درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی

مفاهیم اولیه

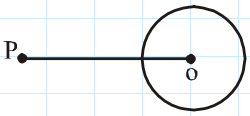
تعریف دایره: مجموعهٔ تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز، به فاصلهٔ ثابتی باشد. این فاصلهٔ ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

یادآوری: محیط و مساحت دایرهٔ $C(O,R)$ به ترتیب برابر با $2\pi R$ و πR^2 است.

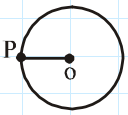
وضعیت نقطه با دایره

برای بررسی وضعیت نقطه نسبت به دایرهٔ $C(O,R)$، باید فاصلهٔ نقطهٔ P را از مرکز دایره به‌دست آوریم، داریم:

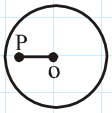
الف) نقطهٔ P خارج دایره قرار دارد. $\Leftrightarrow$ $PO > R$



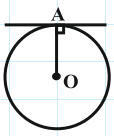
ب) نقطهٔ P روی دایره قرار دارد. $\Leftrightarrow$ $PO = R$



ج) نقطهٔ P داخل دایره قرار دارد. $\Leftrightarrow$ $PO < R$

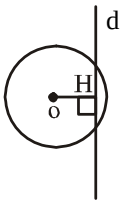


تعریف مماس: خطی که از نقطهٔ A واقع بر دایره می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطهٔ A نامیده می‌شود.



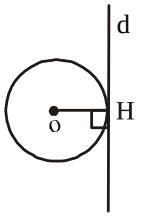
بررسی وضعیت خط و دایره: برای بررسی هر خط با یک دایره، فاصلهٔ مرکز دایره را از آن خط به‌دست می‌آوریم و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. یک خط و یک دایره، نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

(الف) متقاطع‌اند.



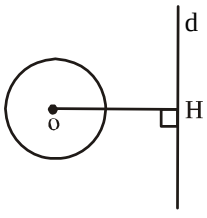
$OH < R$

(ب) مماس‌اند.

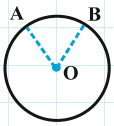


$OH = R$

(ج) نقطهٔ مشترکی ندارند.

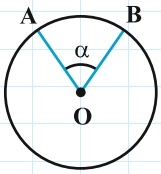


$OH > R$



کمان زاویهٔ مرکزی دایره: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و ضلع‌های آن شعاع‌های دایره‌انـد. بنا به قرارداد، اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی، مساوی اندازهٔ کمان مقابل آن است.

$$\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$$

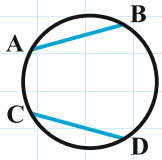


طول کمان و مساحت قطاع: زاویهٔ مرکزی $\widehat{AOB}$ بـه انـدازهٔ α درجـه را در دایـرهٔ $C(O,R)$ در نظر بگیرید:

الف) طول کمان AB برابر است با $\frac{\alpha}{180}R\pi$.

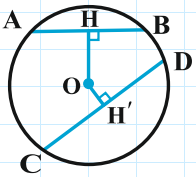
ب) مساحت قطاع AOB برابر است با $\frac{\alpha}{360}\pi R^2$.

تعریف وتر: پاره خطی که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتـر آن دایـره نامیـده می‌شود.



۱ در هر دایره، اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های متناظر آن‌ها مساوی‌اند و بر عکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



۲ در هر دایره، وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز دایره کم‌تر است و برعکس.

$$AB < CD \Leftrightarrow OH > OH'$$

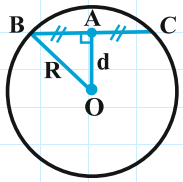
همچنین اگر فاصلهٔ دو وتر از مرکز دایره با هم برابر باشند، طول آن دو وتر با هم برابر است.

۳ در هر دایره، بین دو کمان، کمانی بزرگ‌تر است که وتر مقابل آن بزرگ‌تر است.

$$AB < CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$$

۴ در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند و برعکس.

۵ اگر A نقطه‌ای داخل دایره‌ای به مرکز O باشد، کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A، وتری است که در نقطهٔ A بر OA عمود می‌شود.



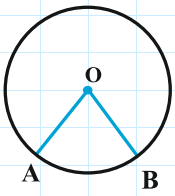
با توجه به شکل مقابل، با به‌کار بردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم الزاویهٔ OBA می‌توان طـول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A، درون دایره‌ای به شعاع R را به دست آورد:

$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{R^2 - d^2}$$

همچنین بلندترین وتر گذرنده از هر نقطه داخل یک دایره همان قطر گذرنـده از آن نقطـه اسـت که در دایره‌ای به شعاع R، طول آن برابر با $2R$ است.

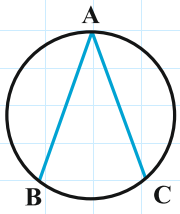
زاویه‌ها در دایره

۱ زاویهٔ مرکزی: اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مساوی کمان مقابل آن است.



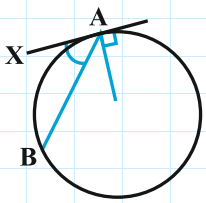
$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

۲ زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و ضلع‌های آن وترهایی از دایره‌اند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی، مساوی نصف کمان مقابل آن است.



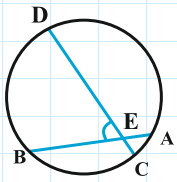
$$B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

۳ زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، اندازهٔ زاویهٔ ظلی، مساوی با نصف کمان مقابل آن است.



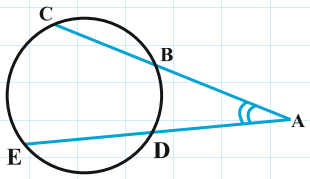
$$X\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

۴ زاویهٔ بین دو وتر دایره که در داخل دایره متقاطع‌اند: مساوی با نصف مجموع دو کمان مقابل آن است.

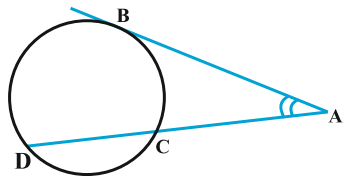


$$\hat{E} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC})$$

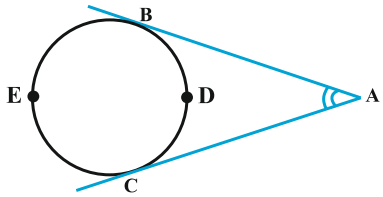
۵ زاویهٔ بین امتداد دو وتر دایره که در خارج دایره متقاطع‌اند: هم‌چنین زاویهٔ بین امتداد یک وتر و یک مماس و نیز زاویهٔ بین دو مماس، مساوی با نصف قدر مطلق تفاضل دو کمان مقابل آن است.



$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{BD})$$



$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC})$$

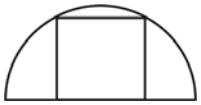


$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BEC} - \overset{\frown}{BDC})$$

مفاهیم اولیه

۱- در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره ۷/۵ سانتی‌متر است، مساحت مربع محاط در نیم دایره چند سانتی‌متر مربع است؟

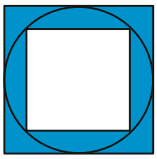
(مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی- ۷۲)



۱) ۵۴
۲) ۳۰
۳) ۳۶
۴) ۴۵

۲- در شکل زیر، شعاع دایره ۴ سانتی‌متر است، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی- ۷۴)



۱) ۲۶
۲) ۲۸
۳) ۳۰
۴) ۳۲

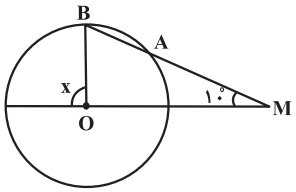
۳- وتر BC در دایره‌ای به مرکز O طوری قرار داردکه اندازهٔ کمان بزرگ‌تر BC، ۱/۴ برابر کمان کوچک‌تر BC است. نسبت مساحت دایره به مساحت مثلث OBC چند برابر π است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی) (آزمون کانون- ۹۵)

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۹۶ ۳) ۲/۸ ۴) ۴

۴- در شکل زیر، از نقطهٔ M در خارج دایره خطی رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده و $MA = R$ است. اندازهٔ زاویهٔ x کدام است؟ (O مرکز و R شعاع دایره است.)

(مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



۱) ۲۰°
۲) ۳۰°
۳) ۴۰°
۴) ۶۰°

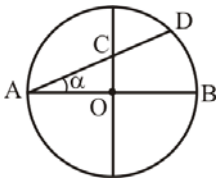
۵- نزدیک‌ترین و دورترین فاصلهٔ نقطهٔ A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است، شعاع این دایره برابر است با:

(مرتبط با صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۷۶)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۶- در شکل مقابل، دو قطر دایره عمود بر هم‌اند. نسبت $\frac{CD}{CA}$ برابر با کدام است؟

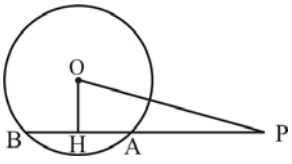
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی) (سراسری ریاضی- ۷۱)



۱) $2\sin^2\alpha$
۲) $2\cos^2\alpha$
۳) $\cos 2\alpha$
۴) $\sin 2\alpha$

۷- در شکل مقابل، $HA = \frac{AB}{2} = ۳$ ، $OH = ۱$ و $O\hat{H}A = ۹۰^\circ$. شعاع دایره کدام است؟

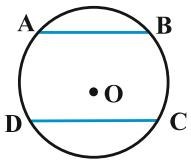
(مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی- ۷۶)



۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $\sqrt{۱۲}$
۳) $\sqrt{۱۱}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

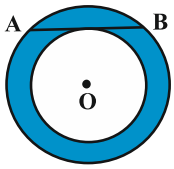
۸- مطابق شکل زیر، در دایرهٔ به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = ۶$ و $CD = ۸$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟

(تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



۱) ۵۶
۲) ۴۹
۳) ۴۲
۴) ۳۵

۹- در شکل زیر، دو دایره هم‌مرکزاند و وتر AB بر دایرهٔ کوچک مماس است. اگر اندازهٔ وتر AB برابر۲۴ سانتی‌متر باشد. مساحت ناحیهٔ بین دو دایره چند سانتی مترمربع است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(آزمون کانون– ۸۶)



۱) ۲۵۶π
۲) ۱۴۴π
۳) ۵۷۶π
۴) ۳۲۴π

۱۰- در دایرهٔ $C(O,۸)$، اگر $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$، آن‌گاه فاصلهٔ O از وتر AB کدام است؟ (مرتبط با تمرین ۷ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۱۱- از نقطهٔ M به فاصلهٔ $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ وتری در دایره رسم نموده‌ایم، کوتاه‌ترین طول این وتر کدام است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(سراسری ریاضی– ۶۵)

۱) $\sqrt{۳}R$ ۲) $\sqrt{۲}R$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}R$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$

۱۲- در دایره‌ای به شعاع R از نقطهٔ M به فاصلهٔ نصف شعاع از مرکز، وتر AC را با کم‌ترین طول و وتر BD را با بیش‌ترین طول رسم کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی ABCD چند برابر $R^۲$ است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(آزمون کانون–۱۹آذر ۹۵)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۳- چهار نقطهٔ A,B,C,D روی محیط دایرهٔ $C(O,R)$ طوری قرار گرفته‌اند که $C\hat{O}D=۱۲۰^\circ$ و فاصلهٔ مرکز دایره تا وسط وتر AB برابر $۰/۸R$ است. نسبت $\frac{AB}{CD}$ چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟ (مرتبط با تمرین‌های ۷ و ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(آزمون کانون– ۲۴ دی ۹۵)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۱۴- دایره‌ای به شعاع ۴ و نقطهٔ M به فاصلهٔ یک از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن‌ها ۲ باشد و از M بگذرد؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(آزاد ریاضی– ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۵- در یک صفحه، مجموعهٔ مراکز همهٔ دایره‌هایی که از دو خط غیرموازی، وترهای مساوی جدا می‌کند، روی چه شکلی هستند؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(آزمون کانون– ۸۵)

۱) دو خط عمود برهم ۲) دو خط موازی ۳) یک نقطه ۴) یک خط

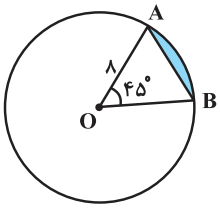
۱۶- چهارضلعی ABCD محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیک‌ترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی–۹۶)

۱) $\hat{D}>\hat{C}$ ۲) $\hat{B}>\hat{C}$ ۳) $\hat{A}>\hat{B}$ ۴) $\hat{B}>\hat{D}$

۱۷- اندازهٔ کمان دایره‌ای به مرکز O' و به زاویهٔ ۴۵° با اندازهٔ کمان دایره‌ای به مرکز O و زاویهٔ ۳۰° برابر است، نسبت مساحت دایرهٔ به مرکز O به دایرهٔ به مرکز O' کدام است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)(سراسری تجربی –۶۹)

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۶}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۱۸- در شکل زیر مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟ (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)



۱) $۱۶(\frac{\pi}{۲}-\sqrt{۲})$
۲) $۱۶(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$
۳) $۸(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$
۴) $۳۲(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

۱۹- در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $A\hat{D}B=۳۴^\circ$ آن‌گاه، زاویهٔ OAD چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)(سراسری ریاضی – ۹۴)

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

۲۰- خط l بر دایره‌ای به قطر AB مماس است. اگر طول عمودهای AD و BC وارد بر l به‌ترتیب برابر ۱۲ و ۳ باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟

(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۳ دی ۹۵)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۱- در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، نقطهٔ O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)(سراسری ریاضی -۹۴)

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه

۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

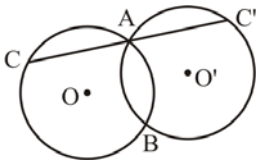
۲۲- دایرهٔ $C(O,R)$، روی خط d وتری به طول $6\sqrt{2}$ جدا می‌کند. اگر تنها سه نقطه روی دایرهٔ C به فاصلهٔ ۳ از خط d باشند، R کدام است؟

(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۳

زاویه‌ها در دایره

۲۳- در شکل زیر، دو دایرهٔ مساوی متقاطع‌اند، قاطع CAC' را رسم می‌کنیم، مثلث CBC' همواره... (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(آزاد ریاضی- ۸۰)



۱) متساوی‌الاضلاع است.

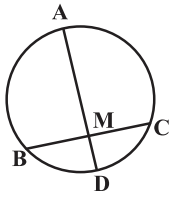
۲) قائم‌الزاویه است.

۳) متساوی‌الساقین است.

۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۲۴- در شکل زیر D وسط کمان BC و M وسط وتر BC است. اگر $AD = 2BC$، آن‌گاه کمان AB چند درجه است؟

(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۳ دی ۹۵)



۱) ۱۲۰

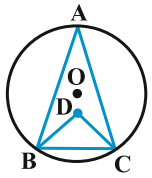
۲) ۱۳۵

۳) ۱۵۰

۴) ۱۶۵

۲۵- در شکل زیر، نقطهٔ D، محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ B و C است. اگر $B\hat{D}C = 100^\circ$، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟

(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۹۱)



۱) ۱۰۰

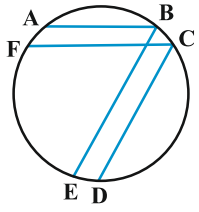
۲) ۸۰

۳) ۶۰

۴) ۴۰

۲۶- در شکل زیر، اگر $AB \parallel FC$، $CD \parallel BE$، $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = 40^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = 110^\circ$، آن‌گاه زاویهٔ $F\hat{C}D$ چند درجه است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(آزاد ریاضی- ۷۷)



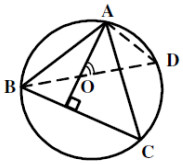
۱) ۹۰

۲) ۵۵

۳) ۷۰

۴) ۸۰

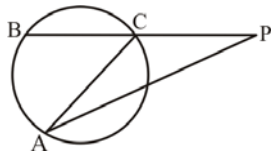
۲۷- در شکل زیر، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویهٔ $A\hat{O}D$ برابر کدام است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(سراسری ریاضی-۹۲)



۱) $O\hat{B}C$ ۲) $C\hat{A}D$

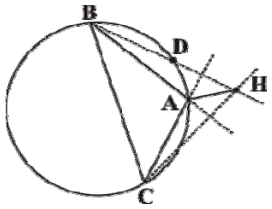
۳) $O\hat{A}C$ ۴) $A\hat{D}O$

۲۸- در شکل زیر، اگر زاویهٔ $\hat{P} = ۳۲^\circ$ و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد، کمان AB چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی) (سراسری تجربی- ۶۱)



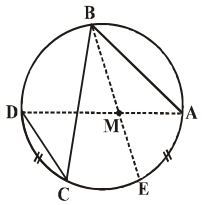
۱) ۶۹
۲) ۷۴
۳) ۸۶
۴) ۱۲۸

۲۹- در شکل زیر، نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. زاویهٔ $A\hat{H}D$، با کدام زاویه برابر است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(سراسری خارج کشور ریاضی- ۹۲)



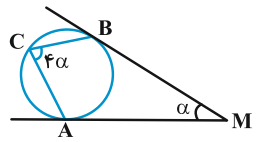
۱) $C\hat{A}B$
۲) $A\hat{B}C$
۳) $A\hat{D}H$
۴) $A\hat{H}C$

۳۰- در شکل مقابل، $AB = ۶$، $BC = ۸$، $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$ اندازهٔ AM، کدام است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(سراسری خارج کشور ریاضی- ۹۳)



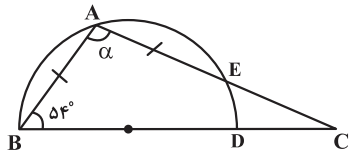
۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

۳۱- در شکل زیر MA و MB بر دایره مماس‌اند و اندازهٔ زوایای M و C به‌ترتیب برابر α و ۴α است. مقدار α چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت‌های صفحه‌های ۱۱ و ۱۳ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۹۱)



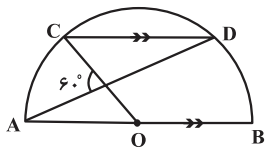
۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۱۵

۳۲- در شکل روبه‌رو، $AB = AE$ و BD قطر نیم‌دایره است. زاویهٔ α چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۸ بهمن ۹۵)



۱) ۱۰۸
۲) ۱۱۶
۳) ۱۲۰
۴) ۱۲۶

۳۳- در شکل، O مرکز دایره است و $AB \parallel CD$ است. اندازهٔ کمان CD کدام است؟ (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

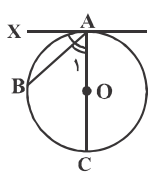


۱) ۶۰°
۲) ۹۰°
۳) ۱۰۰°
۴) ۱۲۰°

۳۴- سه نقطهٔ A، B و C را روی محیط دایره‌ای به شعاع R، طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AB}{\sqrt{۲}} = \frac{BC}{\sqrt{۳}} = R$ زاویهٔ کوچک‌تر ABC چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)(آزمون کانون-۱۸ فروردین ۹۵)

۱) ۶۰ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵

۳۵- در شکل زیر، اندازهٔ زاویهٔ ظلی A برابر ۵۰° است. اندازهٔ کمان BC بر حسب درجه کدام است؟ (مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)(سراسری تجربی- ۶۱)

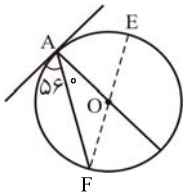


۱) ۷۰
۲) ۷۵
۳) ۸۰
۴) ۸۵

۳۶- خط Δ در نقطهٔ T بر دایره‌ای به قطر AB مماس است. اگر Δ با AB موازی باشد، آن‌گاه AT با Δ چه زاویه‌ای می‌سازد؟
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۱۸ فروردین ۹۵)

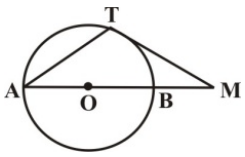
۱) 45° ۲) 60° ۳) 75° ۴) 90°

۳۷- در شکل زیر، O مرکز دایره و زاویهٔ ظلی A برابر 56° است. کمان AE چند درجه است؟
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۷۱)



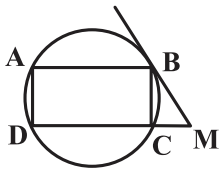
۱) ۶۸
۲) ۶۶
۳) ۶۴
۴) ۶۲

۳۸- در شکل زیر، AB قطر دایره و MT بر دایره مماس است. اگر $MT = AT$، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۹۲)



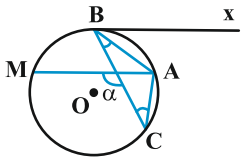
۱) 15°
۲) 45°
۳) 60°
۴) 30°

۳۹- در شکل زیر، $ABCD$ مستطیل است. مماس رسم شده از نقطهٔ B بر دایره، امتداد ضلع DC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر $B\hat{M}C = \alpha$، آن‌گاه زاویهٔ بین دو قطر مستطیل کدام است؟
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۷ فروردین ۹۵)



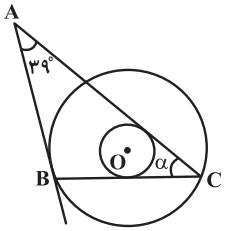
۱) α
۲) 2α
۳) $90^\circ - \alpha$
۴) $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

۴۰- در شکل زیر، $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 30^\circ$ و وتر AM موازی مماس Bx است. زاویهٔ α، چند درجه است؟(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۸۶)



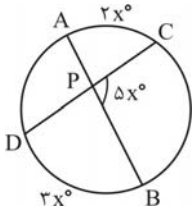
۱) 90°
۲) 120°
۳) 130°
۴) 145°

۴۱- دو دایرهٔ هم‌مرکز مطابق شکل مفروض‌اند. وتر BC در دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر و AB در نقطهٔ B بر دایرهٔ بزرگ‌تر مماس است. اندازهٔ α کدام است؟
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۳ دی ۹۵)



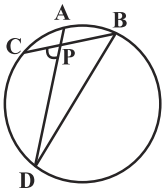
۱) 32°
۲) 34°
۳) 30°
۴) 36°

۴۲- در شکل زیر، $\overset{\frown}{AC} = 2x^\circ$، $\overset{\frown}{BD} = 3x^\circ$ و $C\hat{P}B = 5x^\circ$. مقدار x چند درجه است؟
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(سراسری تجربی- ۷۰)



۱) 20°
۲) 24°
۳) 32°
۴) 36°

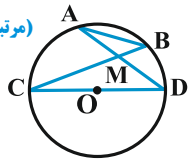
۴۳- در شکل زیر، $\hat{D} = \frac{1}{2}\hat{B}$، زاویهٔ $\hat{P}$ چند برابر کمان $\overset{\frown}{AB}$ است؟
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۷۵)



۱) $\frac{2}{3}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۴۴- در شکل زیر، اگر $AB = R$ یک وتر و CD قطری از دایره باشند، آن‌گاه زاویهٔ حادهٔ M که از برخورد دو وتر AD و BC به دست می‌آید، کدام است؟

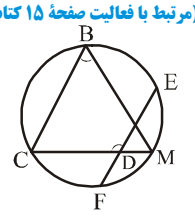
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)



۱) ۷۵°
۲) ۶۰°
۳) ۳۰°
۴) ۴۵°

۴۵- در شکل مقابل، M وسط کمان EF است و $\overset{\frown}{BC} = ۵۰^\circ$، اندازهٔ $\hat{B} + \hat{D}$ کدام است؟

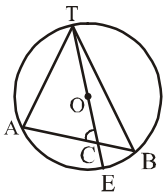
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۷۷)



۱) ۱۶۰
۲) ۱۷۵
۳) ۱۸۰
۴) ۲۳۰

۴۶- در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = ۶۵^\circ$ و $\hat{B} = ۳۵^\circ$ ، زاویهٔ C کدام است؟

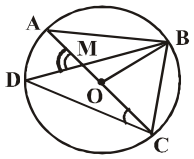
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۸۱)



۱) ۶۰
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۳

۴۷- در شکل زیر، $A\hat{C}D = ۲۲/۵^\circ$ و $A\hat{M}D = ۶۷/۵^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ $O\hat{B}D$ کدام است؟ (O مرکز دایره است.)

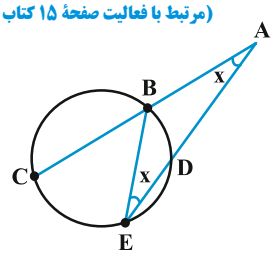
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۸۵)



۱) ۲۵°
۲) $۲۷/۵^\circ$
۳) $۲۲/۵^\circ$
۴) $۳۷/۵^\circ$

۴۸- در شکل مقابل، چه رابطه‌ای بین کمان‌ها وجود دارد؟

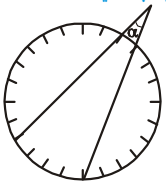
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۸۴)



۱) $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BD}$
۲) $\overset{\frown}{CE} = ۳\overset{\frown}{BD}$
۳) $\overset{\frown}{CE} = ۲\overset{\frown}{BD}$
۴) $\overset{\frown}{CE} = ۴\overset{\frown}{BD}$

۴۹- در شکل مقابل، دایره به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است، زاویهٔ α چند درجه است؟

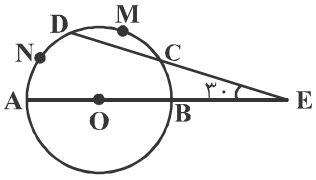
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۶۸)



۱) ۲۲/۵
۲) ۲۵
۳) ۲۷/۵
۴) ۳۰

۵۰- در شکل زیر O مرکز دایره، $\overset{\frown}{DMC} = ۳۰^\circ$ و $\hat{E} = ۳۰^\circ$ ، کمان $\overset{\frown}{AND}$ چند درجه است؟

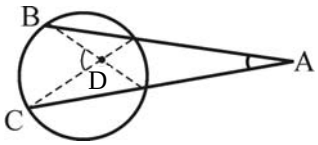
(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۶۷)



۱) ۸۵
۲) ۹۵
۳) ۱۰۵
۴) ۱۱۵

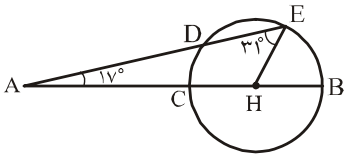
۵۱- در شکل مقابل، $\hat{A} = ۲۷^\circ$ و $\hat{D} = ۷۱^\circ$ کمان BC چند درجه است؟

(مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۸۶)



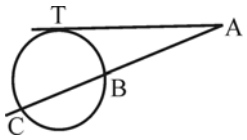
۱) ۹۸
۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۲
۴) ۱۰۴

۵۲- در شکل زیر، $\hat{A}=17^\circ$ ، $\hat{E}=31^\circ$ و H وسط قطر CB است، کمان CD چند درجه است؟ (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)(سراسری ریاضی- ۶۹)



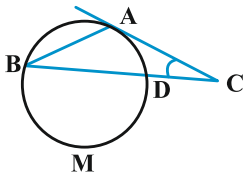
۱) ۱۴
۲) ۱۹
۳) ۲۲
۴) ۲۴

۵۳- در شکل زیر AT مماس و $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CT}=2\overset{\frown}{BT}$. زاویهٔ A چند درجه است؟ (مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی) (آزاد ریاضی عصر-۸۶)



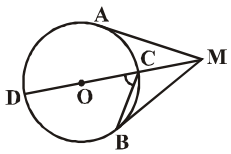
۱) ۱۸
۲) ۷۲
۳) ۳۶
۴) ۱۴۴

۵۴- در شکل زیر، مماس AC با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان $\overset{\frown}{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد زاویهٔ C چند درجه است؟
(مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(سراسری خارج کشور ریاضی- ۹۱)



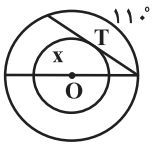
۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴

۵۵- در شکل زیر، اگر زاویهٔ بین دو مماس MA و MB برابر 50° باشد، آن‌گاه زاویهٔ $\hat{OCB}$ چند درجه است؟ (O مرکز دایره است.)
(مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)



۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۵۰
۴) ۵۷/۵

۵۶- در شکل زیر O مرکز هر دو دایره و T نقطهٔ تماس وتر دایرهٔ بزرگ با دایرهٔ کوچک است. کمان x چند درجه است؟
(مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۲۴ دی ۹۵)

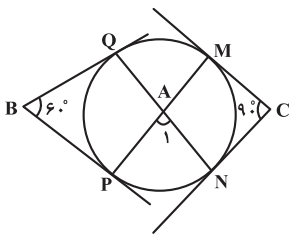


۱) ۱۱۰
۲) ۱۱۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۲۵

۵۷- چهار نقطهٔ A، B، C و D را روی محیط یک دایره در نظر می‌گیریم، اگر طول وترهای AC و BD با شعاع دایره برابر باشد و $B\hat{D}C=75^\circ$، آن‌گاه زاویهٔ بین مماس‌های رسم شده بر دایره از نقاط C و D، چند درجه است؟ (مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۷ فروردین ۹۵)

۱) ۳۰
۲) ۹۰
۳) ۶۰
۴) ۱۲۰

۵۸- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}_1$ چند درجه است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)



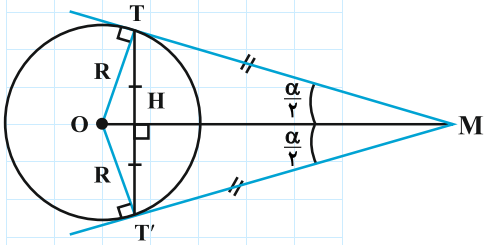
۱) ۶۰
۲) ۷۵
۳) ۹۰
۴) ۱۵۰

درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳ کتاب درسی

روابط طولی و سایر ویژگی‌های مماس

از هر نقطه بیرون یک دایره، می‌توان دو مماس بر آن رسم کرد که طول این دو مماس با هم برابر است. در شکل زیر از نقطهٔ M، مماس‌های MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده است، داریم:



۱) MO نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است.

۲) $MT = MT' = \sqrt{MO^2 - R^2}$

۳) MO عمود منصف TT' است.

۴) $R^2 = OH \cdot OM$

۵) $TH^2 = OH.HM \Rightarrow TT'^2 = 4OH \cdot HM$

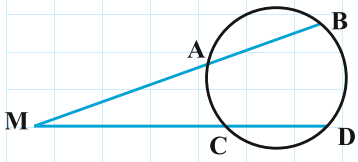
۶) $TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$

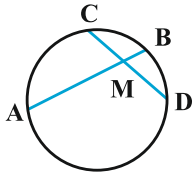
۷) اگر زاویهٔ بین دو مماس MT و MT' برابر α باشد، آن‌گاه:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{MT} \quad \text{و} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{OM}$$

روابط طولی دو وتر متقاطع

اگر از نقطهٔ M دو قاطع چنان رسم کنیم که یکی از آن‌ها دایره را در A و B و دیگری دایره را در C و D قطع کند، آن‌گاه:

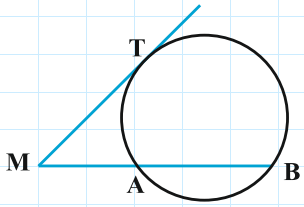




$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر دو پاره خط AB و CD (یا امتدادهای آن‌ها) در نقطهٔ M طوری یک‌دیگر را قطع کنند که $MA \cdot MB = MC \cdot MD$، آن‌گاه چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره واقع‌اند.

روابط طولی مماس و امتداد وتر

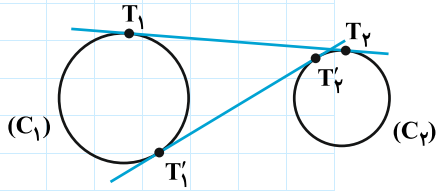


اگر از نقطهٔ M خارج یک دایره، قاطع MAB و مماس MT را بر آن دایره رسم کنیم، آن‌گاه $MT^2 = MA.MB$، عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر سه نقطهٔ M، A و B روی یک خط راست و T خارج این خط طوری واقع باشند که $MT^2 = MA \cdot MB$، آن‌گاه دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و T می‌گذرد، در نقطهٔ T بر MT مماس است.

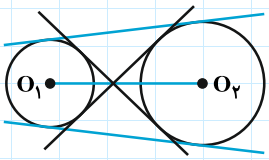
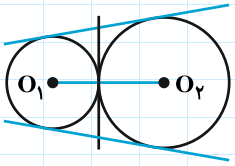
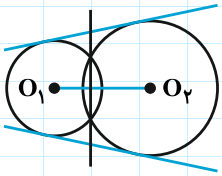
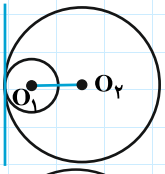
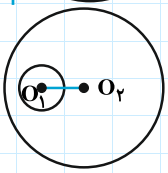
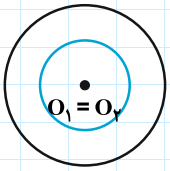
تعریف مماس مشترک و بررسی وضع دو دایره نسبت به هم

مماس مشترک دو دایره: مماس مشترک دو دایرهٔ C_1 و C_2 خطی است که هم بر C_1 و هم بر C_2 مماس باشد. اگر هر دو دایره در یک طرف این خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در طرفین این خط باشند، آن را مماس مشترک داخلی گویند.

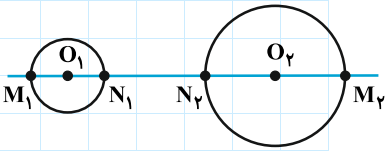
مثلاً در شکل مقابل T_1T_2 مماس مشترک خارجی و $T'_1T'_2$ مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ C_1 و C_2 است.



اوضاع نسبی دو دایره در صفحه: دو دایرهٔ $C_۱(O_۱,R_۱)$ و $C_۲(O_۲,R_۲)$ را درنظر بگیرید. اگر طول خط‌المرکزین این دو دایره را d در نظر بگیریم $(O_۱O_۲ = d)$ دو دایره نسبت به هم، یکی از شش وضعیت زیر را دارند:

نوع وضعیت	روابط بین شعاع‌ها و فاصلهٔ بین مراکز دو دایره	تعداد مماس‌های مشترک داخلی	تعداد مماس‌های مشترک خارجی	وضعیت شکل
متخارج	$d > R_۱ + R_۲$	۲	۲	
مماس خارج	$d = R_۱ + R_۲$	۱	۲	
متقاطع	$\lvert R_۲ - R_۱\rvert < d < R_۱ + R_۲$	صفر	۲	
مماس داخل	$d = \lvert R_۲ - R_۱\rvert$	صفر	۱	
متداخل	$d < \lvert R_۲ - R_۱\rvert$	صفر	صفر	
هم مرکز	$d = ۰$	صفر	صفر	

نکته: دو دایرهٔ متخارج $C_۱(O_۱ , R_۱)$ و $C_۲(O_۲ , R_۲)$ را مطابق شکل در نظر بگیرید. خط‌المرکزین دو دایره را رسم کرده و از دو طرف امتداد می‌دهیم تا هر یک از دو دایره را در دو نقطه، قطع کند، داریم:

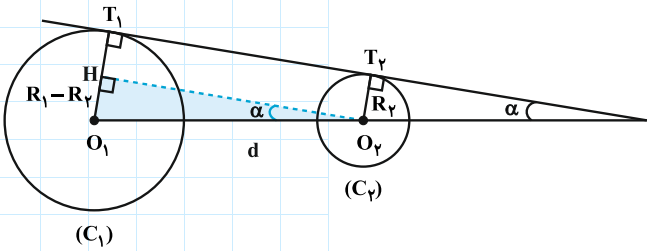


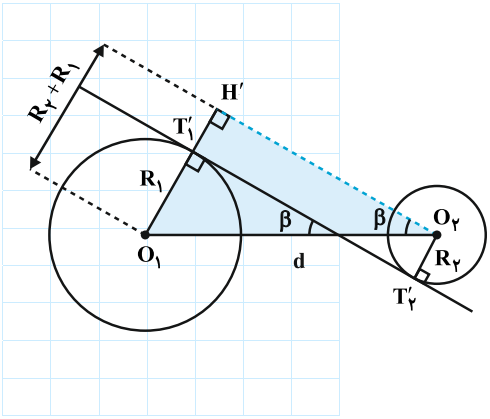
$C_۲$ و $C_۱$ بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ : $M_۱M_۲ = d + (R_۱ + R_۲)$

$C_۲$ و $C_۱$ کم‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ : $N_۱N_۲ = d - (R_۱ + R_۲)$

محاسبهٔ طول‌های مماس‌های مشترک دو دایره

۱ برای محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره، مطابق شکل، از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، عمودی بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس در دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم، با به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $HO_۱O_۲$، طول $O_۲H = T_۱T_۲$ به‌دست می‌آید، هم‌چنین اگر α زاویهٔ مماس مشترک خارجی با خط‌المرکزین باشد، داریم:





$$T_1T_2=\sqrt{d^2-(R_1-R_2)^2}\quad و\quad \sin\alpha=\frac{R_1-R_2}{d}$$

۲ برای محاسبهٔ طول مماس مشترک داخلی دو دایره، مطابق شکل، از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، عمودی بر امتداد شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس در دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. با به‌کار بردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $H'O_1O_2$، طول $O_2H'=T_1'T_2'$ به‌دست می‌آید، هم‌چنین اگر β زاویهٔ مماس مشترک داخلی با خط‌المرکزین باشد، داریم:

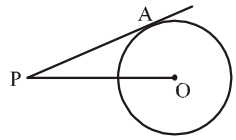
$$T_1'T_2'=\sqrt{d^2-(R_1+R_2)^2}\quad و\quad \sin\beta=\frac{R_1+R_2}{d}$$

رابطه‌های طولی وترها و مماس‌های متقاطع

۵۹– دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ M را در خارج آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به قطر OM، دایرهٔ C را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند، کدام گزینه نادرست است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۲۰ اسفند ۹۵)

۱) مثلث OAM متساوی‌الساقین است.
۲) OM نیمساز زاویهٔ AMB است.
۳) MA بر دایرهٔ C مماس است.
۴) AB بر OM عمود است.

۶۰– در شکل مقابل PO برابر ۵ و شعاع دایره برابر واحد است، طول PA کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (سراسری ریاضی– ۷۶)



۱) $6\sqrt{2}$
۲) $5\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{5}$
۴) $2\sqrt{6}$

۶۱– فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره از نقطهٔ P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصلهٔ P تا مرکزدایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم ازنقطهٔ P بر دایره کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی– ۷۴)

۱) $3\sqrt{2}$
۲) ۶
۳) $\sqrt{13}$
۴) $\sqrt{6}$

۶۲– کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از محیط دایرهٔ (C) برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطهٔ A بر دایره رسم شده است، چند برابر شعاع دایره است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی– ۸۹)

۱) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
۲) $3\sqrt{5}$
۳) $6\sqrt{5}$
۴) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

۶۳– مجموعهٔ همهٔ نقاطی که بتوان ازآن نقاط مماس‌هایی به طول L بر دایرهٔ مفروض رسم کرد، عبارت است از: (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی– ۶۷)

۱) یک خط
۲) یک دایره
۳) یک نیم‌خط
۴) دو خط

۶۴– در مثلث ABC $(AB=AC)$، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC=6$ و ارتفاع $AH=4$ باشد، شعاع این دایره، کدام است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی– ۹۵)

۱) ۳/۲۵
۲) ۳/۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۴/۵

۶۵– از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (سراسری ریاضی– ۸۸)

۱) $\sqrt{2}$
۲) ۲
۳) $2\sqrt{2}$
۴) ۳

۶۶– دو دایرهٔ هم مرکز به شعاع‌های ۴ و ۵ مفروض‌اند. مساحت مستطیلی که در دایرهٔ بزرگ محاط بوده و دو ضلع مقابلش بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون– ۸۴)

۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۴۸
۴) ۹۶

۶۷- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی- ۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

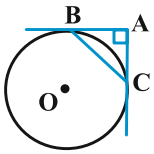
۶۸- از نقطهٔ P دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ای به شعاع ۲ رسم شده است، سطح بین دو مماس و محیط دایره کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۸۱)

۱) $۴-\pi$ ۲) $۲\pi-۴$ ۳) $۴-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲-\frac{\pi}{۲}$

۶۹- مطابق شکل زیر، از نقطهٔ A، دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O,۳\sqrt{۲})$ رسم شده است. اندازهٔ وتر BC، کدام است؟

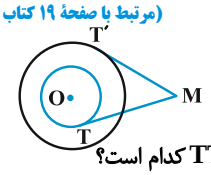
(مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (آزمون کانون- ۸۶)



۱) ۵
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) $۶\sqrt{۲}$

۷۰- دو دایرهٔ هم مرکز به شعاع‌های R و ۲R مفروض‌اند. مطابق شکل، از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دو دایره رسم شده است. قدرمطلق تفاضل مربعات طول‌های این دو مماس کدام است؟

(مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون- ۸۶)



۱) $۳R^۲$ ۲) $۲R^۲$
۳) $R^۲$ ۴) $\sqrt{۵}R^۲$

۷۱- دو خط MT و MT' در نقاط T و T' بر دایرهٔ $C(O,۴)$ مماس‌اند. اگر $OM=۸$، آنگاه، طول وتر TT' کدام است؟

(مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون- ۸۶)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۷۲- دایرهٔ (C) به شعاع ۲ از نقطهٔ A با زاویهٔ ۶۰° رؤیت می‌شود. اگر O مرکز دایره و T نقطهٔ تماس خطی که از A می‌گذرد با دایره باشد، مساحت مثلث AOT کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۸۵)

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۷۳- دایره‌ای به شعاع ۶ از نقطهٔ A، به زاویهٔ ۱۲۰° رؤیت می‌شود. اگر O مرکز دایره و AT مماس بر این دایره باشد، مساحت مثلث OAT کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۸۹)

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

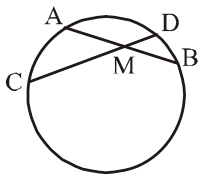
۷۴- دایرهٔ $C(O,\sqrt{۳})$ مفروض است. مجموعهٔ همهٔ نقاطی که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایرهٔ C با هم زاویهٔ ۶۰° بسازند، کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی) (آزمون کانون- ۸۶)

۱) دایرهٔ $C'(O,۲\sqrt{۳})$ ۲) دایرهٔ $C'(O,۴\sqrt{۳})$
۳) دایرهٔ $C'(O,۳)$ ۴) دایرهٔ $C'(O,۶)$

۷۵- در شکل مقابل $MA=۶$، $MB=۳$ و $MD=۲/۵$، طول MC کدام است؟

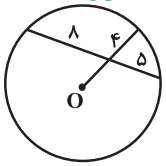
(مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی) (آزاد ریاضی- ۷۶)



۱) ۱۷/۱
۲) ۶/۹
۳) ۷
۴) ۷/۲

۷۶- در شکل زیر، O مرکز دایره است. شعاع دایره کدام است؟

(مرتبط با تمرین۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی) (آزمون کانون- ۹۵)



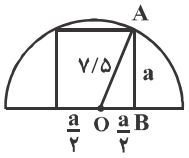
۱) ۷
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۸/۵

پاسخ نامه

دایره

۱- گزینهٔ «۴»

مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم:



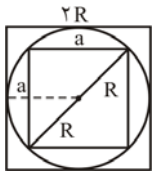
$$a^۲ + \frac{a^۲}{۴} = (۷/۵)^۲ \Rightarrow \frac{۵a^۲}{۴} = (۷/۵)^۲$$

$$a^۲ = \frac{۴ \times ۷/۵ \times ۷/۵}{۵} = \frac{۲۲۵}{۵} = ۴۵$$

مساحت مربع $a^۲ = ۴۵$

۲- گزینهٔ «۴»

با توجه به شکل، اگر ضلع مربع کوچک‌تر a باشد، آن‌گاه طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$a^۲ + a^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow ۲a^۲ = ۶۴$$

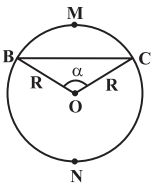
مساحت مربع کوچک $= a^۲ = ۳۲$

مساحت مربع بزرگ $= (۸)^۲ = ۶۴$

سطح هاشورخورده $= ۶۴ - ۳۲ = ۳۲$

۳- گزینهٔ «۴»

طبق فرض می‌دانیم:



$$\begin{cases} \overset{\frown}{BNC} = ۱/۴\overset{\frown}{BMC} \\ \overset{\frown}{BNC} + \overset{\frown}{BMC} = ۳۶۰^\circ \end{cases}$$

حل دستگاه $\rightarrow$

$$\begin{cases} \overset{\frown}{BNC} = ۲۱۰^\circ \\ \overset{\frown}{BMC} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۵۰^\circ \end{cases}$$

از سال قبل می‌دانیم:

$$\overset{\Delta}{S(OBC)} = \frac{۱}{۲}OB.OC.\sin\alpha$$

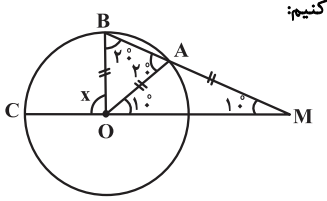
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{S(OBC)} = \frac{۱}{۲}R \times R \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}R^۲$$

پس نسبت مساحت دایره به مساحت مثلث OBC برابر است با

$$\frac{\pi R^۲}{\frac{۱}{۴}R^۲} = ۴\pi .$$

۴- گزینهٔ «۲»

از مرکز دایره به A پاره‌خطی رسم می‌کنیم: OA برابر شعاع دایره و در نتیجه دو مثلث OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند، طبق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{OAM} : OA = AM \Rightarrow A\hat{O}M = ۱۰^\circ$$

$\Rightarrow$ زاویهٔ خارجی $B\hat{A}O = ۱۰^\circ + ۱۰^\circ = ۲۰^\circ$

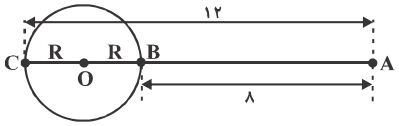
$$\overset{\Delta}{OAB} : OB = OA \Rightarrow O\hat{B}M = ۲۰^\circ$$

$\Rightarrow$ زاویهٔ خارجی $x = B\hat{O}C = O\hat{B}A + A\hat{M}O$

$= ۲۰^\circ + ۱۰^\circ = ۳۰^\circ$

۵- گزینهٔ «۲»

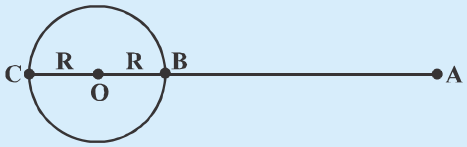
با توجه به شکل داریم:



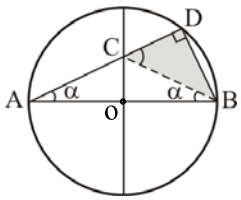
$$BC = ۲R = AC - AB$$

$$\Rightarrow BC = ۱۲ - ۸ = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

نکته: اگر نقطهٔ A، خارج دایرهٔ $C(O, R)$ واقع باشد، مطابق شکل زیر، بیش‌ترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از نقاط واقع بر دایره، به‌ترتیب برابر است با $AC = OA + R$ و $AB = OA - R$.



۶- گزینهٔ «۳»

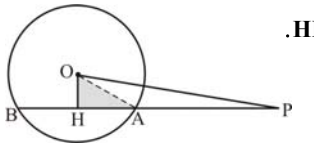


چون دو قطر بر هم عمودند، پس $AC = CB$ و $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$. چون زاویهٔ C زاویهٔ خارجی مثلث ACB است، پس: $\hat{C} = ۲\alpha$.

$$\overset{\Delta}{CDB} : \cos ۲\alpha = \frac{CD}{CB} = \frac{CD}{AC}$$

۷- گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که اگر از مرکز یک دایره بر هر وتر آن عمود کنیم، آن را نصف می‌کند.

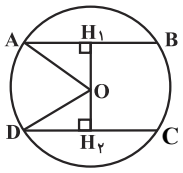


یعنی: $HB = HA = \frac{AB}{2} = ۳$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA، بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overset{\Delta}{OHA} : \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow OA^۲ = OH^۲ + HA^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰$$
$$\Rightarrow OA = R = \sqrt{۱۰}$$

۸- گزینهٔ «۲»

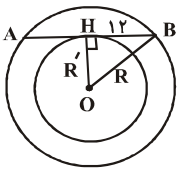


$$OH_۱ = \sqrt{OA^۲ - AH_۱^۲} = \sqrt{۵^۲ - (\frac{۶}{۲})^۲} = ۴$$
$$OH_۲ = \sqrt{OD^۲ - DH_۲^۲} = \sqrt{۵ - (\frac{۸}{۲})^۲} = ۳$$
$$\Rightarrow H_۱H_۲ = OH_۱ + OH_۲ = ۴ + ۳ = ۷$$

مساحت ذوزنقهٔ ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{H_۱H_۲ \times (AB + CD)}{۲} = \frac{۷ \times (۶ + ۸)}{۲} = ۴۹$$

۹- گزینهٔ «۲»



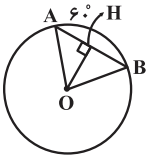
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم:

$$R^۲ - R'^۲ = HB^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۱۴۴$$

مساحت سطح بین دو دایره : $\pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۱۴۴\pi$

۱۰- گزینهٔ «۲»

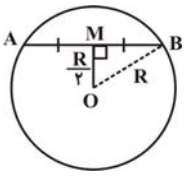
$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ \\ OA = OB = R = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}$$ مثلث متساوی‌الاضلاع است



$$\Rightarrow HB = AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$
$$\Rightarrow OH = \sqrt{OB^۲ - HB^۲} = ۴\sqrt{۳}$$

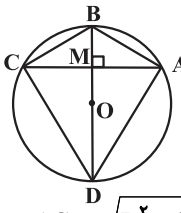
۱۱- گزینهٔ «۱»

کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M، داخل دایرهٔ $C(O, R)$ رسم می‌شود، وتری است که بر MO عمود است. مطابق شکل، چون MO بر AB عمود است، در نتیجه $AM = MB = \frac{AB}{۲}$ است و در مثلث OMB داریم:



$$\hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow MB^۲ = OB^۲ - MO^۲$$
$$\Rightarrow (\frac{AB}{۲})^۲ = R^۲ - (\frac{R}{۲})^۲ = \frac{۳R^۲}{۴} \Rightarrow \frac{AB^۲}{۴} = \frac{۳R^۲}{۴}$$
$$AB = \sqrt{۳}R$$

۱۲- گزینهٔ «۲»



کوچک‌ترین وتر که از نقطهٔ M در دایره رسم می‌شود، وتری است که از نقطهٔ M، بر MO یا بر قطر BD عمود شده باشد، طول این وتر برابر است با:

$$AC = ۲\sqrt{R^۲ - OM^۲} = ۲\sqrt{R^۲ - \frac{R^۲}{۴}} = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}R) = \sqrt{۳}R$$

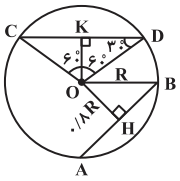
بزرگ‌ترین وتری که از نقطهٔ M می‌گذرد، همان قطر BD است.

$$BD = ۲R$$

دو قطر چهارضلعی $ABCD$ بر هم عمودند، بنابراین مساحت آن برابر نصف حاصل‌ضرب دو قطر آن است.

$$S(ABCD) = \frac{۱}{۲}AC \times BD = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳}R \times ۲R = \sqrt{۳}R^۲$$

۱۳- گزینهٔ «۱»



مطابق شکل از O به CD عمود می‌کنیم. داریم:

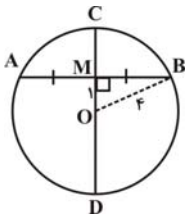
$$\overset{\Delta}{OKD} : KD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$
$$CD = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}R = \sqrt{۳}R$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHB:

$$BH^۲ = R^۲ - (۰/۸R)^۲ = ۰/۳۶R^۲ \Rightarrow BH = ۰/۶R$$
$$\Rightarrow AB = ۲ \times ۰/۶R = ۱/۲R$$

پس: $$\frac{AB}{CD} = \frac{۱/۲R}{\sqrt{۳}R} = \frac{۱/۲\sqrt{۳}}{۳} = ۰/۴\sqrt{۳}$$

۱۴- گزینهٔ «۳»



بزرگ‌ترین وتر، قطر گذرنده از M و کوتاه‌ترین وتر، وتری مانند AB است که بر MO عمود باشد پس اندازهٔ بزرگ‌ترین وتر برابر است با $۲ \times ۴ = ۸$ و برای به‌دست آوردن اندازهٔ کوتاه‌ترین وتر داریم:

$$\overset{\Delta}{MOB} : \hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow MB^۲ = OB^۲ - MO^۲$$
$$(\frac{AB}{۲})^۲ = ۴^۲ - ۱ = ۱۵ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۵}$$

یعنی طول تمام وترهای گذرنده از نقطهٔ M درون این دایره بین $۲\sqrt{۱۵}$ و ۸ هستند، پس وتری به طول دو، گذرنده از نقطهٔ M وجود ندارد.