زرنگ باش

چرا در سؤال بالا برای به‌دست آوردن y_S، اول x_S رو پیدا نکردیم و در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری نکردیم؟ چون x_S برحسب k هستش و بعد از جای‌گذاری، محاسبات سخت می‌شد. زمانی اون کارو می‌کنیم که x_S یک عدد بشه تا بعد از جای‌گذاری، دچار مشکل نشیم. کِی x_S عدد میشه؟ زمانی که ضریب x^2 و ضریب x، پارامتری نباشن.

کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار یک عبارت: گاهی اوقات در مسائل توصیفی یا هندسی که بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار یک عبارت را می‌خواهند، اگر مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم و یک تابع درجهٔ دوم (سهمی) ایجاد شود، آن‌گاه به راحتی می‌توان بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار عبارت را پیدا کرد. چون بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت، همان عرض رأس سهمی می‌باشد.



کتاب درسی صفحه ۱۴

یک پنجره به شکل مقابل از یک مستطیل که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته تشکیل شده است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، اختلاف طول و عرض قسمت مستطیلی تقریباً چند سانتی‌متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ (مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۲۹ ۲) ۳۲

۳) ۳۵ ۴) ۳۸

۳ برای آن‌که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد، باید مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، پس:

$$\text{محیط} = ۴ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۴ \Rightarrow y = ۲ - \frac{۳x}{۲}$$

حال مساحت پنجره را به‌دست می‌آوریم:

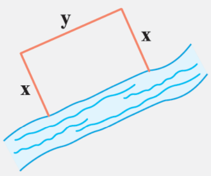
$$S = xy + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \xRightarrow{y=۲-\frac{۳x}{۲}} S = x(۲ - \frac{۳x}{۲}) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \Rightarrow S = ۲x - \frac{۳x^۲}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^۲ + ۲x$$

همان‌طورکه می‌بینید تابع مساحت، تابع درجهٔ دوم (سهمی) است و ضریب $x^۲$ نیز منفی می‌باشد. بنابراین این تابع دارای ماکزیمم بوده و بیش‌ترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{b}{۲a}$ حاصل می‌شود:

$$x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}-۶}{۲}} = \frac{۴}{۶-\sqrt{۳}} \simeq ۰/۹۴(m)$$

$$y = ۲ - \frac{۳}{۲}x \simeq ۲ - \frac{۳}{۲}(۰/۹۴) \simeq ۰/۵۹(m)$$

بنابراین اختلاف طول و عرض قسمت مستطیلی پنجره برابر $۰/۹۴ - ۰/۵۹ = ۰/۳۵$ متر و در نتیجه ۳۵ سانتی‌متر است.



کتاب درسی صفحه ۱۵

قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه، نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، بیش‌ترین مقدار مساحت محوطه کدام است؟ (کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۱) ۷۵۰ ۲) ۱۰۵۰

۳) ۱۲۵۰ ۴) ۱۵۰۰

۳ با توجه به این‌که هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داریم، پس:

$$y + ۲x = ۱۰۰ \Rightarrow y = ۱۰۰ - ۲x$$

حال مساحت محوطه برابر است با:

$$S = xy \xRightarrow{y=۱۰۰-۲x} S = x(۱۰۰ - ۲x) = -۲x^۲ + ۱۰۰x$$

تابع مساحت یک سهمی رو به پایین است پس بیش‌ترین مقدار آن همان عرض رأس سهمی می‌باشد:

$$x_S = -\frac{۱۰۰}{۲(-۲)} = -\frac{۱۰۰}{-۴} = ۲۵ \Rightarrow y_S = -۲(۲۵)^۲ + ۱۰۰(۲۵) = -۱۲۵۰ + ۲۵۰۰ = ۱۲۵۰$$

زرنگ باش

اگر مجموع دو متغیر، مقداری ثابت باشه، حاصل‌ضرب اونا زمانی بیش‌ترین مقدار رو داره که دو متغیر با هم برابر باشن. مثلاً حل تمرین بالا رو با این روش ببینین:

$$y + ۲x = ۱۰۰ \Rightarrow y = ۲x = ۵۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۵۰ \\ x = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow S = xy = ۲۵ \times ۵۰ = ۱۲۵۰$$

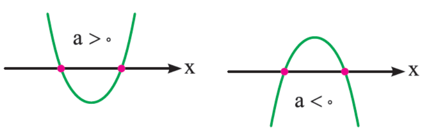
صفرهای سهمی

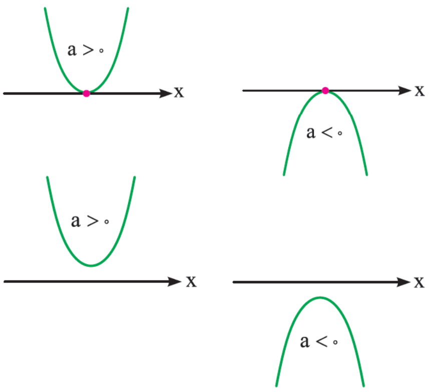
به‌طور کلی طول نقاط برخورد یک تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم. *(در واقع در صفرهای تابع، مقدار تابع صفر میشه.)* بنابراین صفرهای سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$، طول نقاط تلاقی سهمی با محور xها *(در صورت وجود)* هستند.

به‌دست آوردن تلاقی سهمی با محورهای مختصات: می‌خواهیم تلاقی سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ با محورهای مختصات را به‌دست آوریم:

۱ تلاقی با محور xها: برای به‌دست آوردن نقطه یا نقاط تلاقی سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ با محور xها *(که همان صفرهای سهمی می‌باشند.)* در صورت وجود، باید معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ را حل کنیم. با توجه به علامت Δ می‌توان گفت:

الف اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای ۲ ریشهٔ متمایز است، پس سهمی محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

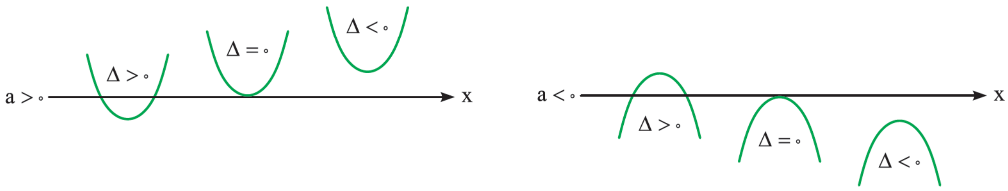




ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف است، پس سهمی در یک نقطه بر محور xها مماس می‌شود. طول نقطهٔ تماس، همان طول نقطهٔ رأس سهمی یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، پس سهمی محور xها را قطع نمی‌کند.

اینجوری هم ببین وضعیت سهمی و محور xها با توجه به علامت Δ و علامت ضریب x^2 به‌صورت‌های زیر است:



صفرهای هر سهمی را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $y = x^2 - 6x + 8$ ب) $y = x^2 - x - 12$

پ) $y = x^2 - 6x + 9$ ت) $y = x^2 + x + 5$

برای به‌دست آوردن صفرهای سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$، باید معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ را به‌دست آوریم، پس:

الف) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

ب) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$

پ) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

ت) $x^2 + x + 5 = 0 \xRightarrow{\Delta < 0}$ صفر ندارد.

سهمی $y = x^2 - 4x + 3m - 1$ یک صفر دارد. مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲ چون سهمی یک صفر دارد، پس باید در معادلهٔ $x^2 - 4x + 3m - 1 = 0$، دلتا برابر صفر باشد، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(3m-1) = 0 \Rightarrow 16 - 12m + 4 = 0 \Rightarrow 12m = 20 \Rightarrow m = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

سهمی $y = mx^2 - 6x + 2$ دو صفر دارد. بیش‌ترین مقدار صحیح m کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۶

۲ باید دلتای معادلهٔ $mx^2 - 6x + 2 = 0$ بزرگ‌تر از صفر باشد، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(m)(2) > 0 \Rightarrow 36 - 8m > 0 \Rightarrow 8m < 36 \Rightarrow m < \frac{36}{8} \Rightarrow m < \frac{9}{2}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار صحیح m برابر ۴ است.

کتاب درسی صفحه ۱۵

فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $۲۰m/s$ شوت می‌کند. معادلهٔ مسیر حرکت توپ تابع درجهٔ دو با ضابطهٔ $y=-\frac{۱}{۴۰}x^۲+x$ است که x مسافت افقی طی‌شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین می‌باشد. (مثال صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

ب) حداکثر مسافت افقی طی‌شده توسط توپ چقدر است؟

پ) صفرهای تابع مسیر حرکت توپ از نظر فیزیکی چه معنایی دارند؟

الف) مسیر حرکت توپ یک سهمی رو به پایین است پس حداکثر ارتفاع توپ همان عرض رأس سهمی می‌باشد:

$$x_S=-\frac{۱}{۲(-\frac{۱}{۴۰})}=-\frac{۱}{-\frac{۱}{۲۰}}=۲۰ \Rightarrow y_S=-\frac{۱}{۴۰}(۲۰)^۲+۲۰=-\frac{۱}{۴۰}\times۴۰۰+۲۰=-۱۰+۲۰=۱۰$$

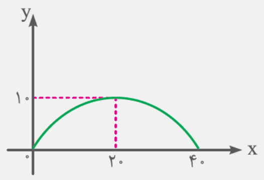
بنابراین حداکثر ارتفاع توپ ۱۰ متر است.

ب) صفرهای سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{۱}{۴۰}x^۲+x=۰ \Rightarrow x(-\frac{۱}{۴۰}x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۴۰ \end{cases}$$

بنابراین حداکثر مسافت افقی طی‌شده توسط توپ ۴۰ متر است.

پ) $x=۰$ نقطه‌ای است که فوتبالیست توپ را شوت می‌کند و $x=۴۰$ نقطهٔ فرود دوبارهٔ توپ به زمین است.



تمامی مطالبی که در مورد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم خواندیم، در مورد صفرهای سهمی نیز برقرارند. مثلاً اگر $x_۱$ و $x_۲$ صفرهای سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشند، داریم:

$\lvert x_۱-x_۲\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$x_۱x_۲=\frac{c}{a}$	$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$

محاسبهٔ عبارت‌های متقارن و نامتقارن برحسب صفرها و تعیین علامت صفرها توسط ضرایب سهمی دقیقاً مانند مطالبی است که در مورد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم آموختیم.

کتاب درسی صفحه ۱۶

در هر مورد بدون محاسبهٔ صفرها، تعداد صفرها و علامت آن‌ها را تعیین کنید. (کار در کلاس صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

الف) $y=x^۲+۶x+۵$ **ب) $y=x^۲+۴x-۵$**

پ) $y=۳x^۲-۷x+۱$ **ت) $y=-x^۲+۲x-۱$**

الف) علامت Δ در معادلهٔ $x^۲+۶x+۵=۰$ تعداد صفرها را معلوم می‌کند:

$\Delta=۶^۲-۴(۱)(۵)=۳۶-۲۰=۱۶ \xrightarrow{\Delta>۰}$ سهمی دو صفر دارد.

علامت حاصل‌ضرب صفرها و هم‌چنین علامت مجموع صفرها، علامت صفرها را معلوم می‌کنند:

$P=\frac{c}{a} \Rightarrow P=\frac{۵}{۱}=۵ \xrightarrow{P>۰}$ صفرهای سهمی هم‌علامت هستند.

$S=-\frac{b}{a} \Rightarrow S=-\frac{۶}{۱}=-۶ \xrightarrow{S<۰}$ هر دو صفر سهمی منفی هستند.

ب) ابتدا علامت Δ را برای معادلهٔ $x^۲+۴x-۵=۰$ تعیین می‌کنیم:

$\Delta=۴^۲-۴(۱)(-۵)=۱۶+۲۰=۳۶ \xrightarrow{\Delta>۰}$ سهمی دو صفر دارد.

البته در معادلهٔ $x^۲+۴x-۵=۰$، چون a و c مختلف‌العلامت هستن پس حتماً Δ بزرگ‌تر از صفره و سهمی دو تا صفر داره.

حال علامت P و S را معلوم می‌کنیم:

$P=\frac{c}{a} \Rightarrow P=\frac{-۵}{۱}=-۵ \xrightarrow{P<۰}$ صفرها مختلف‌العلامت هستند.

$S=-\frac{b}{a} \Rightarrow S=-\frac{۴}{۱}=-۴ \xrightarrow{S<۰}$ قدرمطلق صفر منفی از صفر مثبت بزرگ‌تر است.

پ) علامت Δ را برای معادلهٔ $۳x^۲-۷x+۱=۰$ تعیین می‌کنیم:

$\Delta=(-۷)^۲-۴(۳)(۱)=۴۹-۱۲=۳۷ \xrightarrow{\Delta>۰}$ سهمی دو صفر دارد.

حال علامت P و S را معلوم می‌کنیم:

صفرها هم‌علامت هستند. $P=\frac{c}{a}\Rightarrow P=\frac{۱}{۳}\xRightarrow{P>۰}$

هر دو صفر مثبت هستند. $S=-\frac{b}{a}\Rightarrow S=-\frac{-۷}{۳}=\frac{۷}{۳}\xRightarrow{S>۰}$

ت) علامت Δ را در معادلهٔ $-x^۲+۲x-۱=۰$ تعیین می‌کنیم:

سهمی یک صفر دارد. $\Delta=۲^۲-۴(-۱)(-۱)=۴-۴=۰\xRightarrow{\Delta=۰}$

صفر سهمی برابر $۱=-\frac{۲}{۲(-۱)}=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد پس مثبت است.

سهمی $y=x^۲+x-۶$ ، محور xها را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳ باید معادلهٔ $x^۲+x-۶=۰$ را حل کنیم تا طول نقاط تلاقی سهمی با محور xها معلوم شود:

$$x^۲+x-۶=۰\Rightarrow(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۲$$

بنابراین سهمی $y=x^۲+x-۶$ محور xها را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۳- قطع می‌کند، پس طول پاره‌خط AB برابر ۵ است.

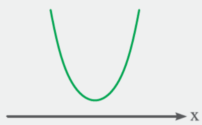
البته می‌تونستیم از تفاضل ریشه‌ها یعنی $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ هم طول پاره‌خط AB رو به‌دست بیاریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۱^۲-۴(۱)(-۶)}}{۱}=\sqrt{۱+۲۴}=\sqrt{۲۵}=۵$$

حدود m برای آن‌که سهمی $f(x)=mx^۲+(۲m+۱)x+m+۳$ بالای محور xها بوده و محور xها را قطع نکند، کدام است؟

۱) $m>۰$ ۲) $۰<m<\frac{۱}{۸}$ ۳) $m>\frac{۱}{۸}$ ۴) $m>\frac{۱}{۴}$

۳ برای آن‌که سهمی بالای محور xها بوده و آن را قطع نکند باید ضریب $x^۲$ مثبت و هم‌چنین $\Delta<۰$ باشد:

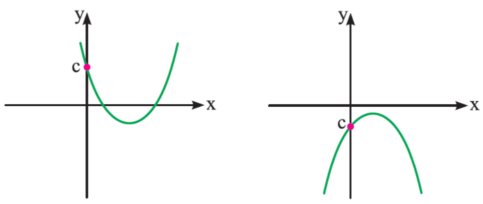


$$\begin{cases} x^۲\text{ضریب}>۰\Rightarrow m>۰\\ \Delta<۰\Rightarrow(۲m+۱)^۲-۴(m)(m+۳)<۰\Rightarrow\cancel{۴m^۲}+۴m+۱-\cancel{۴m^۲}-۱۲m<۰\\ \Rightarrow-۸m+۱<۰\Rightarrow ۸m>۱\Rightarrow m>\frac{۱}{۸}\end{cases}$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده برای m داریم:

$$\begin{cases}m>۰\\ m>\frac{۱}{۸}\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}}m>\frac{۱}{۸}$$

۲ تلاقی با محور yها: سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ محور yها را با عرض c قطع می‌کند؛ زیرا:



$$f(x)=ax^۲+bx+c\xRightarrow[x=۰]{\text{تلاقی با محور yها}}y=a(۰)^۲+b(۰)+c\Rightarrow y=c$$

زرنگ باش

اگر ضابطهٔ سهمی به فرم $f(x)=a(x-h)^۲+k$ باشه حتماً یا باید ضابطه‌اش رو به فرم $f(x)=ax^۲+bx+c$ در بیاری و بگی c عرض نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yهاست یا بری در ضابطهٔ $f(x)=a(x-h)^۲+k$ به x مقدار صفر بدی و مقدار y رو به‌دست بیاری.

سهمی $f(x)=۲(x+۱)^۲-۳$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱ **روش اول:** کافی است در معادلهٔ سهمی به جای x مقدار صفر را قرار دهیم:

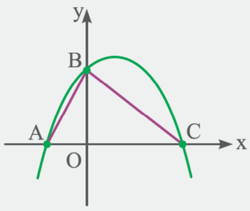
$$f(۰)=۲(۰+۱)^۲-۳=۲-۳=-۱$$

روش دوم: ضابطهٔ سهمی را به صورت $f(x)=۲x^۲+۴x-۱$ می‌نویسیم، پس سهمی محور yها را با عرض -۱ قطع می‌کند.

صفرهای سهمی $y=-x^۲+۲x+۱۵$ و نقطهٔ تلاقی آن با محور yها رأس‌های مثلث ABC هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۳ به شکل مقابل دقت کنید. AC قاعدهٔ مثلث و OB ارتفاع آن است. بنابراین ابتدا صفرهای سهمی را به‌دست می‌آوریم:



$$-x^۲+۲x+۱۵=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۱۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow AC=۵-(-۳)=۸$$

حال نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yها را به‌دست می‌آوریم که می‌دانیم برابر ۱۵ است، پس $OB=۱۵$ می‌باشد. حال داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times AC\times OB=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۵=۶۰$$

رسم سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$

برای رسم سهمی، ابتدا مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم. سپس با مشخص کردن نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yها، می‌توانیم سهمی را تقریبی رسم کنیم. حال اگر صفر یا صفرهای سهمی در صورت وجود، در سؤال خواسته شده باشد، باید آن‌ها را هم معلوم کنیم. توجه کنید علامت a جهت دهانهٔ سهمی را معلوم می‌کند امّا با معلوم شدن رأس و نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yها، خودبه‌خود جهت دهانهٔ سهمی معلوم می‌شود.

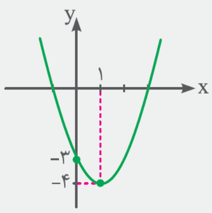
نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=x^۲-۲x-۳$ ب) $y=-x^۲+۳x+۴$ پ) $y=x^۲-۴x+۴$ ت) $y=x^۲-۲x+۵$

الف) ابتدا مختصات رأس سهمی $y=x^۲-۲x-۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow x_S=-\frac{-۲}{۲(۱)}=۱ \Rightarrow y_S=۱^۲-۲(۱)-۳=۱-۲-۳=-۴ \Rightarrow S(۱,-۴)$$

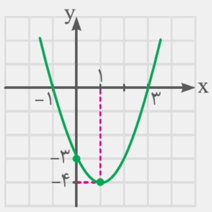
از طرفی سهمی محور yها را با عرض -۳ قطع می‌کند. بنابراین نمودار سهمی به‌صورت زیر است:



حال اگر می‌خواستیم سهمی را دقیق‌تر رسم کنیم باید صفرهای سهمی را نیز معلوم کنیم:

$$x^۲-۲x-۳=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=۳ \end{cases}$$

بنابراین نمودار دقیق‌تر سهمی به‌صورت مقابل است:



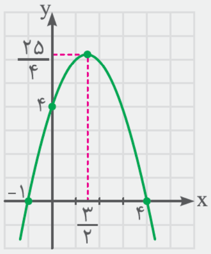
ب) مختصات رأس سهمی $y=-x^{۲}+۳x+۴$ ، عرض نقطهٔ تلاقی آن با محور yها و صفرهای سهمی را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x_S=-\frac{۳}{۲(-۱)}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y_S=-(\frac{۳}{۲})^{۲}+۳(\frac{۳}{۲})+۴=-\frac{۹}{۴}+\frac{۹}{۲}+۴=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow S(\frac{۳}{۲},\frac{۲۵}{۴})$$

عرض نقطهٔ تلاقی با محور yها برابر ۴ است و صفرهای سهمی برابرند با:

$$-x^{۲}+۳x+۴=۰\xRightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-۱\\x=۴\end{cases}$$

حال نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:

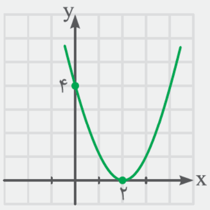


پ) برای رسم سهمی $y=x^{۲}-۴x+۴$ داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x_S=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲\Rightarrow y_S=۲^{۲}-۴(۲)+۴=۴-۸+۴=۰\Rightarrow S(۲,۰)$$

عرض نقطهٔ تلاقی با محور yها برابر ۴ است و داریم:

$$x^{۲}-۴x+۴=۰\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۰\Rightarrow x=۲$$

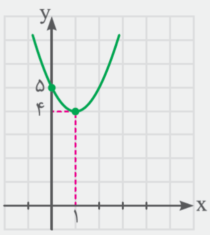


ت) برای رسم سهمی $y=x^{۲}-۲x+۵$ داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x_S=-\frac{-۲}{۲(۱)}=۱\Rightarrow y_S=۱^{۲}-۲(۱)+۵=۴\Rightarrow S(۱,۴)$$

عرض نقطهٔ تلاقی با محور yها برابر ۵ است و داریم: $x^{۲}-۲x+۵=۰\Rightarrow \Delta=(-۲)^{۲}-۴(۱)(۵)=۴-۲۰=-۱۶\xRightarrow{\Delta<۰}$ سهمی صفر ندارد.

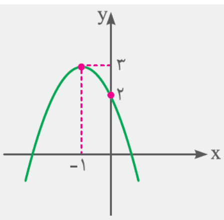
بنابراین نمودار سهمی به‌صورت زیر است:



نمودار سهمی $y=-(x+۱)^{۲}+۳$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول
۲) چهارم
۳) سوم
۴) از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.

۴ رأس سهمی $(-۱,۳)$ است و سهمی محور yها را با عرض $y=-(۰+۱)^{۲}+۳=-۱+۳=۲$ قطع می‌کند. نمودار سهمی به‌صورت مقابل است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید نمودار سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.



تلاقی یک سهمی با خط یا سهمی دیگر

برای به‌دست آوردن نقطه یا نقاط تلاقی سهمی با خط یا سهمی دیگر، ابتدا در هر دو ضابطه، y را تنها می‌کنیم. سپس yها را با هم مساوی قرار می‌دهیم و ریشه یا ریشه‌های معادلهٔ حاصل را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم. *(به این معادله میگن، معادلهٔ تلاقی.)* با جای‌گذاری x یا xهای به‌دست آمده در هر یک از ضابطه‌ها، عرض نقطه یا نقاط تلاقی به‌دست می‌آید.

مجموع طول و عرض نقطهٔ تلاقی سهمی $f(x)=x^۲-۲x-۸$ و خط $y-x-۲=۰$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) -۲

۴ ابتدا y را در هر دو ضابطه تنها می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} y=x^۲-۲x-۸ \\ y=x+۲ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۲x-۸=x+۲ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۵\ ,\ x=-۲$$

حال xهای به‌دست آمده را در یکی از ضابطه‌ها قرار می‌دهیم تا عرض نقاط تلاقی به‌دست آید.

(اگه تو ضابطهٔ خط جای‌گذاری کنیم، y سریع‌تر به‌دست میاد.)

$$y=x+۲ \xRightarrow{x=۵} y=۵+۲ \Rightarrow y=۷ \Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}=(۵\ ,۷) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=۵+۷=۱۲$$

$$y=x+۲ \xRightarrow{x=-۲} y=-۲+۲ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}=(-۲\ ,\ ۰) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=(-۲)+۰=-۲$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید -۲ در گزینه‌ها وجود دارد.

مجموع طول و عرض یکی از نقاط تلاقی سهمی‌های $f(x)=x^۲-۳x+۴$ و $g(x)=-x^۲+x+۱۰$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱ معادلهٔ تلاقی دو سهمی را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=x^۲-۳x+۴ \\ y=-x^۲+x+۱۰ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۳x+۴=-x^۲+x+۱۰ \Rightarrow ۲x^۲-۴x-۶=۰ \xRightarrow{\div ۲} x^۲-۲x-۳=۰ \xRightarrow{۱+(-۳)=-۲} x=-۱\ ,\ x=۳$$

حال عرض نقاط را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x^۲-۳x+۴ \xRightarrow{x=-۱} y=(-۱)^۲-۳(-۱)+۴=۱+۳+۴=۸ \Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}=(-۱,۸) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=-۱+۸=۷$$

$$y=x^۲-۳x+۴ \xRightarrow{x=۳} y=(۳)^۲-۳(۳)+۴=۹-۹+۴=۴ \Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}=(۳,۴) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=۳+۴=۷$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مجموع طول و عرض هر دو نقطهٔ تلاقی برابر ۷ است. *(همیشه اینطوری نیستا. شانسی هر دو برابر شدن.)*

خط $y+x=m$ سهمی $y=x^۲+۴x+۶$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m>-\frac{۱}{۴}$ ۲) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۳) $m<\frac{۱}{۲}$ ۴) $m>۲$

۱ ابتدا معادلهٔ تلاقی سهمی و خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=x^۲+۴x+۶ \\ y=-x+m \end{cases} \Rightarrow x^۲+۴x+۶=-x+m \Rightarrow x^۲+۵x+۶-m=۰$$

حال برای آن‌که این معادله دو ریشه داشته باشد باید دلتای آن بزرگ‌تر از صفر باشد، پس:

$$\Delta>۰ \Rightarrow ۵^۲-۴(۱)(۶-m)>۰ \Rightarrow ۲۵-۲۴+۴m>۰ \Rightarrow ۴m>-۱ \Rightarrow m>-\frac{۱}{۴}$$

تعیین علامت ضرایب تابع درجهٔ دوم از روی نمودار آن

در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ علامت b ،a و c از روی نمودار آن به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

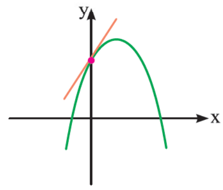
❶ جهت دهانهٔ سهمی، علامت a را مشخص می‌کند. اگر دهانهٔ سهمی، رو به بالا باشد، $a>۰$ و اگر رو به پایین باشد، $a<۰$ است.

❷ نقطهٔ برخورد نمودار تابع با محور yها، همان c است. اگر سهمی محور yها را در قسمت مثبت‌ها قطع کند، $c>۰$ و اگر در قسمت منفی‌ها قطع کند، $c<۰$ و اگر از مبدأ مختصات بگذرد، $c=۰$ است.

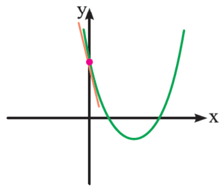
❸ طول رأس سهمی یعنی $x_S=-\frac{b}{۲a}$ به تعیین علامت b کمک می‌کند. علامت a که به کمک جهت دهانهٔ سهمی مشخص شده، حال به کمک مثبت یا منفی بودن طول رأس سهمی، علامت b هم معلوم می‌شود.

زنگ باش

علامت b رو میشه با شیب خط مماس بر سهمی، در نقطهٔ برخورد اون با محور yها هم تعیین کرد. اگه شیب خط مماس در این نقطه، مثبت باشه، $b>0$ و اگه شیب خط مماس، منفی باشه، $b<0$ است.



$b>0 \Rightarrow$ شیب خط مماس مثبت است.

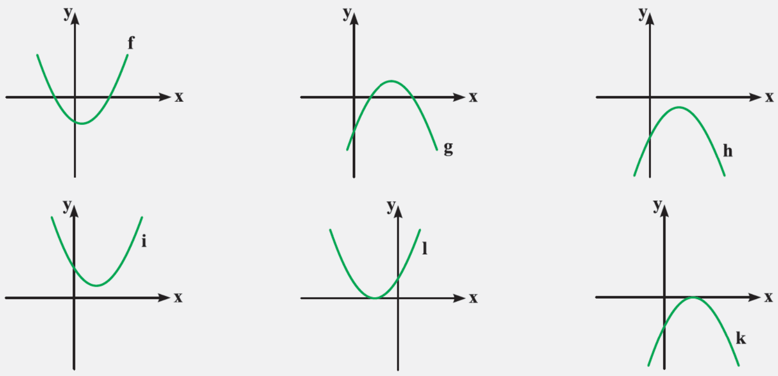


$b<0 \Rightarrow$ شیب خط مماس منفی است.

۴ علامت Δ هم توسط تعداد ریشه‌های سهمی معلوم می‌شود. اگر دو ریشه داشته باشد، $\Delta > 0$، اگر ریشهٔ مضاعف داشته باشد، $\Delta = 0$ و اگر محور xها را قطع نکند، $\Delta < 0$ می‌باشد.

کتاب درسی صفحه ۱۷

در هر یک از سهمی‌ها با فرض این‌که ضابطهٔ آن‌ها $y = ax^2 + bx + c$ باشد، جدول داده‌شده را کامل کنید. (کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

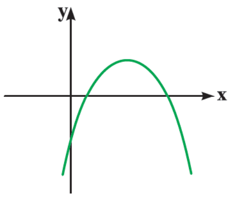


تابع / ویژگی	f	g	h	i	l	k
علامت a						
علامت b						
علامت c						
تعداد ریشه‌های متمایز						
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)						

در مورد سطر اول چون دهانهٔ سهمی‌های f، i، l رو به بالا است پس علامت a در آن‌ها مثبت و در بقیه موارد چون دهانهٔ سهمی‌ها رو به پایین است علامت a منفی می‌باشد. در مورد سهمی‌های f و i چون شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی آن‌ها با محور yها منفی است پس علامت b منفی و در بقیهٔ موارد مثبت است. در مورد سطر سوم چون سهمی‌های i و l محور yها را با عرض مثبت قطع می‌کنند پس علامت c مثبت و در بقیهٔ موارد چون محور yها را با عرض منفی قطع می‌کنند علامت c منفی می‌باشد. تعداد ریشه‌ها و علامت آن‌ها هم از روی نمودار مشخص است، پس جدول به‌صورت زیر است:

تابع / ویژگی	f	g	h	i	l	k
علامت a	+	−	−	+	+	−
علامت b	−	+	+	−	+	+
علامت c	−	−	−	+	+	−
تعداد ریشه‌های متمایز	۲	۲	صفر	صفر	۱	۱
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی مثبت یکی منفی	هر دو مثبت	—	—	منفی	مثبت

اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به‌صورت مقابل باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟



۱) $c < 0 \ , \ b > 0 \ , \ a > 0$

۲) $c > 0 \ , \ b < 0 \ , \ a > 0$

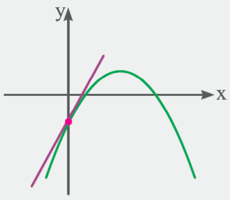
۳) $c < 0 \ , \ b > 0 \ , \ a < 0$

۴) $c < 0 \ , \ b < 0 \ , \ a < 0$

۳ چون دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ می‌باشد. طول رأس سهمی مثبت است، پس:

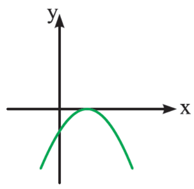
$$x_S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \xRightarrow{a<0} b > 0$$

البته از روی شیب خط مماس در نقطهٔ تلاقی آن با محور yها هم می‌توان فهمید که $b > 0$ است. هم‌چنین چون سهمی محور yها را در قسمت منفی قطع می‌کند، $c < 0$ می‌باشد.

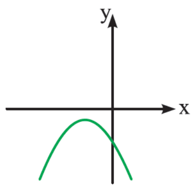


گذشتن سهمی از نواحی مختصات

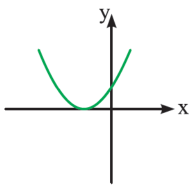
هر سهمی حداقل از دو ناحیهٔ مختصات می‌گذرد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



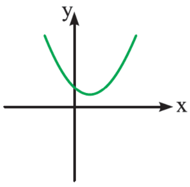
از دو ناحیه می‌گذرد.



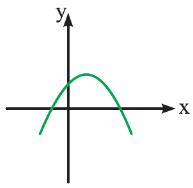
از دو ناحیه می‌گذرد.



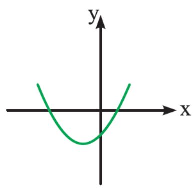
از دو ناحیه می‌گذرد.



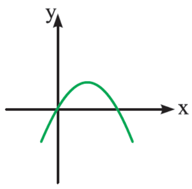
از دو ناحیه می‌گذرد.



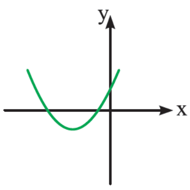
از چهار ناحیه می‌گذرد.



از چهار ناحیه می‌گذرد.



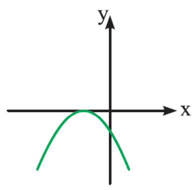
از سه ناحیه می‌گذرد.



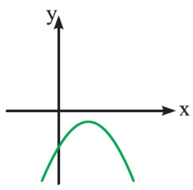
از سه ناحیه می‌گذرد.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که سهمی‌هایی که از دو ناحیه، سه ناحیه یا چهار ناحیه می‌گذرند، چه ویژگی یا ویژگی‌هایی دارند.

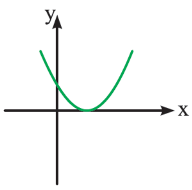
الف سهمی‌هایی که فقط از دو ناحیه می‌گذرند: سهمی‌هایی که فقط از دو ناحیه می‌گذرند یا از ناحیه‌های اول و دوم می‌گذرند یا از ناحیه‌های سوم و چهارم. در این حالت $\Delta \leq 0$ می‌باشد و اگر $a > 0$ باشد سهمی از ناحیه‌های اول و دوم و اگر $a < 0$ سهمی از ناحیه‌های سوم و چهارم می‌گذرد.



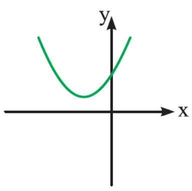
$\Delta = 0 \ , \ a < 0$



$\Delta < 0 \ , \ a < 0$



$\Delta = 0 \ , \ a > 0$



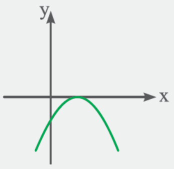
$\Delta < 0 \ , \ a > 0$

اینجوری هم ببین هیچ حالتی را حفظ نکنین. برای حل مسئله یک شکل فرضی بکشید و بعد شرایط لازم رو ایجاد کنین.

کدام سهمی زیر فقط از نواحی سوم و چهارم دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۱) $y=۲x^۲-x+۴$ ۲) $y=-۲x^۲+۳x-۵$ ۳) $y=x^۲-۵x-۲$ ۴) $y=-x^۲+۵x-۱$

۲ به شکل مقابل دقت کنید. باید $\Delta \le ۰$ و $a<۰$ باشد. فقط در گزینهٔ (۲)، این شرایط برقرار است.

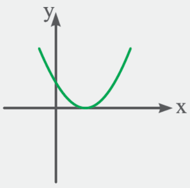


در گزینهٔ (۱)، $\Delta<۰$ و $a>۰$ است پس سهمی از نواحی اول و دوم می‌گذرد. در گزینه‌های (۳) و (۴)، $\Delta>۰$ است.

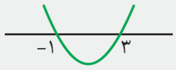
سهمی $y=(m-۲)x^۲-۶x+۳m$ فقط از نواحی اول و دوم دستگاه مختصات می‌گذرد. مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $-۱\le m\le ۳$ ۲) $۲<m\le ۳$ ۳) $m\ge ۳$ ۴) $-۳\le m<۱$

۳ با توجه به شکل مقابل برای این‌که سهمی فقط از ناحیه‌های اول و دوم بگذرد، باید $\Delta\le ۰$ و $a>۰$ باشد، پس:

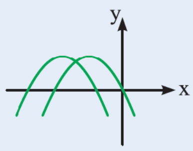
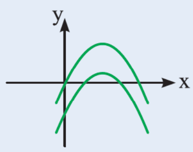
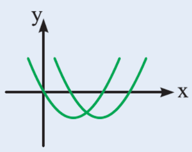
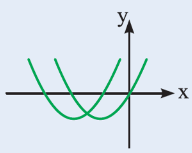


$m-۲>۰ \Rightarrow m>۲$

$\Delta\le ۰ \Rightarrow (-۶)^۲-۴(m-۲)(۳m)\le ۰ \Rightarrow ۳۶-۱۲m^۲+۲۴m\le ۰ \Rightarrow m^۲-۲m-۳\ge ۰ \Rightarrow$  $\Rightarrow m\le -۱$ یا $m\ge ۳$

از اشتراک حدود به‌دست آمده $m\ge ۳$ می‌باشد.

ب سهمی‌هایی که دقیقاً از سه ناحیه می‌گذرند: در این حالت سهمی فقط از یک ناحیه نمی‌گذرد، با رسم یک شکل فرضی، باید علامت a، Δ، S و P را تعیین کنیم. حالت‌های زیر را ببینید:

وضعیت	شکل	علامت a	علامت Δ	علامت S	علامت P
فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.		$a<۰$	$\Delta>۰$	$S<۰$	$P\ge ۰$
فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.		$a<۰$	$\Delta>۰$	$S>۰$	$P\ge ۰$
فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد.		$a>۰$	$\Delta>۰$	$S>۰$	$P\ge ۰$
فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.		$a>۰$	$\Delta>۰$	$S<۰$	$P\ge ۰$

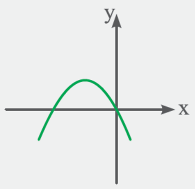
زرنگ باش

اگه $\Delta\le ۰$ باشه که سهمی فقط از دو ناحیه می‌گذره، پس اگه سهمی دقیقاً از سه ناحیه بگذره حتماً باید $\Delta>۰$ باشه. در این‌جا P هم حتماً بزرگ‌تر و یا مساوی صفره، این‌جوری یادت باشه که اگه $P<۰$ باشه که نیازی به چک کردن Δ نیست، پس این‌جا که باید مثبت بودن Δ چک بشه حتماً P منفی نیست. علامت a و S هم که با یک شکل فرضی مشخص میشه.

کدام سهمی زیر فقط از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $y=x^{۲}+۴x-۱$ ۲) $y=-۲x^{۲}-۵x-۱$ ۳) $y=-x^{۲}+x-۷$ ۴) $y=-x^{۲}+۳x+۲$

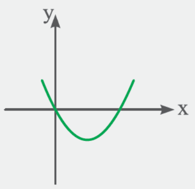
۲ با توجه به شکل مقابل، باید $a<۰$، $\Delta>۰$، $S<۰$ و $P\ge ۰$ باشد، این شرایط فقط در سهمی $y=-۲x^{۲}-۵x-۱$ برقرار است.



سهمی $y=x^{۲}-(m+۴)x+m$ فقط از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد. مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-\infty,-۴)$ ۲) $(-۴,۰]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۰,۴)$

۳ با توجه به شکل مقابل باید $a>۰$، $\Delta>۰$، $S>۰$ و $P\ge ۰$ باشد. در سهمی داده‌شده ضریب $x^{۲}$ که مثبت است، پس:



$\Delta>۰\Rightarrow(-(m+۴))^{۲}-۴(۱)(m)>۰\Rightarrow m^{۲}+۸m+۱۶-۴m>۰\Rightarrow m^{۲}+۴m+۱۶>۰\xrightarrow[a>۰]{\Delta<۰}$ همواره برقرار است.

$S>۰\Rightarrow-\dfrac{-(m+۴)}{۱}>۰\Rightarrow m+۴>۰\Rightarrow m>-۴$

$P\ge ۰\Rightarrow\dfrac{m}{۱}\ge ۰\Rightarrow m\ge ۰$

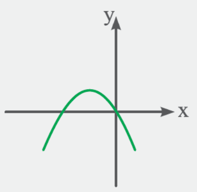
از اشتراک حدود به‌دست آمده $m\ge ۰$ می‌باشد.

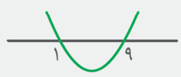
زنگ باش اگر در سؤالی لفظ «فقط» نباشه، مثلاً بگه «سهمی از ناحیهٔ سوم نمی‌گذره.» باید دو حالت رو در نظر گرفت. ۱ سهمی فقط از ناحیهٔ سوم نگذره. ۲ سهمی از نواحی سوم و چهارم نگذره. سپس اجتماع حدود به‌دست اومده برای پارامتر، محدودهٔ پارامتر رو مشخص می‌کنه.

سهمی $y=-۴x^{۲}-(m+۳)x-m$ از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد. مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $m>۹$ ۲) $m\ge ۰$ ۳) $۰\le m\le ۱$ ۴) $۱\le m\le ۹$

۲ ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که سهمی فقط از ناحیهٔ اول نگذرد، پس $a<۰$، $\Delta>۰$، $S<۰$ و $P\ge ۰$ است. در سهمی داده‌شده ضریب $x^{۲}$ که منفی هست، پس:



$\Delta>۰\Rightarrow(-(m+۳))^{۲}-۴(-۴)(-m)>۰\Rightarrow m^{۲}+۶m+۹-۱۶m>۰\Rightarrow m^{۲}-۱۰m+۹>۰\Rightarrow$  $\Rightarrow m<۱$ یا $m>۹$

$S<۰\Rightarrow-\dfrac{-(m+۳)}{(-۴)}<۰\Rightarrow m+۳>۰\Rightarrow m>-۳$

$P\ge ۰\Rightarrow\dfrac{-m}{-۴}\ge ۰\Rightarrow\dfrac{m}{۴}\ge ۰\Rightarrow m\ge ۰$

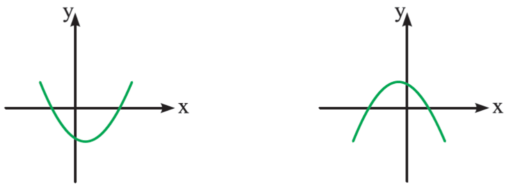
از اشتراک حدود به‌دست آمده، $۰\le m<۱$ یا $m>۹$ می‌باشد. حال حالتی را در نظر می‌گیریم که سهمی از نواحی اول و دوم نگذرد، پس باید $\Delta\le ۰$ و $a<۰$ باشد حال داریم:

$\Delta\le ۰\Rightarrow ۱\le m\le ۹$

از اجتماع حدود به‌دست آمده $m\ge ۰$ می‌باشد.

پ) سهمی از چهار ناحیهٔ مختصات می‌گذرد: در این حالت کافی است سهمی یک صفر مثبت و یک صفر منفی داشته باشد، پس باید $P<۰$ باشد.

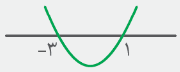
واضح است که نیازی به چک کردن Δ نیست، چون وقتی $\frac{c}{a}<۰$ است، حتماً $\Delta=b^۲-۴ac$ مثبت می‌باشد.



سهمی $y=(m-۱)x^۲+۲mx+(m+۳)$ از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات می‌گذرد. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲ باید $P<۰$ باشد، پس:

$\frac{m+۳}{m-۱}<۰ \xrightarrow{\text{انگار}} (m+۳)(m-۱)<۰ \Rightarrow$  $\Rightarrow -۳<m<۱$

بنابراین m می‌تواند سه مقدار صحیح بپذیرد.

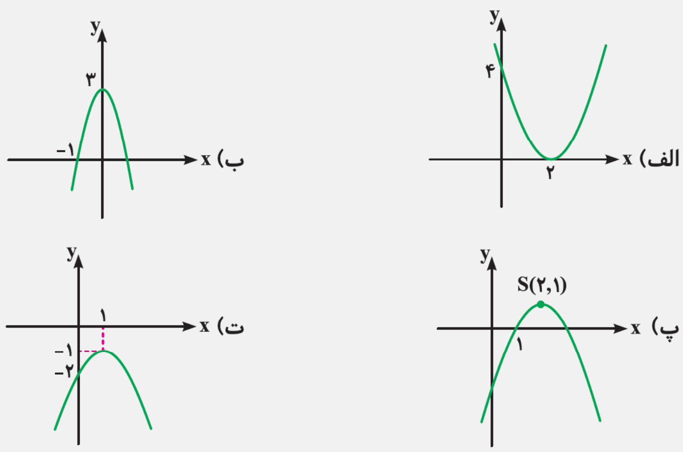
نوشتن معادلهٔ سهمی

۱ با داشتن مختصات رأس سهمی: اگر $S(h,k)$ مختصات رأس سهمی باشد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است که در آن a با اطلاعات دیگری که از سهمی داریم معلوم می‌شود:

$$y=a(x-h)^۲+k \Rightarrow y=a(x-\text{طول رأس})^۲+\text{عرض رأس}$$

کتاب درسی صفحه ۱۸

معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید. (تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)



الف) رأس سهمی $S(۲,۰)$ است و سهمی از نقطهٔ $(۰,۴)$ می‌گذرد، پس: $y=a(x-۲)^۲+۰ \xrightarrow{(۰,۴)} ۴=a(۰-۲)^۲ \Rightarrow ۴=۴a \Rightarrow a=۱$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=(x-۲)^۲$ یا $y=x^۲-۴x+۴$ می‌باشد.

ب) رأس سهمی $S(۰,۳)$ است و سهمی از نقطهٔ $(-۱,۰)$ می‌گذرد، پس: $y=a(x-۰)^۲+۳ \xrightarrow{(-۱,۰)} ۰=a(-۱)^۲+۳ \Rightarrow ۰=a+۳ \Rightarrow a=-۳$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-۳x^۲+۳$ می‌باشد.

پ) رأس سهمی $S(۲,۱)$ است و سهمی از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد، پس: $y=a(x-۲)^۲+۱ \xrightarrow{(۱,۰)} ۰=a(۱-۲)^۲+۱ \Rightarrow ۰=a+۱ \Rightarrow a=-۱$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-(x-۲)^۲+۱$ یا $y=-x^۲+۴x-۳$ می‌باشد.

ت) رأس سهمی $S(۱,-۱)$ است و سهمی از نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌گذرد، پس: $y=a(x-۱)^۲-۱ \xrightarrow{(۰,-۲)} -۲=a(۰-۱)^۲-۱ \Rightarrow -۲=a-۱ \Rightarrow a=-۱$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-(x-۱)^۲-۱$ یا $y=-x^۲+۲x-۲$ می‌باشد.

اگر نقطهٔ $(-2,1)$ رأس تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد که از نقطهٔ $(3,4)$ می‌گذرد، مقدار $f(-7)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

۱ معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$f(x)=a(x-(-2))^2+1 \xrightarrow{(3,4)} 4=a(3+2)^2+1 \Rightarrow 25a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{25}$$

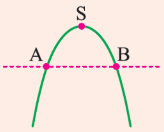
بنابراین $f(x)=\frac{3}{25}(x+2)^2+1$ بوده و داریم:

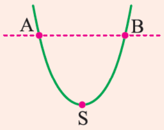
$$f(-7)=\frac{3}{25}(-7+2)^2+1 \Rightarrow f(-7)=\frac{3}{25}\times 25+1=4$$

نکته

اگر دو نقطهٔ هم‌عرض سهمی را داشته باشیم، طول رأس سهمی برابر است با:

$$\boxed{x_S=\frac{x_A+x_B}{2}}$$





یعنی طول رأس سهمی برابر با میانگین طول هر دو نقطهٔ هم‌عرض از سهمی است.

(حتماً از ریاضی (۱) یادت هست که محور تقارن سهمی همون خط $x=x_S$ هستش. پس اگه یک صفر سهمی و معادلهٔ محور تقارن اونو داشته باشیم، می‌تونیم صفر دیگه سهمی رو هم پیدا کنیم. صفرهای سهمی نقاط هم‌عرض از سهمی هستن.)

سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ از نقاط $(1,-5)$، $(3,19)$ و $(-3,-5)$ می‌گذرد. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) -10 ۲) -12 ۳) -13 ۴) -18

۳ چون نقاط $(1,-5)$ و $(-3,-5)$ هم‌عرض هستند، پس طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

با فرض این‌که عرض رأس سهمی k باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x+1)^2+k$ است. حال داریم:

$$\begin{cases} f(x)=a(x+1)^2+k \xrightarrow{(3,19)} 19=a(3+1)^2+k \Rightarrow 19=16a+k \\ f(x)=a(x+1)^2+k \xrightarrow{(1,-5)} -5=a(1+1)^2+k \Rightarrow -5=4a+k \end{cases} \Rightarrow 19-(-5)=16a-4a \Rightarrow 24=12a \Rightarrow a=2$$

با قرار دادن $a=2$ در هر یک از معادلات، مقدار k برابر -13 می‌شود. پس عرض رأس سهمی -13 است.

(وقتی ضابطهٔ سهمی رو نوشتیم، یه بار نقطه‌ای که استفاده نکرده بودیم و بار دیگه یکی از نقاطی که باهاشون، طول رأس سهمی رو پیدا کرده بودیم رو تو ضابطه جای‌گذاری کردیم تا a و k معلوم بشن!)

زرنگ باش

ممکنه هیچ دو نقطه از سه نقطه‌ای که سهمی از آن‌ها می‌گذره هم‌عرض نباشن، در این صورت باید سه نقطه رو در ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ جایگذاری کنین و از معادلات حاصل مقادیر a، b و c رو به‌دست بیارین.

یک سهمی از نقاط $A(1,2)$، $B(0,-3)$ و $C(3,18)$ می‌گذرد. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۲ فرض می‌کنیم سهمی به‌صورت $y=ax^2+bx+c$ باشد. چون سهمی از نقطهٔ $B(0,-3)$ می‌گذرد پس $c=-3$ است. حال داریم:

$$y=ax^2+bx-3 \xrightarrow{A(1,2)} 2=a(1)^2+b(1)-3 \Rightarrow 2=a+b-3 \Rightarrow a+b=5$$

$$y=ax^2+bx-3 \xrightarrow{C(3,18)} 18=a(3)^2+b(3)-3 \Rightarrow 18=9a+3b-3 \Rightarrow 9a+3b=21 \Rightarrow 3a+b=7$$

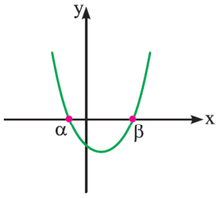
حال داریم:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 3a+b=7 \end{cases} \xrightarrow{-} 2a=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=4 \Rightarrow y=x^2+4x-3$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با:

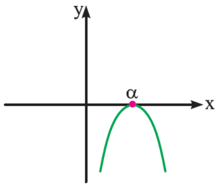
$$x_S=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S=-\frac{4}{2(1)}=-2 \Rightarrow y_S=(-2)^2+4(-2)+3=4-8+3=-1$$

۲ با داشتن صفرهای سهمی: اگر α و β صفرهای سهمی $y=f(x)$ باشند، آن‌گاه معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است که a با اطلاعات دیگری از سهمی به‌دست می‌آید:



$$\boxed{f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

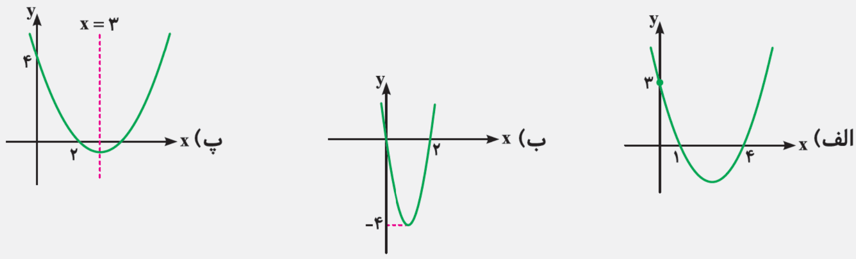
اینجوری هم ببین اگه سهمی بر محور xها در نقطهٔ $x=\alpha$ مماس باشه، اونوقت معادلهٔ اون به‌صورت زیر میشه که a با اطلاعات دیگری از سهمی به‌دست میاد:



$$\boxed{f(x)=a(x-\alpha)^{۲}}$$

کتاب درسی صفحه ۱۸

ضابطهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید. (تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)



الف) صفرهای سهمی ۱ و ۴ هستند و سهمی از نقطهٔ $(۰,۳)$ می‌گذرد، پس:

$$y=a(x-۱)(x-۴)\xRightarrow{(۰,۳)}۳=a(۰-۱)(۰-۴)\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین ضابطهٔ سهمی به‌صورت $y=\frac{۳}{۴}(x-۱)(x-۴)$ یا $y=\frac{۳}{۴}x^{۲}-\frac{۱۵}{۴}x+۳$ می‌باشد.

ب) صفرهای سهمی صفر و ۲ هستند. بنابراین طول رأس سهمی $x_S=\frac{۰+۲}{۲}=۱$ می‌باشد. حال به دو روش می‌توانیم ضابطهٔ سهمی را بنویسیم:

روش اول: رأس سهمی $S(۱,-۴)$ است و از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس:

$$y=a(x-۱)^{۲}-۴\xRightarrow{(۰,۰)}۰=a(۰-۱)^{۲}-۴\Rightarrow ۰=a-۴\Rightarrow a=۴\Rightarrow y=۴(x-۱)^{۲}-۴\Rightarrow y=۴x^{۲}-۸x$$

روش دوم: صفرهای سهمی صفر و ۲ هستند و از نقطهٔ $(۱,-۴)$ می‌گذرد، پس:

$$y=a(x-۰)(x-۲)\xRightarrow{(۱,-۴)}-۴=a(۱-۰)(۱-۲)\Rightarrow -a=-۴\Rightarrow a=۴\Rightarrow y=۴x(x-۲)\Rightarrow y=۴x^{۲}-۸x$$

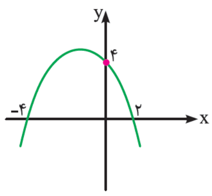
پ) خط $x=۳$ محور تقارن سهمی است و یک صفر آن ۲ می‌باشد، پس صفر دیگر سهمی برابر است با:

$$x_S=\frac{\alpha+\beta}{۲}\Rightarrow ۳=\frac{۲+\beta}{۲}\Rightarrow ۶=۲+\beta\Rightarrow \beta=۴$$

بنابراین صفرهای سهمی ۲ و ۴ بوده و از نقطهٔ $(۰,۴)$ می‌گذرد، پس:

$$y=a(x-۲)(x-۴)\xRightarrow{(۰,۴)}۴=a(۰-۲)(۰-۴)\Rightarrow ۸a=۴\Rightarrow a=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۳x+۴$$

سهمی شکل مقابل از کدام نقطهٔ زیر عبور می‌کند؟



۱) $(۴,-۶)$ ۲) $(۴,-۸)$
۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۲,۱)$

۲ ریشه‌های سهمی ۲ و ۴- هستند، پس معادلهٔ آن به صورت $f(x)=a(x+۴)(x-۲)$ است.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید سهمی از نقطهٔ $(۰,۴)$ می‌گذرد، پس: $f(۰)=۴\Rightarrow a(۰+۴)(۰-۲)=۴\Rightarrow -۸a=۴\Rightarrow a=\frac{۴}{-۸}=-\frac{۱}{۲}$

بنابراین ضابطهٔ سهمی $f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۴)(x-۲)$ می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها، این سهمی از نقطهٔ $(۴,-۸)$ می‌گذرد، چون $(۴,-۸)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند.

معادلهٔ درجه دوم

۱. روابط بین ریشه‌ها و ... ۲. به دست آوردن حاصل یک عبارت .... ۳. رابطهٔ بین ریشه‌ها ۴. علامت ریشه‌ها ۵. تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم ۶. معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم

روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله

در تست‌های این قسمت باید به فکر استفاده از مجموع، حاصل‌ضرب و تفاضل ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم به کمک ضرایب باشی نه خود ریشه‌ها...

.۱۷۰ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x-12=0$ باشد، حاصل $x_1x_2(x_1+x_2)$ کدام است؟

۱) -60 ۲) -56 ۳) -48 ۴) 56

.۱۷۱ اختلاف مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-3x-7=0$ کدام است؟ (نهایی ۱۴۰۳– حسابان)

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

.۱۷۲ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^2=5-x$ باشند، حاصل $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) 2 ۳) $-0/5$ ۴) $0/25$

.۱۷۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+4x-1=0$ و $x_2>x_1$ باشد، مقدار x_1-x_2 کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $-\sqrt{6}$ ۴) $-\sqrt{3}$

.۱۷۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشند، حاصل $(\alpha+1)(\beta+1)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

.۱۷۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $-2x^2+3x+1=0$ باشند، حاصل $x_1(3x_2-4)+x_2(5x_1-4)$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) 6 ۴) 12

.۱۷۶ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-4=0$ باشند، حاصل $|x_1^2-x_2^2|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

.۱۷۷ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)=4x$ باشند، مقدار $x_1x_2(x_1+x_2)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 4

.۱۷۸ فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار x_1+x_2 کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

.۱۷۹ اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^2-(m^2-1)x+m+1=0$ برابر ۴ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

.۱۸۰ اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2kx+5=0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. اختلاف مقادیر k کدام است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳ – با تغییر)

۱) ۹ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

.۱۸۱ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m-3)x+4=0$ با حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+m-2=0$ برابر است. مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

.۱۸۲ اگر a و 3a ریشه‌های طبیعی معادلهٔ $x^2-mx+12=0$ و b و b+11 ریشه‌های طبیعی معادلهٔ $x^2-nx+12=0$ باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

.۱۸۳ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+1)x+a=0$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a+1)x+b=0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

.۱۸۴ x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a-1)x+a+1=0$ هستند. اگر $x_1^2x_2+x_2^2x_1=15$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -4 ۴) -3

.۱۸۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $(a-3)x^2+2ax-a+2=0$ و $x_1=\dfrac{x_2}{x_2-1}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -3 ۳) ۳ ۴) -2

۱۸۶. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(m+2)x=20$ و $x_1+\frac{4}{x_2}=8$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) -6 ۴) -4

۱۸۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+16=0$ و $\sqrt{x_2}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}=5$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۸۸. تفاضل مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-12x+m+20=0$ برابر ۴۸ است. مقدار m کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

۱۸۹. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2(a+1)x+2a-1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار a، به‌ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۱۹۰. به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -4

۱۹۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(3-a)x+4=0$ و به‌ترتیب سه عدد α، a و β سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، ریشهٔ بزرگ‌تر معادله کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) -4 ۴) -1

۱۹۲. α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-8x+4=0$ هستند. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای که ریشه‌های آن $\alpha^2\beta$ و $\alpha\beta^2$ است برابر باشند، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۳. معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

۱۹۴. برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادلهٔ $-x^2+5x+m=0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{2}$ است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۹۵. برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادلهٔ $2x^2+7x+m=0$ بزرگ‌تر از -3 است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۳)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

به دست آوردن حاصل یک عبارت برحسب ریشه‌ها

می‌خوایم حاصل عبارت‌های متقارن و نامتقارن برحسب ریشه‌ها رو در معادلهٔ درجهٔ دوم به دست بیاریم...

۱۹۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+2=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+\beta^2$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۱۹۷. مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m+1)x-5m=0$ برابر ۲۹ است. مقدار m کدام است؟

۱) -2 ۲) ۱۴ ۳) -14 ۴) ۲

۱۹۸. a و b ریشه‌های معادلهٔ $(m-2)x^2-(m-2)x+2=0$ هستند. اگر $2a^2+2b^2+a+b=2$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۹۹. در معادلهٔ $x^2-4x-3=0$ مجموع مکعبات ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۹۰ ۳) ۷۲ ۴) ۱۰۰

۲۰۰. مجموع معکوس مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+2=0$ کدام است؟

۱) ۱۲/۵ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۲/۵

۲۰۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-5=0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha\beta^4+\beta\alpha^4}{\beta\alpha^3+\alpha\beta^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{62}{17}$ ۲) $-\frac{72}{19}$ ۳) $\frac{32}{13}$ ۴) $-\frac{37}{17}$

۲۰۲. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+3=0$ و $x_1>x_2$ باشد، حاصل $x_1^3-x_2^3$ کدام است؟

۱) $23\sqrt{23}$ ۲) $37\sqrt{37}$ ۳) $46\sqrt{37}$ ۴) $46\sqrt{23}$

۲۰۳. مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x-1=0$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) 3 ۴) -3

۲۰۴. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ می‌باشد؟ (ریاضی داخل ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۰۵. اختلاف جذر دو ریشهٔ معادلهٔ $x^2-3mx+m=0$ برابر ۱ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $2x^2+mx-m=0$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۴)

۱) $-\frac{1}{18}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۰۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۰۷. مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادلهٔ $36x^2-(m+14)x+1=0$ برابر ۵ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $mx^2+3x+2=0$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3 (تجربی داخل ۱۴۰۴)

۲۰۸. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+4=0$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۰۹. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-16x+9=0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{17}$ ۲) $3\sqrt{22}$ ۳) $\sqrt{22}$ ۴) ۱۰

۲۱۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x-2=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_1+1}$ کدام است؟

۱) ۲/۴ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۸ ۴) ۳/۲

۲۱۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $(\alpha+\frac{3}{\beta})^3+(\beta+\frac{3}{\alpha})^3$ کدام است؟

۱) ۳۲۰۴ ۲) ۳۳۲۸ ۳) ۳۴۱۲ ۴) ۳۶۰۰

۲۱۲. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=4-x^2$ باشند، حاصل $\frac{1}{(x_2+1)^3}+\frac{1}{(x_1+1)^3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{64}$ ۲) $-\frac{11}{8}$ ۳) $-\frac{13}{64}$ ۴) $-\frac{7}{27}$

۲۱۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x-2=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+7\beta+2$ کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۳ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۲۱۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-7=0$ باشند، حاصل $2x_1^2-3x_2+\sqrt{2x_1^2+3x_1+18}$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۱۶/۵

۲۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ باشند، حاصل $2\alpha^3+22\beta$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۸۸ ۳) ۷۸ ۴) ۶۸

۲۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha+\beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

۲۱۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+x-1=0$ باشند و $x_2>x_1$، مقدار عبارت $5x_1^2+3x_2^2$ کدام است؟

۱) $12+\sqrt{5}$ ۲) $12-\sqrt{5}$ ۳) $24+\sqrt{5}$ ۴) $24-\sqrt{5}$

۲۱۸. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-12x-a=0$ و $2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۹ ۴) -9

۲۱۹. اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^2-ax-b=0$ و $40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۲۲۰. a و b ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+4x+m=0$ هستند. اگر $a<b$ و $a^3+b^3+4a^2=-7+12\sqrt{2}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -1 ۲) -4 ۳) -7 ۴) -8

۲۲۱. α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+a=0$ هستند. اگر $\alpha<\beta<0$ و $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) ۲

۲۲۲. α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+6x+a=0$ هستند. اگر $\beta<\alpha<0$ و $\alpha^3+\beta^3+\beta^2=-\frac{21}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) $\frac{33}{4}$ ۲) $\frac{11}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۵ (ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

رابطهٔ بین ریشه‌ها

یک رابطه بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم میدن و می‌خوان پارامتری رو در معادله تعیین کنیم. مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها به کمک ما میان...

۲۲۳. به ازای کدام مقدار k در معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-x+k=0$ بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1+2x_2=3$ برقرار است؟

۱) -12 ۲) -10 ۳) ۸ ۴) ۶

۲۲۴. در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیش‌تر است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۲۵. در معادلهٔ $3x^2-15x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیش‌تر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

۲۲۶. به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2-ax+4=0$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۲۷. اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+(2m+1)x-8m^3=0$ مجذور ریشهٔ دیگر باشد، مقدار منفی m کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -4 ۴) -1

۲۲۸. در معادلهٔ $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ یکی از ریشه‌ها دو برابر ریشهٔ دیگر است. بیش‌ترین مقدار برای مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۹/۵ ۳) ۱۰/۵ ۴) ۱۱/۵

علامت ریشه‌ها

علامت ریشه‌ها و ارتباط اون با ضرایب معادله ...

۲۲۹. به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

۲۳۰. معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

۲۳۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $(m+3)x^2+2(m-1)x+m-7=0$، $x_1<0<x_2$ و $|x_1|>x_2$ باشند، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-3,1)$ ۲) $(-3,7)$ ۳) $(1,7)$ ۴) $(-1,3)$

۲۳۲. به ازای یک مقدار m، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3mx+2m+6=0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم

در این قسمت می‌خوایم معادله بسازیم ...

۲۳۳. یک ریشهٔ کدام معادله $2-\sqrt{3}$ است؟

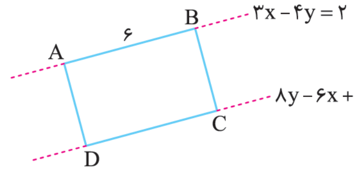
۱) $x^2+4x-7=0$ ۲) $x^2-4x+1=0$ ۳) $x^2-x-4=0$ ۴) $x^2-4x+2=0$

۲۳۴. اگر a و b اعداد صحیح و $3-\sqrt{a}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $6x^2-ax+ab=0$ باشد، مقدار $a+4b$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

۱۶۸ **۲**

با توجه به شکل زیر و هم‌چنین مساحت مستطیل که برابر ۱۲ است، داریم:



$۱۲=۶\times|BC|\Rightarrow|BC|=۲$

بنابراین فاصلهٔ دو خط موازی $۳x-۴y=۲$ و $۸y-۶x+m=۰$ برابر ۲ است. حال داریم:

$$۳x-۴y=۲\xrightarrow{\times(-۲)}۸y-۶x=-۴\Rightarrow ۸y-۶x+۴=۰$$

$$۲=\frac{|m-۴|}{\sqrt{۶۴+۳۶}}\Rightarrow ۲=\frac{|m-۴|}{۱۰}\Rightarrow|m-۴|=۲۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m-۴=۲۰\Rightarrow m=۲۴\\ m-۴=-۲۰\Rightarrow m=-۱۶\end{cases}\Rightarrow \text{میانگین}=\frac{۲۴+(-۱۶)}{۲}=۴$$

۱۶۹ **۴**

خطوط مماس $۲x+y=۳$ و $y=-۲x+۵$ موازی‌اند پس مرکز دایره روی خط میانگین آن‌ها قرار دارد. پس:

$$y=-۲x+\frac{۵+۳}{۲}\Rightarrow y=-۲x+۴$$

از طرفی خط $y-۴x-۶=۰$ قطر دایره است پس مرکز دایره روی این خط نیز قرار دارد. بنابراین مرکز دایره نقطهٔ تلاقی خط $y=-۲x+۴$ و قطر دایره است:

$$\begin{cases}y-۴x-۶=۰\\ y=-۲x+۴\end{cases}\Rightarrow -۲x+۴-۴x-۶=۰$$

$$\Rightarrow -۶x=۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۶}=-\frac{۱}{۳}$$

۱۷۰ **۳**

می‌دانیم در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. پس در معادلهٔ $x^۲-۴x-۱۲=۰$ داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{-۴}{۱}=۴\\ x_1x_2=\frac{-۱۲}{۱}=-۱۲\end{cases}\Rightarrow x_1x_2(x_1+x_2)=-۴۸$$

۱۷۱ **۲**

می‌دانیم در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس در معادلهٔ $۴x^۲-۳x-۷=۰$ داریم:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{-۳}{۴}=\frac{۳}{۴}\\ P=\alpha\beta=\frac{-۷}{۴}\end{cases}\Rightarrow S-P=\frac{۳}{۴}-(-\frac{۷}{۴})=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵$$

۱۷۲ **۱**

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(x-۱)^۲=۵-x\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۵-x\Rightarrow x^۲-x-۴=۰$$

حال داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{-۱}{۱}=۱\\ x_1x_2=\frac{-۴}{۱}=-۴\end{cases}\Rightarrow\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}=-\frac{۴}{۱}=-۴$$

۱۷۳ **۳**

می‌دانیم اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. چون در معادلهٔ $۲x^۲+۴x-۱=۰$ با ریشه‌های x_1 و x_2، $x_2>x_1$ می‌باشد، پس:

$$|x_1-x_2|=-(x_1-x_2)=\frac{\sqrt{۱۶-۴(۲)(-۱)}}{۲}$$

$$\Rightarrow x_1-x_2=-\frac{\sqrt{۲۴}}{۲}=-\frac{۲\sqrt{۶}}{۲}=-\sqrt{۶}$$

۱۷۴ **۲**

عبارت $(\alpha+۱)(\beta+۱)$ برابر $\alpha\beta+\alpha+\beta+۱$ است. پس در معادلهٔ $x^۲+x-۳=۰$ داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{۱}{۱}=-۱\\ \alpha\beta=\frac{-۳}{۱}=-۳\end{cases}\Rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=(-۳)+(-۱)+۱=-۳$$

۱۷۵ **۱**

ابتداعبارت $x_1(۳x_2-۴)+x_2(۵x_1-۴)$ رابرحسب مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌هامی‌نویسیم:

$$۳x_1x_2-۴x_1+۵x_1x_2-۴x_2=۸x_1x_2-۴(x_1+x_2)$$

حال در معادلهٔ $-۲x^۲+۳x+۱=۰$ داریم:

$$x_1+x_2=-\frac{۳}{-۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$x_1x_2=\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$۸(-\frac{۱}{۲})-۴(\frac{۳}{۲})=-۴-۶=-۱۰$$

۱۷۶ **۳**

عبارت $|x_1^۲-x_2^۲|$ برابر $|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|$ و باتوجه به ویژگی قدرمطلق برابر $|x_1-x_2|\times|x_1+x_2|$ است، پس:

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{۹+۱۶}}{۱}=\frac{\sqrt{۲۵}}{۱}=۵$$

$$x_1+x_2=-\frac{۳}{۱}=-۳\Rightarrow|x_1+x_2|=۳$$

حال داریم:

$$|x_1^۲-x_2^۲|=|x_1-x_2|\times|x_1+x_2|=۵\times۳=۱۵$$

۱۷۷ **۴**

با کمی دقت متوجه می‌شویم در سمت چپ معادله می‌توان از اتحاد چاق و لاغر استفاده کرد، پس:

$$(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}_{a+b})(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۴}-\sqrt[۳]{x^۲}+۱}_{a^۲-ab+b^۲})=۴x\Rightarrow\underbrace{x^۲+۱}_{a^۳+b^۳}=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

حال در معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$ داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{-۴}{۱}=۴\\ x_1x_2=\frac{۱}{۱}=۱\end{cases}\Rightarrow x_1x_2(x_1+x_2)=۱\times۴=۴$$

۱۷۸ ۴

ابتدا طرفین معادله را در $\sqrt[3]{x^2}$ ضرب می‌کنیم، سپس در سمت چپ معادله به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\times\sqrt[3]{x^2}}$$

$$((\sqrt[3]{x^2})^2+1+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x^3}\Rightarrow x^2-1=2x\Rightarrow x^2-2x-1=0$$

حال مجموع ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$$

۱۷۹ ۱

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^2-(m^2-1)x+m+1=0$ برابر ۴ است، پس:

$$-\frac{-(m^2-1)}{m-1}=4\Rightarrow\frac{m^2-1}{m-1}=4\Rightarrow\frac{\cancel{(m-1)}(m+1)}{\cancel{m-1}}=4$$

$$\Rightarrow m+1=4\Rightarrow m=3$$

به‌ازای $m=3$ معادله به‌صورت $2x^2-8x+4=0$ می‌شود که حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر $\frac{4}{2}=2$ می‌باشد.

۱۸۰ ۳

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2kx+5=0$ باشند، پس $|x_1-x_2|=\frac{4}{3}k$ است و داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{4}{3}k\Rightarrow\frac{\sqrt{(2k)^2-4(1)(5)}}{1}=\frac{4}{3}k$$

$$\Rightarrow\sqrt{4k^2-20}=\frac{4}{3}k\Rightarrow 4k^2-20=\frac{16}{9}k^2\Rightarrow\frac{20}{9}k^2=20$$

$$\Rightarrow k^2=9\Rightarrow k=\pm 3$$

بنابراین اختلاف مقادیر k برابر $3-(-3)=6$ است.

۱۸۱ ۲

مجموع‌ریشه‌های‌معادلهٔ $x^2-(m-3)x+4=0$ برابر $-\frac{-(m-3)}{1}=m-3$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+m-2=0$ برابر $\frac{m-2}{2}$ می‌باشد، پس:

$$m-3=\frac{m-2}{2}\Rightarrow 2m-6=m-2\Rightarrow m=4$$

۱۸۲ ۱

در معادلهٔ $x^2-mx+12=0$ داریم:

$$a\times 3a=12\Rightarrow 3a^2=12\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

چون‌گفته شده ریشه‌ها، طبیعی هستند پس $a=2$ قابل قبول است و داریم:

$$a+3a=m\xrightarrow{a=2}2+6=m\Rightarrow m=8$$

در معادلهٔ $x^2-nx+12=0$ داریم:

$$b\times(b+11)=12\Rightarrow b^2+11b-12=0\Rightarrow b=1, b=-12$$

چون‌گفته شده ریشه‌ها، طبیعی هستند پس $b=1$ قابل قبول است و داریم:

$$b+b+11=n\xrightarrow{b=1}n=13$$

بنابراین $m+n$ برابر $8+13=21$ است.

۱۸۳ ۲

با توجه به ضرایب معادلهٔ $x^2-(a+1)x+a=0$ که در آن مجموع ضرایب صفر است، یک ریشهٔ معادله ۱ و دیگری a است. چون گفته شده ریشه‌ها دو عدد فرد متوالی هستند پس $a=3$ می‌باشد و معادلهٔ $x^2-(3a+1)x+b=0$ به صورت $x^2-10x+b=0$ می‌شود. حال اگر فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله هستند، داریم:

$$x_1+x_2=10\xrightarrow{x_1\text{ و }x_2\text{ دو عدد زوج متوالی}}x_1=4, x_2=6$$

بنابراین اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله برابر است:

$$4\times 6-1\times 3=24-3=21$$

۱۸۴ ۳

در تساوی $x_1^2x_2+x_2^2x_1=15$ داریم:

$$x_1x_2(x_1+x_2)=15\Rightarrow PS=15$$

در معادلهٔ $x^2-(a-1)x+a+1=0$ داریم:

$$S=x_1+x_2=-\frac{-(a-1)}{1}=a-1$$

$$P=x_1x_2=\frac{a+1}{1}=a+1$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده، داریم:

$$PS=15\Rightarrow(a+1)(a-1)=15\Rightarrow a^2-1=15$$

$$\Rightarrow a^2=16\Rightarrow a=\pm 4$$

به ازای $a=4$ دلتای معادله منفی می‌شود پس $a=-4$ قابل قبول است.

۱۸۵ ۴

ابتدا عبارت $\frac{x_2}{x_2-1}=x_1$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x_2}{x_2-1}=x_1\Rightarrow x_2=x_1x_2-x_1\Rightarrow x_1+x_2=x_1x_2$$

بنابراین $\frac{c}{a}=-\frac{b}{a}$ است و داریم:

$$-b=c\Rightarrow -2a=-a+2\Rightarrow -a=2\Rightarrow a=-2$$

۱۸۶ ۱

با توجه به تساوی $x_1+\frac{4}{x_2}=8$ داریم: $\frac{x_1x_2+4}{x_2}=8$

حال در معادلهٔ $x^2+(m+2)x-20=0$ داریم: $x_1x_2=\frac{-20}{1}=-20$

بنابراین داریم:

$$\frac{x_1x_2+4}{x_2}=8\Rightarrow\frac{-20+4}{x_2}=8\Rightarrow 8x_2=-16\Rightarrow x_2=-2$$

می‌دانیم ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$(-2)^2+(m+2)(-2)-20=0\Rightarrow 4-2m-4-20=0$$

$$\Rightarrow -2m=20\Rightarrow m=-10$$

۱۸۷ ۲

با توجه به تساوی $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}=5$ داریم: $\frac{1+\sqrt{x_1x_2}}{\sqrt{x_1}}=5$

در معادلهٔ $x^2-mx+16=0$ داریم:

$$x_1x_2=16\Rightarrow\frac{1+\sqrt{16}}{\sqrt{x_1}}=5\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{x_1}}=5\Rightarrow\sqrt{x_1}=1\Rightarrow x_1=1$$

چون یک ریشهٔ معادله ۱ است، پس مجموع ضرایب معادله صفر می‌باشد:

$$1-m+16=0\Rightarrow m=17$$

۱۸۸ **۴**

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-12x+m+20=0$ هستند، پس:

$$x_1^2-x_2^2=48 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)=48$$

در معادلهٔ $x^2-12x+m+20=0$ داریم:

$$x_1+x_2=12$$

$$x_1-x_2=\frac{\sqrt{144-4(m+20)}}{1}$$

حال با توجه به مقادیر به‌دست آمده داریم:

$$\sqrt{64-4m}\times 12=48 \Rightarrow \sqrt{64-4m}=4$$

$$\Rightarrow 64-4m=16 \Rightarrow 4m=48 \Rightarrow m=12$$

۱۸۹ **۴**

برای آن‌که سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند باید $a^2=\alpha\beta$ باشد، از طرفی در معادلهٔ $x^2+2(a+1)x+2a-1=0$ داریم: $\alpha\beta=2a-1$

بنابراین داریم:

$$a^2=\alpha\beta \xRightarrow{\alpha\beta=2a-1} a^2=2a-1 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow (a-1)^2=0 \Rightarrow a=1$$

۱۹۰ **۴**

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ باشند، پس:

$$\frac{1}{8}=\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{1}{4}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{4}=-\frac{-3}{m^2-4} \Rightarrow m^2-4=12 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$$

به ازای $m=-4$ ضریب x^2 و عددِ ثابت معادله، مختلف‌العلامت می‌شوند، پس حتماً $\Delta>0$ خواهد بود و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۹۱ **۴**

باید $a^2=\alpha\beta$ باشد، پس: $a^2=\frac{4}{1}=4 \Rightarrow a=\pm 2$

به ازای $a=2$ معادلهٔ $x^2+(3-a)x+4=0$ ریشه ندارد چون دلتای معادله منفی می‌شود. به ازای $a=-2$ داریم:

$$x^2+5x+4=0 \xRightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{ریشهٔ بزرگ‌تر}=-1$$

۱۹۲ **۲**

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ برابر است، پس:

$$\alpha\beta^2+\alpha^2\beta=\alpha\beta^2\times\alpha^2\beta \Rightarrow \alpha\beta(\beta+\alpha)=\alpha^3\beta^3$$

در معادلهٔ $ax^2-8x+4=0$ داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{8}{a},\ \alpha\beta=\frac{4}{a}$$

بنابراین داریم:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\alpha\beta)^3 \Rightarrow \frac{4}{a}\times\frac{8}{a}=\frac{64}{a^3} \Rightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{2}{a^3}$$

$$\Rightarrow a^3=2a^2 \xRightarrow{a>0} a=2$$

۱۹۳ **۱**

چون مجموع ریشه‌های معادله با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر است، داریم:

$$S=\frac{1}{P} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{c}{a}} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{a}{c} \Rightarrow a^2=-bc$$

حال در معادلهٔ $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ داریم:

$$a^2=-bc \Rightarrow 3^2=-(2m-1)(2-m) \Rightarrow 9=2m^2-5m+2$$

$$\Rightarrow 2m^2-5m-7=0$$

$$\xRightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{7}{2} \end{cases}$$

حال چون معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta>0$ باشد. واضح است اگر $m=\frac{7}{2}$ باشد، ضریب x^2 و عدد ثابت معادله مختلف‌العلامت می‌شوند، پس حتماً $\Delta>0$ است.

۱۹۴ **۳**

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+5x+m=0$ باشند، پس:

$$\begin{cases} \alpha<\frac{9}{2} \Rightarrow \alpha-\frac{9}{2}<0 \Rightarrow 2\alpha-9<0 \\ \beta<\frac{9}{2} \Rightarrow \beta-\frac{9}{2}<0 \Rightarrow 2\beta-9<0 \end{cases}$$

$$(2\alpha-9)(2\beta-9)>0 \Rightarrow 4\alpha\beta-18(\alpha+\beta)+81>0$$

در معادلهٔ $-x^2+5x+m=0$ داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{-1}=5 \text{ و } \alpha\beta=\frac{m}{-1}=-m$$

بنابراین داریم:

$$4\alpha\beta-18(\alpha+\beta)+81>0 \Rightarrow 4(-m)-18(5)+81>0$$

$$\Rightarrow -4m-9>0 \Rightarrow 4m<-9 \Rightarrow m<-\frac{9}{4}$$

از طرفی دلتای معادله باید مثبت باشد، پس:

$$\Delta>0 \Rightarrow 5^2-4(-1)(m)>0 \Rightarrow 25+4m>0 \Rightarrow 4m>-25$$

$$\Rightarrow m>-\frac{25}{4}$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده، $-\frac{25}{4}<m<-\frac{9}{4}$ می‌باشد که شامل ۴ مقدار صحیح ۶-، ۵-، ۴- و ۳- است.

۱۹۵ **۲**

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+7x+m=0$ باشند، پس:

$$\begin{cases} \alpha>-3 \Rightarrow \alpha+3>0 \\ \beta>-3 \Rightarrow \beta+3>0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha+3)(\beta+3)>0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9>0$$

از طرفی در معادلهٔ $2x^2+7x+m=0$ داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{7}{2} \text{ و } \alpha\beta=\frac{m}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{m}{2}+3(-\frac{7}{2})+9>0 \Rightarrow \frac{m}{2}-\frac{3}{2}>0 \Rightarrow \frac{m}{2}>\frac{3}{2} \Rightarrow m>3$$

از طرفی دلتای معادله باید مثبت باشد، پس:

$$\Delta>0 \Rightarrow 7^2-4(2)(m)>0 \Rightarrow 49-8m>0$$

$$\Rightarrow 8m<49 \Rightarrow m<\frac{49}{8}$$

از اشتراک حدود به دست آمده، $3<m<\frac{49}{8}$ است که شامل سه عدد صحیح ۴، ۵ و ۶ می‌باشد.