

مقدمه! مولفان

سلام به همه دانش‌آموزان، دبیران و مشاوران

به کتاب پاسخ‌نامه ریاضی تجربی جامع خوش آمدید! خیلی سریع و مختصر چند مورد رو بگیم و بریم!

■ ویژگی‌های پاسخ:

- ➊ مهم‌ترین‌شان، حل گام به گام تست‌ها است. این کار به یادگیری بهتر شما خیلی کمک می‌کند.
- ➋ در کنار عملیات‌های ریاضی، توضیحات کامل مکتوب هم برایتان آورده‌ایم تا متوجه بشوید چه کار کرده‌ایم.
- ➌ اگر سؤالی چند روش حل مرسوم داشته، سعی کردیم حداقل ۲ تا از آن روش‌ها را بیاوریم.
- ➍ در جلد پاسخ آیکون‌های زیر را می‌بینید:

نکته	فرمول یا یک رابطه مهم یا گزاره‌ای که لازم است آن را بلد باشید.
تذکر	گوشزدهای ضروری!
شفاف‌سازی	بعضی وقت‌ها لازم است قسمتی از صورت سؤال را با زبان ساده‌تری بیان کنیم.
روش اول روش دوم	بعضی سؤالات دو روش حل دارند.
تیزبازی	روش سریع یا خلاقانه که در بعضی تست‌ها قابل استفاده است.
تله	بعضی اشتباهات خیلی رایج هستند. در یک سری سؤالات، جوابی که از راه حل‌های اشتباه رایج به دست می‌آیند، توسط طراح در گزینه‌ها قرار داده شده است و شما در تله طراح می‌افتید!
حواستون باشه	بی دقتی‌های خیلی رایج که باید مراقبشون باشین!
کمی عمیق‌تر	در بعضی از سؤال‌ها لازم است برای دانش‌آموزان دقیق و ریزبین، یک سری توضیحات بیشتر بدهیم.

■ حرف آخر:

اگر پیشنهادی دارید یا جایی نقصی می‌بینید آن را از طریق سایت خیلی سبز یا آیدی‌های زیر با ما در میان بگذارید. ممنون از شما.

📧 shahraabiali

📧 mathmohsenimanesh

📧 soroushmueeni



فصل ۱: تابع

فصل ۵ ریاضی دهم - فصل ۳ ریاضی یازدهم - فصل ۱

ریاضی دوازدهم

شماره
صفحه

شماره
پاسخ

درس ۱ رابطه و بازتابی‌های یک رابطه ۸ ۱

درس ۲ مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه - تساوی دو تابع

..... ۱۳ ۴۵

درس ۳ انواع تابع ۲۴ ۱۰۹

درس ۴ تبدیل نمودارها ۳۲ ۱۶۵

درس ۵ توابع چندجمله‌ای ۴۵ ۲۳۲

درس ۶ اعمال جبری روی توابع ۵۰ ۲۵۷

درس ۷ ترکیب توابع ۵۷ ۲۹۵

درس ۸ یکنوایی ۷۲ ۳۸۴

درس ۹ تابع یک به یک ۸۵ ۴۵۵

درس ۱۰ وارون تابع و تابع وارون ۸۹ ۴۷۶

درس ۱۱ برد ۱۱۲ ۵۹۷

فصل ۲: مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم - فصل ۴ ریاضی یازدهم -

فصل ۲ ریاضی دوازدهم

درس ۱ رادیان ۱۱۸ ۶۳۲

درس ۲ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۱۲۱ ۶۵۴

درس ۳ دایره مثلثاتی ۱۲۹ ۷۰۹

درس ۴ اتحادهای مثلثاتی مقدماتی ۱۳۴ ۷۵۰

درس ۵ زاویه‌های ترکیبی ۱۴۰ ۷۹۰

درس ۶ اتحادهای α ۱۴۵ ۸۱۹

درس ۷ توابع متناوب ۱۵۵ ۸۹۶

درس ۸ نمودار توابع سینوسی و کسینوسی ۱۵۷ ۹۱۵

درس ۹ تانژانت ۱۶۴ ۹۶۰

درس ۱۰ معادله مثلثاتی ۱۶۸ ۹۹۰

فصل ۳: حد و پیوستگی

فصل ۶ ریاضی یازدهم - فصل ۳ ریاضی دوازدهم

درس ۱ تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۱۸۲ ۱۰۷۲

درس ۲ همسایگی ۱۸۴ ۱۰۹۲

درس ۳ فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد ۱۸۵ ۱۱۰۱

درس ۴ رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$) ۱۹۶ ۱۱۸۲

درس ۵ حد بی‌نهایت ۲۰۹ ۱۲۷۱

درس ۶ حد در بی‌نهایت ۲۲۰ ۱۳۴۰

درس ۷ پیوستگی ۲۳۰ ۱۴۱۳

فصل ۴: مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

درس ۱ آشنایی با مفهوم مشتق ۲۴۳ ۱۴۹۲

درس ۲ قواعد مشتق‌گیری ۲۴۷ ۱۵۲۹

درس ۳ قواعد مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده)

..... ۲۵۳ ۱۵۷۸ (ساده کردن)

درس ۴ مشتق مرتبه دوم ۱۶۰۷ ۲۵۷

درس ۵ معادله خط مماس بر منحنی ۱۶۲۳ ۲۵۹

درس ۶ مشتق چپ و راست - مشتق توابع چندضابطه‌ای،

قدرمطلق و برآکتی ۱۶۷۰ ۲۶۷

درس ۷ مشتق پذیری (در نقطه و بازه) ۱۷۱۲ ۲۷۳

درس ۸ دامنه و نمودار تابع مشتق ۱۷۷۲ ۲۸۲

درس ۹ مشتق تابع مرکب ۱۷۹۱ ۲۸۵

درس ۱۰ آهنگ تغییر ۱۸۵۱ ۲۹۳

فصل ۵: کاربرد مشتق

فصل ۵ ریاضی دوازدهم

درس ۱ بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق ۱۸۷۹ ۲۹۷

درس ۲ نقطه بحرانی ۱۹۱۴ ۳۰۲

درس ۳ اکسترم‌های نسبی ۱۹۶۲ ۳۰۹

درس ۴ اکسترم‌های مطلق ۲۰۲۴ ۳۱۹

درس ۵ بهینه‌سازی ۲۰۵۷ ۳۲۶

فصل ۶: هندسه (تفکر تجسمی و ...)

فصل ۶ ریاضی دوازدهم

درس ۱ تفکر تجسمی ۲۱۱۹ ۳۳۸

درس ۲ بیضی ۲۱۶۰ ۳۴۴

درس ۳ دایره ۲۲۰۶ ۳۵۰

فصل ۷: احتمال

فصل ۷ ریاضی دهم - فصل ۷ ریاضی یازدهم - فصل ۷

ریاضی دوازدهم

درس ۱ فضای نمونه‌ای و پیشامد ۲۲۷۸ ۳۶۳

درس ۲ احتمال یک پیشامد ۲۲۹۲ ۳۶۴

درس ۳ قوانین احتمال ۲۳۵۶ ۳۷۳

درس ۴ احتمال شرطی ۲۳۷۲ ۳۷۶

درس ۵ پیشامدهای مستقل ۲۴۰۲ ۳۸۱

درس ۶ قانون احتمال کل ۲۴۳۹ ۳۸۶

فصل ۸: قدرمطلق و جزء صحیح

درس ۱ قدرمطلق ۲۴۷۰ ۳۹۱

درس ۲ جزء صحیح ۲۵۱۸ ۳۹۸

فصل ۹: معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس ۱ معادله درجه دوم ۲۵۶۸ ۴۰۵

درس ۲ سهمی ۲۶۹۹ ۴۲۶

فصل ۱۰: معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس ۱ معادلات گویا ۲۸۰۲ ۴۴۵

درس ۲ معادلات گنگ ۲۸۴۳ ۴۵۲

درس ۳ تعیین علامت و نامعادله ۲۸۸۱ ۴۵۸

فصل ۱۱: هندسه تحلیلی

فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس ۱ یادآوری و تکمیل معادله خط ۲۹۴۸ ۴۷۰

درس ۲ فاصله دو نقطه - نقطه وسط پاره خط ۲۹۷۴ ۴۷۳

درس ۳ فاصله نقطه از خط ۳۰۰۲ ۴۷۷

فصل ۱۲: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵ ریاضی یازدهم

درس ۱ تابع نمایی ۳۰۴۴ ۴۸۵

درس ۲ لگاریتم ۳۰۹۴ ۴۹۳

فصل ۱۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

- درس ۱ توان و ریشه ۳۲۴۷ ۵۱۶
- درس ۲ توان‌های گویا ۳۲۶۸ ۵۱۸
- درس ۳ اتحادهای جبری ۳۲۸۶ ۵۲۰
- درس ۴ گویاکردن مخرج کسرها ۳۳۵۷ ۵۲۸

فصل ۱۴: مجموعه و بازه

فصل ۱ ریاضی دهم

- درس ۱ مجموعه‌های اعداد، بازه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۳۳۸۳ ۵۳۱
- درس ۲ مجموعه مرجع و متمم ۳۴۰۴ ۵۳۴
- درس ۳ تعداد اعضای مجموعه ۳۴۱۶ ۵۳۶

فصل ۱۵: الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم

- درس ۱ الگو و دنباله ۳۴۳۵ ۵۴۰
- درس ۲ دنباله حسابی ۳۴۷۰ ۵۴۵
- درس ۳ دنباله هندسی ۳۵۱۲ ۵۵۲

فصل ۱۶: شمارش، بدون شمردن

فصل ۶ ریاضی دهم

- درس ۱ شمارش ۳۵۶۷ ۵۶۰
- درس ۲ جایگشت ۳۶۰۳ ۵۶۴
- درس ۳ ترکیب ۳۶۴۵ ۵۶۸

فصل ۱۷: آمار

فصل ۷ ریاضی دهم - فصل ۷ ریاضی یازدهم

- درس ۱ مقدمه‌ای بر علم آمار ۳۶۹۹ ۵۷۴
- درس ۲ شاخص‌های مرکزی ۳۷۰۳ ۵۷۴
- درس ۳ شاخص‌های پراکندگی ۳۷۲۸ ۵۷۷

فصل ۱۸: هندسه

فصل ۲ ریاضی یازدهم

- درس ۱ ترسیم‌های هندسی ۳۷۹۰ ۵۸۵
- درس ۲ استدلال ۳۸۱۰ ۵۸۸
- درس ۳ نسبت و تناسب - قضیه تالس ۳۸۱۵ ۵۸۹
- درس ۴ تشابه مثلث‌ها ۳۸۵۵ ۵۹۷
- درس ۵ نسبت مساحت‌ها ۳۸۸۴ ۶۰۳
- درس ۶ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۳۹۱۳ ۶۰۹



گام ۱ حالا با داشتن $\cos 2x = -\frac{1}{9}$ ، باید $\cos x$ و $\cos 4x$ را به دست آوریم:

اول $\cos x$: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow -\frac{1}{9} = 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{خ حاده}} \cos x = \frac{2}{3}$

• برای محاسبه $\cos 4x$ در اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ، جای α می نویسیم

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(-\frac{1}{9}\right)^2 - 1 = \frac{2}{81} - 1 = -\frac{79}{81}$

پس: $\cos x + \cos 4x = \frac{2}{3} + \frac{-79}{81} = \frac{54-79}{81} = -\frac{25}{81}$

گام ۳ در صورت و مخرج کسر اول به جای $\cos^2 \alpha$ می نویسیم

$1 - \sin^2 \alpha$ و در صورت و مخرج کسر دوم به جای $\sin^2 \alpha$ می نویسیم $1 - \cos^2 \alpha$

$$\frac{\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 4}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 4}{2 - \cos^2 \alpha}$$

گام ۲ صورت هر دو کسر با اتحاد مربع، تجزیه می شود:

$$= \frac{(2 - \sin^2 \alpha)^2}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{(2 - \cos^2 \alpha)^2}{2 - \cos^2 \alpha} = (2 - \sin^2 \alpha) - (2 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 2 - \sin^2 \alpha - 2 + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

تیزبازی: جای α ها $\frac{\pi}{4}$ قرار می دهیم:

$$\frac{\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{1+0}{1+0} - \frac{0+4}{1+1} = 1 - 2 = -1$$

با جای گذاری $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، فقط مقدار ۳، برابر با -۱ می شود:

$$\cos 2\alpha = \cos \pi = -1$$

گام ۳ جای $\cos 2x$ می نویسیم $1 - 2\sin^2 x$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + 2\sin^2 x - 1 = 0$$

گام ۲ با فرض $\sin^2 x = t$ داریم:

$$24t^2 + 22t - 1 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} t^2 + 22t - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (t+6)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 4 \end{cases} \xrightarrow{\div 24} \begin{cases} t = \frac{-1}{6} \times (t > 0) \\ t = \frac{1}{6} \checkmark \end{cases}$$

گام ۱ پس $\sin^2 x = \frac{1}{6}$ ، از اتحاد $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ داریم:

$$1 + \cot^2 x = 6 \Rightarrow \cot^2 x = 5$$

گام ۴ مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است؛ پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

گام ۲ از تساوی $\tan(A+B) = 2\sqrt{2}$ ، نتیجه می گیریم:

$$\tan(180^\circ - \hat{C}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow -\tan \hat{C} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan \hat{C} = -2\sqrt{2}$$

گام ۱ چون $\tan \hat{C}$ منفی شد، پس $\hat{C}$ زاویه ای منفرجه است. کسینوس

را پیدا می کنیم:

$$1 + \frac{\tan^2 \hat{C}}{\cos^2 \hat{C}} = \frac{1}{\cos^2 \hat{C}} \Rightarrow \cos^2 \hat{C} = \frac{1}{9} \xrightarrow{90^\circ < \hat{C} < 180^\circ} \cos \hat{C} = -\frac{1}{3}$$

۱۸۹ از فرمول $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ استفاده می کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{4}{25}\right) = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25} = \frac{17}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{68}{100}$$

۱۹۰ می دانیم $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، باز شده $\cos 2\alpha$ است؛ پس:

$$\cos^2 22^\circ / 5^\circ - \sin^2 22^\circ / 5^\circ = \cos 2(22^\circ / 5^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۹۱ هر دو عبارت را ساده می کنیم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

اسم عوض می شه

گام ۱ جای گذاری می کنیم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

گام ۲ مقدار $\cos 2x$ را حساب می کنیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

۱۹۲ در رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ، جای α ، قرار می دهیم

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 2x + \cos 4x = 2\sin^2 2x + 1 - 2\sin^2 2x = 1$$

۱۹۳ هر ۴ عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی زاویه 20° ،

می نویسیم:

$$\sin 83^\circ = \sin(72^\circ + 9^\circ + 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \cos(36^\circ + 18^\circ + 2^\circ) = -\cos 2^\circ$$

$$\cos 43^\circ = \cos(36^\circ + 7^\circ) = \cos 7^\circ = \sin 2^\circ$$

$$\sin 92^\circ = \sin(72^\circ + 18^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

گام ۱ جای گذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} & (\sin 83^\circ)(\cos 56^\circ) - (\cos 43^\circ)(\sin 92^\circ) \\ &= (\cos 2^\circ)(-\cos 2^\circ) - (\sin 2^\circ)(-\sin 2^\circ) \\ &= -\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ = -(\cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ) = -\cos 4^\circ \\ &= -\sin 5^\circ \end{aligned}$$

۱۹۴ با داشتن $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{11}}{3}$ ، مقدار $\cos 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{-\sqrt{11}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9}$$

گام ۲ حالا با داشتن $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$ مقدار $\cos 4\alpha$ را پیدا می کنیم:

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{7}{9}\right)^2 - 1 = \frac{98}{81} - 1 = \frac{17}{81}$$

۱۹۵ ابتدا عبارت $\sin^2 x - \cos^2 x$ را با استفاده از اتحاد

مزدوج تجزیه می کنیم:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \cos^2 x &= \frac{1}{9} \\ \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) &= \frac{1}{9} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

گام ۱ در تساوی $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ جای α قرار می دهیم $\frac{C}{\sqrt{3}}$:

$$\cos C = 2\cos^2 \frac{C}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} = 2\cos^2 \frac{C}{\sqrt{3}} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{C}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{45^\circ < \frac{C}{\sqrt{3}} < 90^\circ} \cos \frac{C}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

گام ۲ جای $\log x^2$ می نویسیم $2 \log x$:

$$f(x) = \cos(2 \log x) + 2 \sin^2(\log x) - 4$$

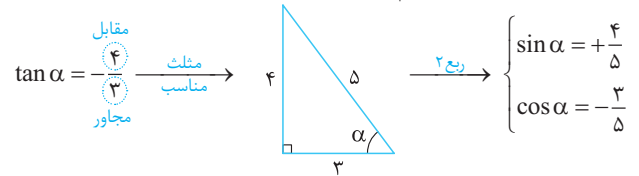
گام ۳ با فرض $\log x = \alpha$ داریم:

$$f(x) = \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha - 4 \xrightarrow{\text{باز می کنیم}} 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha - 4 = -3$$

گام ۴ پس f تابعی ثابت با ضابطه $f(x) = -3$ است. در نتیجه:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 + (-3) = -6$$

گام ۵ برای $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ ، مثلث قائم الزامیه مناسب رسم می کنیم:



گام ۶ با داشتن $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ را پیدا می کنیم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

گام ۷ در اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ جای α قرار می دهیم 15° :

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

گام ۸ طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ می رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

گام ۹ عبارت خواسته شده را ساده می کنیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha \xrightarrow{\text{طبق گام ۱}} -\frac{3}{4}$$

گام ۱۰ جای x های $f(x)$ می نویسیم $g(x)$:

$$f(x) = x - \sqrt{x} \Rightarrow f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)}$$

$$= \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - |\sin^2 x| = \sin^4 x - \sin^2 x$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = -(\sin x \cos x)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

گام ۱۱ در نامساوی دوم، جای $\cot \alpha$ ، عبارت مساوی با آن را قرار

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مثبت}} \cos \alpha > 0 \xrightarrow{\text{پس}} \text{ربع ۱ یا ۴}$$

گام ۱۲ در نامساوی اول، $\sin 2\alpha$ را باز می کنیم:

$$2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow \sin \alpha < \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha < 0 \xrightarrow{\text{پس}} \text{ربع ۳ یا ۴}$$

گام ۱۳ اشتراک می گیریم:

$$(4 \text{ یا } 1) \cap (4 \text{ یا } 3) = 4 \text{ ربع}$$

گام ۱۴ برای هر دو پرانتز صورت، اتحاد داریم:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{\sin^2 \theta}}{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta}}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^4}$$

گام ۱۵ جای $\sin \theta \cos \theta$ می نویسیم $\frac{1}{2} \sin 2\theta$:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

گام ۱۶ مجموع زوایای $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ است؛ پس این دو زاویه،

متمم اند. در نتیجه «جای $\cos \frac{3\pi}{8}$ می نویسیم $\sin \frac{\pi}{8}$ » و «جای $\sin \frac{3\pi}{8}$ می نویسیم

« $\cos \frac{\pi}{8}$ ».

$$A = (1 - \sin \frac{3\pi}{8})(1 - \cos \frac{3\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})$$

$$\Rightarrow A = (1 - \cos \frac{\pi}{8})(1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})$$

گام ۱۷ مزدوج ها را کنار هم می نویسیم:

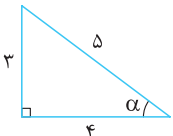
$$A = (1 - \cos \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})(1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})$$

$$= (1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})(1 - \sin^2 \frac{\pi}{8}) = \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

گام ۱۸ اول کسرمان را ساده می کنیم:

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{\cot 2\alpha}$$



گام ۱۹ با توجه به $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، مثلث مقابل را می کشیم:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \\ \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

● با توجه به در ربع سوم بودن α ، داریم:

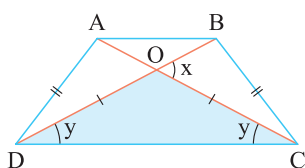
گام ۲۰ حاصل $\sin 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\bullet \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\bullet \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{24/25} = \frac{(\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2}{24/25} = \frac{7/25}{24/25} = \frac{7}{24}$$

گام ۲۱ سه مقدار به دست آمده را در عبارتمان جای گذاری می کنیم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} - (\frac{-4}{5})}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{44}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{44 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$



گام ۲ ۸۴۲ چون دوزنقه متساوی الساقین است، مثلث OCD هم متساوی الساقین است و $OC = OD$ هم برابر y است.

در همین مثلث، رابطه زاویه خارجی را می نویسیم:

مجموع دوزاویه داخلی غیرمجاور = زاویه خارجی $\Rightarrow x = y + y \Rightarrow x = 2y$

گام ۳ در کسر داده شده به جای x می نویسیم $2y$ و آن را ساده می کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2} \cos y} = \frac{\sin 2y}{\sin y \cos y} = \frac{2 \sin y \cos y}{\sin y \cos y} = 2$$

گام ۲ ۸۴۳ در مثلث ABC، مجموع زوایای A و C، 90° است: $\alpha + 5\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

گام ۳ در مثلث ABC، داریم: $\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$

در مثلث ADC، داریم: $\cos \alpha = \frac{AC}{AD}$

گام ۴ طرفین دو تساوی گام قبل را در هم ضرب می کنیم:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{BC}{AD} \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow AD = 4BC$$

گام ۱ ۸۴۴ دو مرتبه از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می کنیم: $4 \sin x \cos x \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$

گام ۲ جای x قرار می دهیم $7/5^\circ$: $\sin(4 \times 7/5^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$

گام ۲ ۸۴۵ واسطه هندسی $\frac{\pi}{16}$ و $x = \sin \frac{\pi}{16}$ و $y = \cos \frac{\pi}{16}$ برابر است با:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

گام ۲ ۸۴۶ زوایا در حال ۲ برابر شدن هستند:

$$A = 8 \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$$

دو طرف را در $\sin 2^\circ$ ضرب می کنیم:

$$A \sin 2^\circ = 8 \sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$$

گام ۳ حالا ۳ بار از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می کنیم:

$$A \sin 2^\circ = 8 \sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = 4 \sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = 2 \sin 8^\circ \cos 8^\circ = \sin 16^\circ$$

گام ۴ می دانیم سینوس زوایای مکمل باهم برابر است: پس $\sin 2^\circ = \sin 16^\circ$

$$A \sin 2^\circ = \sin 16^\circ \Rightarrow A = 1$$

و داریم:

گام ۲ ۸۳۸ رادیان همان 75° است. عبارت داده شده را مساوی A قرار می دهیم: $A = \sqrt{2 \sin 75^\circ} + \sqrt{2 \cos 75^\circ}$ طرفین را به توان ۲ می رسانیم:

$$A^2 = 2 \sin 75^\circ + 2 \cos 75^\circ + 2\sqrt{2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ} = 2 \sin 75^\circ + 2 \cos 75^\circ + 2\sqrt{2 \sin 150^\circ}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2(\sin 75^\circ + \cos 75^\circ) + 2\sqrt{2 \sin 150^\circ}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2(\sin 75^\circ + \cos 75^\circ) + 2$$

گام ۳ الان دوتا کار می توانیم انجام دهیم:

۱ اگر سینوس و کسینوس 75° را حفظ باشید که آن ها را جای گذاری می کنید:

$$A^2 = 2\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) + 2 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 2 = \sqrt{6} + 2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} A = \sqrt{\sqrt{6} + 2}$$

۲ عبارت $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ را مساوی B قرار می دهیم و از B^2 کمک می گیریم:

$$B^2 = \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ + 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = 1 + \sin 150^\circ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$A^2 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 2 = \sqrt{6} + 2 \xrightarrow{\text{جذر}} A = \sqrt{\sqrt{6} + 2}$$

گام ۱ ۸۳۹ در مثلث، مجموع سه زاویه π رادیان است: پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \pi - \hat{B} \xrightarrow{+2} \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \frac{\pi - \hat{B}}{2}$$

گام ۲ تساوی اولیه را ساده می کنیم:

$$\cos \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \cos \frac{\hat{B}}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi - \hat{B}}{2}\right) - \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\hat{B}}{2} - \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{1}{3}$$

گام ۳ طرفین را به توان ۲ می رسانیم:

$$\sin^2 \frac{\hat{B}}{2} + \cos^2 \frac{\hat{B}}{2} - 2 \sin \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - \sin \hat{B} = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{8}{9}$$

گام ۳ ۸۴۰ اول قضیه سینوس ها را می نویسیم:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{5}{\sin \hat{B}} = \frac{3}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{5}{3}$$

گام ۴ مقدار کسر داده شده را حساب می کنیم:

$$\frac{\sin 2\hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{2 \sin \hat{B} \cos \hat{B}}{\sin \hat{C}} = 2 \times \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \times \cos \hat{B} = 2 \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{50}{27}$$

گام ۳ ۸۴۱ نسبت مساحت مثلث به متوازی الاضلاع $\frac{4}{100}$ است: پس:

$$\frac{S_{\Delta}}{S_{\square}} = \frac{4}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times 3a \times 4b \times \sin 2\alpha}{2a \times 5b \times \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{6ab \cdot \sin 2\alpha}{5ab \cos \alpha} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha}{5 \cos \alpha} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

گام ۴ خواسته سؤال:

گام ۲ ۸۵۲ در مخرج به جای $\sin 1^\circ$ می‌نویسیم $\cos 8^\circ$ و از رابطه طلایی استفاده می‌کنیم:

$$1 + \sin 1^\circ = 1 + \cos 8^\circ = 2 \cos^2 4^\circ$$

$$\sin 8^\circ = 2 \sin 4^\circ \cos 4^\circ$$

گام ۳ تا این جا کسرمان این جوری شد:

$$\frac{\sin 8^\circ \cos 4^\circ}{(1 + \sin 1^\circ) \sin 2^\circ} = \frac{\cancel{\sin 4^\circ} \cos 4^\circ \cos 4^\circ}{\cancel{\cos 4^\circ} \sin 2^\circ} = \frac{\sin 4^\circ}{\sin 2^\circ}$$

گام ۴ $\sin 4^\circ$ را مثل گام دوم باز می‌کنیم:

$$\frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2 \cos 2^\circ \stackrel{\text{متمم}}{=} 2 \sin 7^\circ$$

گام ۲ ۸۵۳ $\frac{\pi}{12}$ همان 15° است.

برای به دست آوردن $\sin 15^\circ$ ، در رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ جای α می‌نویسیم 15° :

گام ۳ جای $\cos 30^\circ$ مقدارش را قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow 2 \sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \rightarrow a$$

$$ab = 3 \times 2 = 6$$

تذکره: $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ همان $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ است.

روش اول: ۲ ۸۵۴

گام ۱ $\frac{\pi}{12}$ رادیان همان 15° است. جای x ها قرار می‌دهیم 15° :

$$3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x$$

فاکتور از $\sqrt{2}$

$$= 3 \cos 6^\circ + \sqrt{2}(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)$$

گام ۲ مقادیر عددی $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

روش دوم: برای محاسبه $\sin 15^\circ - \cos 15^\circ$ ، اگر مقدارشان را حفظ نیستند،

کافی است آن را برابر با A قرار دهیم و A^2 را حساب کنیم؛ فقط دقت کنید چون

$$\sin 15^\circ < \cos 15^\circ \text{ پس } A < 0$$

$$A^2 = (\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \underbrace{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}_{1} - \underbrace{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}_{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

روش اول: ۴ ۸۵۵

گام ۱ مکمل زاویه $\frac{11\pi}{12}$ می‌شود $\frac{\pi}{12}$ رادیان که معادل 15° است.

گام ۲ اگر دو زاویه مکمل باشند، «سینوس هایشان برابر» و

$$\sin \frac{\pi}{12} \text{ می‌نویسیم } \sin \frac{11\pi}{12} \text{ است؛ پس جای } \sin \frac{11\pi}{12}$$

و به جای $\cos \frac{11\pi}{12}$ می‌نویسیم $-\cos \frac{\pi}{12}$:

$$\frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} = \frac{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$$

$$\frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} = \frac{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$$

گام ۲ ۸۴۷ جای $\tan x$ و $\cot x$ ، به ترتیب $\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\frac{\cos x}{\sin x}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sin^6 x \cot x - \cos^6 x \tan x &= \sin^6 x \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) - \cos^6 x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \sin^5 x \cos x - \cos^5 x \sin x \end{aligned}$$

گام ۳ فاکتور می‌گیریم:

$$\sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x)$$

تجزیه با مزدوج

$$= \sin x \cos x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)(\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x})$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4} \sin 4x$$

$$-\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

گام ۴ جای x ، قرار می‌دهیم $\frac{\pi}{24}$:

گام ۲ ۸۴۸ صورت را با اتحاد $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ و مخرج را با اتحاد $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \cos 8^\circ}{1 - \cos 8^\circ} = \frac{\cancel{2} \cos^2 4^\circ}{\cancel{2} \sin^2 4^\circ} = \cot^2 4^\circ$$

گام ۳ 4° و 5° متمم‌اند؛ پس $\cot^2 4^\circ$ با $\tan^2 5^\circ$ برابر است.

گام ۲ ۸۴۹ در صورت از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و در مخرج از اتحاد $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \cos x} = \frac{\sin x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + \cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} \frac{\sin x (1 + 2 \cos x)}{\cos x (2 \cos x + 1)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

گام ۱ ۸۵۰ در صورت از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و در مخرج از اتحاد طلایی $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cancel{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

گام ۲ عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

گام ۳ ۸۵۱

● در صورت کسر اول از $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و در مخرجش از $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\cancel{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}}{\cancel{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

● در صورت کسر دوم از $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cancel{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cancel{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

گام ۴ جمع دو کسر برابر است با:

$$\cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$



گام ۴ ۸۵۸ برای هر دو عبارت صورت و مخرج می‌توانیم از اتحادها استفاده کنیم:

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

گام ۵ در تساوی $f(\tan x) = \tan^2 x$ جای $\tan x$ می‌نویسیم: $f(t) = t^2$

حالا جای t می‌نویسیم $\cos \frac{\pi}{\lambda}$: $f(\cos \frac{\pi}{\lambda}) = \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}$

گام ۶ در اتحاد طلایی $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$ جای α قرار می‌دهیم $\frac{\pi}{\lambda}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

گام ۷ ۸۵۹ $\frac{\pi}{\lambda}$ رادیان است. $22/5$ درجه همان $\frac{\pi}{\lambda}$ رادیان است.

7α می‌شود $\frac{7\pi}{\lambda}$ که مکملش $\frac{\pi}{\lambda}$ است.

گام ۸ دو زاویه که مکمل هم هستند، تانژانتشان قرینه هم است:

$$\tan \frac{7\pi}{\lambda} = -\tan \frac{\pi}{\lambda}$$

گام ۹ در اتحاد $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$ جای θ قرار می‌دهیم 45° :

$$\tan 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ} - \cot 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

گام ۱۰ حاصل A را حساب می‌کنیم:

$$A = -1 + \tan 7\alpha = -1 + \tan \frac{7\pi}{\lambda} = -1 - \tan \frac{\pi}{\lambda} = -1 - (\sqrt{2} - 1) = -\sqrt{2}$$

تیزبازی:

$$A = -1 + \tan\left(\frac{7\pi}{\lambda}\right) = -1 - \tan \frac{\pi}{\lambda}$$

فقط $-\sqrt{2}$ در این محدوده است $\rightarrow$ چک گزینه‌ها $\rightarrow -2 < A < -1$ پس

گام ۱۱ ۸۶۰ $\frac{3\pi}{\lambda}$ همان $67/5^\circ$ رادیان است.

گام ۱۲ با جای‌گذاری $\alpha = \frac{3\pi}{\lambda}$ ، کسر داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\cot 3\alpha + \tan \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\cot \frac{9\pi}{\lambda} + \tan \frac{3\pi}{\lambda}}{\cos^2 \frac{9\pi}{\lambda} - \cos^2 \frac{3\pi}{\lambda}}$$

$$= \frac{\cot(\pi + \frac{\pi}{\lambda}) + \tan(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda})}{\cos^2(\pi + \frac{\pi}{\lambda}) - \cos^2(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda})} = \frac{\cot \frac{\pi}{\lambda} + \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}}$$

$$= \frac{2 \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{2 \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\cos \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{2 \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \cot \frac{\pi}{\lambda}$$

باز شده $\cos 2\alpha$

گام ۱۳ در اتحاد $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \cot \frac{\theta}{2}$ جای θ قرار می‌دهیم 45° :

$$\cot 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ} + \cot 45^\circ = \sqrt{2} + 1$$

گام ۱۴ در نتیجه

$$A = 2\sqrt{2} \cot \frac{\pi}{\lambda} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 4 + 2\sqrt{2} = 6/8 \rightarrow [A] = 6$$

گام ۱۵ جای سینوس و کسینوس 15° ، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

روش دوم:

گام ۱۶ و **گام ۱۷** مثل روش ۱.

گام ۱۸ چون 15° در نیمه اول ربع اول است، پس کسینوسش بزرگ‌تر است و صورت کسر، عددی منفی است:

$$A = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} < 0$$

گام ۱۹ A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{جنر}} |A| = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

گام ۲۰ ۸۵۶ هر ۴ عبارت را بر حسب نسبتی از زاویه 15° می‌نویسیم:

● $\sin(-285^\circ) = \sin(-360^\circ + 75^\circ) = \sin 75^\circ \xrightarrow{\text{حذف}} \cos 15^\circ$

● $\cos(-105^\circ) \xrightarrow{\text{کسینوس منفی شو می‌خوره}} \cos 105^\circ \xrightarrow{\text{مکمل}} \cos 75^\circ \xrightarrow{\text{متمم}} -\sin 15^\circ$

● $\sin 165^\circ \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin 15^\circ$

● $\sin 375^\circ = \sin(360^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$

گام ۲۱ عبارات بالا را در کسر اولیه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin(-285^\circ) + 2 \cos(-105^\circ)}{2 \sin(165^\circ) + 3 \sin(375^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ + 2(-\sin 15^\circ)}{2 \sin 15^\circ + 3 \sin 15^\circ}$$

$$= \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{5 \sin 15^\circ} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - 2 \right)$$

گام ۲۲ جای $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ ، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$A = \frac{1}{5} \times \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - 2 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - 2 \right)$$

گام ۲۳ صورت و مخرج کسر را به $\sqrt{2}$ ساده می‌کنیم و بعد، مخرجش را گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{5} \times \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} - 2 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{5} (\sqrt{3} - 2) = 0/2\sqrt{3}$$

گام ۲۴ ۸۵۷ $\frac{\pi}{36} \times \frac{18^\circ}{\pi} = 5^\circ$ رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم:

گام ۲۵ در ضابطه f ، جای x قرار می‌دهیم 5° :

$$f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$$

$$\xrightarrow{x=5^\circ} f(5^\circ) = 16 \cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ \cos^2 120^\circ$$

گام ۲۶ جای هر ۴ عبارت، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$f(5^\circ) = 16 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{-1}{2} \right)^2$$

$$= 16 \left(\frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} \right) \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right) = \cancel{16} (2 + \sqrt{3}) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

گام ۱ در مثلث قائم الزاویه کوچک $x = \frac{4}{3}$ را جای گذاری و وتر را با فیثاغورس حساب می کنیم:

$$\Rightarrow \text{وتر} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

• برای زاویه 2α ، کسینوس می نویسیم:

$$\cos 2\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

گام ۲ در دو مثلث قائم الزاویه ایجاد شده، برای زوایای α و 2α ، تانژانت می نویسیم:

• $\triangle AHB: \tan 2\alpha = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = \tan 2\alpha$

• $\triangle ACH: \tan \alpha = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH = 4 \tan \alpha$

گام ۳ با توجه به دو تساوی قبل، باید $\tan 2\alpha$ و $4 \tan \alpha$ برابر باشند:

$$\tan 2\alpha = 4 \tan \alpha \xrightarrow{\text{باز می کنیم}} \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 4 \tan \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 1 - \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام ۴ AH را حساب می کنیم:

$$AH = 4 \tan \alpha = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

گام ۵ پس:

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 5}{2} = 5\sqrt{2}$$

گام ۶ یک سری اطلاعات روی شکل اضافه می کنیم:

در مثلث رنگی، داریم:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

پس:

گام ۷ در مثلث OAB ، داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{AB}{OA} = AB$$

گام ۸ با داشتن $\tan \alpha$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{پس}} AB = \frac{4}{3}$$

گام ۹ در رابطه $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ ، جای α می نویسیم $\frac{x}{y}$:

$\cot \frac{x}{y} - \tan \frac{x}{y} = 2 \cot x \Rightarrow \cot x = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \tan x = -2$

سوال داده -۱

گام ۱۰ حالا از اتحاد $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ استفاده می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

گام ۱۱ مجموع ریشه های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ برابر با 5 است. پس جمع $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ باید 5 باشد:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 5 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = 5 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{5}$$

گام ۱۲ از $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ ، نتیجه می گیریم $\tan \alpha = 3$.

گام ۱۳ حالا از اتحاد $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ استفاده می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2(3)}{1 - 3^2} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

گام ۱۴ شکل را 90° می چرخانیم:

گام ۱۵ در مورد α ، می دانیم که:

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$\tan \alpha$ را حساب می کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16} \xrightarrow{\text{باز می کنیم}} \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

گام ۱۶ $\tan 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-3}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}$$

معکوس می کنیم:

$$\cot 2\alpha = \frac{-7}{24}$$

گام ۱۷ $\tan 2\alpha = 4 \cot \alpha \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{\tan \alpha}$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 \alpha = 4 - 4 \tan^2 \alpha \Rightarrow 6 \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

گام ۱۸ $\cos^2 \alpha$ را حساب می کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}$$

گام ۱۹ $\cos 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5}$$

گام ۲۰ طبق خطوط موازی مورب،

زاویه B_1 مکمل α یعنی $\pi - \alpha$ است.

گام ۲۱ در مثلث ABD ، برای B_1 ، تانژانت

می نویسیم:

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-3}{2}$$

گام ۲۲ تانژانت 2α را حساب می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(\frac{-3}{2}\right)}{1 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \frac{-3}{-\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$$

گام ۲۳ ضلع عمودی مثلث بزرگ را x می گیریم:

• در مثلث قائم الزاویه کوچک، داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{1}{x}$$

• در مثلث قائم الزاویه بزرگ، داریم:

گام ۲۴ دو مقدار به دست آمده را در اتحاد $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ قرار می دهیم:

$$\frac{1}{x} = \frac{2 \left(\frac{x}{4}\right)}{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{16}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x \left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{16} \xrightarrow{\times 16} 8x^2 = 16 - x^2 \Rightarrow 9x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

گام ۱ از اتحاد $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{5} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 4)(\tan x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 4 \\ \tan x = 1 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۸۷۴

گام ۱ برای نوشتن $\cos 4x$ ، در رابطه $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ، جای α

$$f(x) = \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \quad \text{می‌نویسیم:}$$

گام ۲ حالا جای $\cos 2x$ می‌نویسیم $2\cos^2 x - 1$:

$$f(x) = \cos 4x = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

گام ۳ جای $\cos^2 x$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 x$:

$$f(x) = 8\cos^4 x - 8(1 - \sin^2 x) + 1 = 8\cos^4 x + 8\sin^2 x - 7$$

$$\left[\frac{ab}{c}\right] = \left[\frac{a \times b}{c}\right] = \left[\frac{64}{-7}\right] = \left[-9 \dots\right] = -10 \quad \text{پس:}$$

گام ۱ هر دو تساوی لگاریتمی را به تساوی نمایی معادلشان

$$\bullet \log_r(1 - \sin x) = a \Rightarrow r^a = 1 - \sin x \quad \text{تبدیل می‌کنیم:}$$

$$\bullet \log_r(1 + \sin x) = b \Rightarrow r^b = 1 + \sin x$$

گام ۲ طرفین دو تساوی را در هم ضرب می‌کنیم:

$$r^a \times r^b = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \Rightarrow r^{a+b} = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x$$

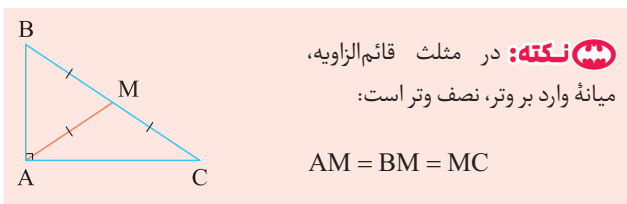
گام ۳ برای ساده‌کردن عبارتی که سؤال می‌خواهد به جای $\cos 2x$

$$\text{می‌نویسیم } 1 - 2\cos^2 x$$

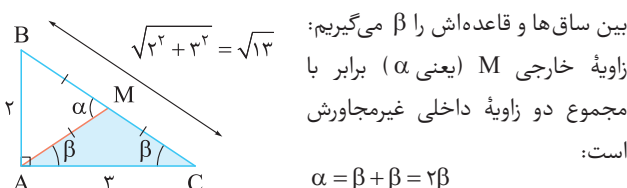
$$\log_r(1 + \cos 2x) = \log_r(1 + 2\cos^2 x - 1) = \log_r(2\cos^2 x)$$

$$\xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} \log_r 2 + \log_r \cos^2 x = 1 + \log_r(r^{a+b}) = 1 + a + b$$

۸۷۶



گام ۱ با توجه به نکته بالا، مثلث AMC متساوی الساقین است. اندازه زوایای



گام ۲ در مثلث ABC، برای زاویه رأس C، کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

گام ۳ پس:

$$\cos \alpha = \cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1 = \frac{16}{13} - 1 = \frac{3}{13}$$

گام ۱ تساوی اولیه را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 4 \xrightarrow{+2} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 6$$

$$\xrightarrow{\text{به شکل مربع کامل می‌نویسیم}} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 6$$

$$\Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 6 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \pm \sqrt{6}$$

گام ۲ به کمک اتحاد $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ، داریم:

$$\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2 = 6 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = \pm \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{6} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

گام ۱ $\sin x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 4 + 4 \sin x = 1 - \sin x$$

$$\Rightarrow 5 \sin x = -3 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

گام ۲ از اتحاد $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{-3}{5} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{\tan \frac{x}{2} = A} 10A = -3 - 2A^2$$

$$\Rightarrow 2A^2 + 10A + 3 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} A^2 + 5A + 1.5 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -9 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ A = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{پس}} \begin{cases} \tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \times \\ \tan \frac{x}{2} = -3 \checkmark \end{cases}$$

تذکره: چون x در ربع سوم است، پس: $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2}$

در نیمه اول ربع دوم، تانژانت در بازه $(-\infty, -1)$ قرار دارد، پس فقط -3 می‌تواند جواب باشد. در نتیجه در صورت سؤال، عبارت «صحیح» لازم نبود قید شود.

گام ۱ به کمک اتحادها، هر سه مقدار $\sin \alpha$ ، $\tan \alpha$ و $\cos \alpha$ را از روی $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ حساب می‌کنیم:

$$\bullet \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

$$\bullet \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{17}{16}} = \frac{8}{17}$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{17}$$

گام ۲ پس:

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{8(\frac{1}{15} - \frac{1}{17})}{\frac{-7}{17}} = \frac{8 \times \frac{2}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{-16}{105}$$

گام ۱ طرفین تساوی داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(10(\sin x + \cos x))^2 = (6\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 100(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 180$$

$$\xrightarrow{\div 100} 1 + \sin 2x = 1.8 \Rightarrow \sin 2x = 0.8 \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$



گام ۱ سعی می‌کنیم همه نسبت‌ها را برحسب نسبتی از زاویه

20° یا دو برابرش یعنی 40° بنویسیم:

$$\frac{2 \sin 50^\circ + \cos 20^\circ}{1/5 \cos 31^\circ + 2 \sin 25^\circ}$$

حذف

$$= \frac{2 \sin(36^\circ + 18^\circ - 40^\circ) + \cos(18^\circ + 20^\circ)}{1/5 \cos(27^\circ + 40^\circ) + 2 \sin(27^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{2 \sin 4^\circ - \cos 2^\circ}{1/5 \sin 4^\circ - 2 \cos 2^\circ}$$

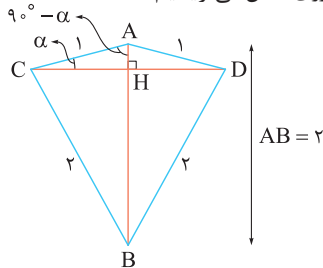
گام ۲ $\sin 40^\circ$ را با $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ باز می‌کنیم:

فکتور

$$\frac{4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ - \cos 2^\circ}{3 \sin 20^\circ \cos 20^\circ - 2 \cos 2^\circ} = \frac{\cos 2^\circ (4 \sin 20^\circ - 1)}{\cos 2^\circ (3 \sin 20^\circ - 2)}$$

$$= \frac{4(0/35) - 1}{3(0/35) - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

گام ۳ اندازه اضلاع را روی شکل می‌نویسیم:



گام ۴ مثلث CAB، متساوی الساقین است، پس $\hat{ACB}$ هم $90^\circ - \alpha$ است. زاویه B را برحسب α پیدا می‌کنیم:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$

گام ۵ حالا در دو مثلث CAH و CHB، داریم:

● $\Delta CAH: \cos \alpha = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CH = \cos \alpha$

● $\Delta CHB: \sin 2\alpha = \frac{CH}{CB} \Rightarrow CH = 2 \sin 2\alpha$

از برابر قرار دادن دو مقدار CH، داریم:

$$\cos \alpha = 2 \sin 2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 1/4$$

گام ۶ مساحت مثلث ABC، ۳۶ است؛ پس:

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 4 \times \sin \alpha = 36 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

گام ۷ چون $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، پس $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و در نتیجه:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

گام ۸ ارتفاع وارد بر $A'C'$ در مثلث $A'B'C'$ را می‌کشیم:



$$\sin 2\alpha = \frac{B'H}{A'B'} \Rightarrow \frac{24}{25} = \frac{B'H}{24} \Rightarrow B'H = 24$$

گام ۳ چون $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس $\hat{B}$ و $\hat{C}$ متمم‌اند، در نتیجه $\sin \hat{C}$ همان $\cos \hat{B}$ است.

گام ۴ تساوی داده‌شده را برحسب $\cos \hat{B}$ می‌نویسیم:

$$\frac{\sin \hat{C} \cos 2\hat{B}}{\cos \hat{B} 2 \cos^2 \hat{B} - 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cos^2 \hat{B} - \cos \hat{B} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4} 8 \cos^2 \hat{B} - 4 \cos \hat{B} - 1 = 0$$

گام ۵ جای $\cos \hat{B}$ می‌نویسیم t:

$$8t^2 - 4t - 1 = 0 \xrightarrow[\text{می‌نویسیم } -2+1]{\text{به جای } -1} \frac{8t^2 + 1}{-2+1} - 4t - 2 = 0 \Rightarrow$$

فکتور از -2 جاق ولاغر

$$(2t+1)(4t^2 - 2t + 1) - 2(2t+1) = 0 \Rightarrow (2t+1)(4t^2 - 2t + 1 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t+1=0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \times \\ 4t^2 - 2t - 1 = 0 \end{cases}$$

گام ۶ چون $\hat{B}$ حاده است، پس $\cos \hat{B} = -\frac{1}{2}$ قبول نیست. معادله دوم را حل می‌کنیم:

$$4t^2 - 2t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=20} t = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\xrightarrow{\cos \hat{B} > 0} \cos \hat{B} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

عدد طلایی $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ بود؛ پس $\cos \hat{B} = \frac{1}{4}$ ، برابر عدد طلایی است.

گام ۷ شکل می‌کشیم:



مساحت این مثلث ۳ است؛ پس:

$$3 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \sin \alpha \Rightarrow 3 = 9 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

گام ۸ از آن جایی که دو زاویه مکمل، سینوس هایشان برابر است، پس اگر

$\sin \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، آن وقت $\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$ ؛ پس زاویه مورد نظر یا α است یا $\pi - \alpha$ است.

اختلاف این دو زاویه برابر است با:

$$(\pi - \alpha) - \alpha = \pi - 2\alpha$$

گام ۹ کسینوس $\pi - 2\alpha$ را می‌خواهیم:

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2 \sin^2 \alpha) = -(1 - 2(\frac{1}{3})^2) = -(1 - \frac{2}{9}) = -\frac{7}{9}$$

فرمول داره

گام ۱۰

از اتحادهای $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + k \cos 2x$$

$$= 1 - 2(\sin^2 x \cos x) + k(1 - 2 \sin^2 2x)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \sin^2 2x + k - 2k \sin^2 2x$$

$$\xrightarrow[\text{فکتور از } -\sin^2 2x]{\text{فکتور از } -\sin^2 2x} f(x) = 1 + k - \sin^2 2x (\frac{2}{3} + 2k)$$

گام ۱۱

● برای آن‌که f ثابت باشد، باید ضریب $\sin^2 2x$ صفر باشد:

$$\frac{2}{3} + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = 1 + k = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

● پس ضابطه f به شکل مقابل است:

$$\frac{f(140^\circ)}{k} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{1}$$

گام ۱۲ در نتیجه:

گام ۱: پس: $AE \times ED = 4 \sin \beta \cos \alpha \times 4 \sin \alpha \cos \beta$

$$= 16 \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \underbrace{\sin \beta \cos \beta}_{\frac{1}{2} \sin 2\beta} = 4 \sin 2\alpha \sin 2\beta$$

گام ۲: چون $\alpha + \beta = 45^\circ$ ، پس $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ ؛ یعنی 2α و 2β متمم اند و می‌توانیم جای $\sin 2\beta$ بنویسیم $\cos 2\alpha$:

$$4 \sin 2\alpha \underbrace{\sin 2\beta}_{\cos 2\alpha} = 4 \underbrace{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} = 2 \sin 4\alpha$$

۱۸۶

گام ۱: در برانتز از رابطه $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$(1 + \cos \frac{\pi}{3}) \cot \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{3}$$

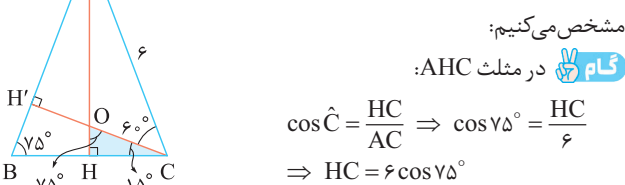
گام ۲: جای $\frac{\pi}{3}$ می‌نویسیم $\frac{\pi}{4}$ ؛ زوایای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ متمم اند (جمعشان $\frac{\pi}{2}$ است) و می‌توانیم جای $\cot \frac{\pi}{4}$ بنویسیم $\tan \frac{\pi}{4}$:

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} \times \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2}$$

باز شده $\sin 2\alpha$

۱۸۷

گام ۱: اندازه چند زاویه را روی شکل مشخص می‌کنیم:



$$\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{HC}{6} \Rightarrow HC = 6 \cos 75^\circ$$

در مثلث HOC:

$$\tan \hat{C} = \frac{OH}{HC} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{OH}{6 \cos 75^\circ} \Rightarrow OH = 6 \cos 75^\circ \tan 15^\circ$$

گام ۲

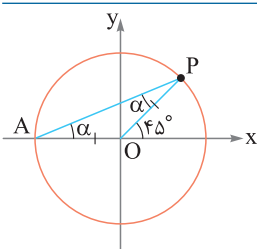
نکته: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 15° به صورت زیر است:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

مساحت مثلث OHC برابر است با:

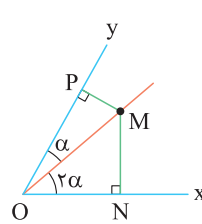
$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times OH \times HC = \frac{1}{2} \times 6 \cos 75^\circ \tan 15^\circ \times 6 \cos 75^\circ = 18 \cos^2 75^\circ \tan 15^\circ = 18 \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 (2 - \sqrt{3}) = 9 \left(\frac{6 - 4\sqrt{3} + 2}{16} \right) (2 - \sqrt{3}) = 9 \left(\frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} \right) (2 - \sqrt{3}) = \frac{9}{4} (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{9}{4} (7 - 4\sqrt{3}) = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{4}$$

۱۸۸



گام ۱: چون $x_P = y_P$ در ناحیه اول است، پس P روی انتهای کمان 45° قرار دارد: از طرفی چون $OA = OP$ ، پس مثلث AOP متساوی الساقین است و $\hat{P} = \alpha$ می‌شود.

گام ۱: شکل گفته شده در سؤال را می‌کشیم:



گام ۲: در دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده، برای زوایای α و 2α ، سینوس می‌نویسیم:

$$\triangle OMN : \sin 2\alpha = \frac{MN}{OM}$$

$$\triangle OPM : \sin \alpha = \frac{PM}{OM}$$

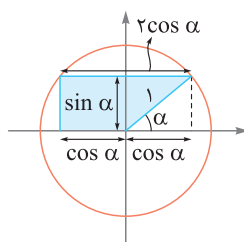
گام ۳: از تقسیم طرفین دو تساوی بر هم، داریم:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{PM}{OM}} \Rightarrow \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{PM}$$

گام ۴: جای $\cos \alpha$ هم در مثلث OPM، می‌توانیم بنویسیم $\frac{OP}{OM}$:

$$\frac{MN}{PM} = 2 \cos \alpha \Rightarrow \frac{MN}{PM} = \frac{2OP}{OM}$$

۱۸۹



گام ۱: روی دایره، اندازه پاره‌ها را مشخص می‌کنیم:

گام ۲: مساحت دوزنقه را می‌نویسیم:

$$S = \frac{(\text{ارتفاع} \times (\text{قاعده} + \text{قاعده}'))}{2} = \frac{(\cos \alpha + 2 \cos \alpha) \times \sin \alpha}{2} = \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

گام ۳: جای $\sin \alpha \cos \alpha$ می‌نویسیم $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$:

$$S = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = \frac{3}{4} \sin 2\alpha$$

حداکثر می‌شه

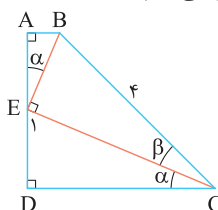
زمانی S ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد؛ پس:

۱۸۵

گام ۱: در چهارضلعی ABCD، مجموع زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ، 180° است؛ پس:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B} = 3\hat{C} \text{ برابر است}} 4\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$$

گام ۲: اندازه یک زاویه دیگر را روی شکل مشخص می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle EDC : \hat{E}_1 + \alpha = 90^\circ \\ \triangle AEB : \hat{E}_1 + \beta = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AEB} = \alpha$$

گام ۳

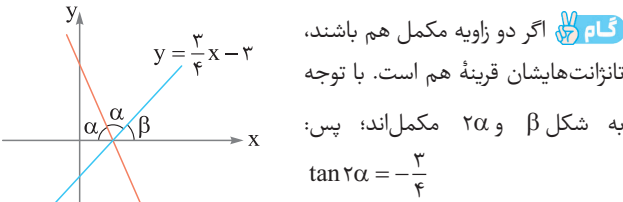
در مثلث BCE: $\sin \beta = \frac{BE}{4} \Rightarrow BE = 4 \sin \beta$

در مثلث DEC: $\cos \beta = \frac{EC}{4} \Rightarrow EC = 4 \cos \beta$

در مثلث DEC: $\sin \alpha = \frac{ED}{4 \cos \beta} \Rightarrow ED = 4 \sin \alpha \cos \beta$

در مثلث ABE: $\cos \alpha = \frac{AE}{4 \sin \beta} \Rightarrow AE = 4 \sin \beta \cos \alpha$

گام ۱ ۸۹۱ چون شیب خط d' برابر $\frac{3}{4}$ است، پس: $\tan \beta = \frac{3}{4}$



گام ۲ به کمک فرمول $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ مقدار $\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

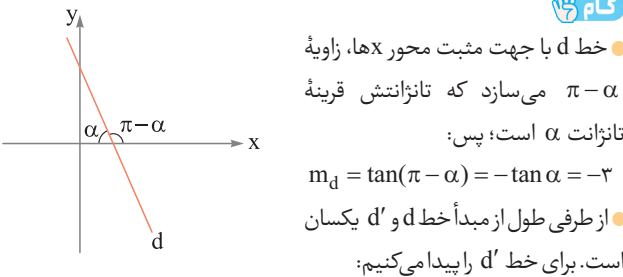
$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 8 \tan \alpha = -3 + 3 \tan^2 \alpha$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روسی}} \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \tan \alpha = -1 \\ \tan \alpha = 9 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{1}{3} \\ \tan \alpha = 3 \end{cases}$$

چون α حاده است، پس $\tan \alpha = 3$ قبول است.



$$y = \frac{3}{4}x - 3 \xrightarrow{y=0} \frac{3}{4}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 4$$

گام ۳ معادله خط d را با داشتن شیب و نقطه $(4, 0)$ می‌نویسیم:

$$y - 0 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 12$$

$$m + h = -3 + 12 = 9$$

گام ۲ ۸۹۲ دو بار از اتحاد $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\bullet \cot 12^\circ - \tan 12^\circ = 2 \cot 24^\circ$$

$$\bullet 2 \cot 48^\circ - \tan 24^\circ = 2 \cot 24^\circ$$

گام ۳ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = (\cot 12^\circ - \tan 12^\circ)(1 - 2 \cot 48^\circ \tan 24^\circ)$$

$$= 2 \cot 24^\circ (1 - (\cot 24^\circ - \tan 24^\circ) \times \tan 24^\circ)$$

$$= 2 \cot 24^\circ (1 - \cot 24^\circ \tan 24^\circ + \tan^2 24^\circ)$$

$$= 2 \cot 24^\circ \cdot \tan^2 24^\circ = 2 \cot 24^\circ \tan 24^\circ \tan 24^\circ = 2 \tan 24^\circ$$

گام ۳ ۸۹۳ به کمک قواعد لگاریتم، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_7 (\sin^2 \alpha) - \log_7 (1 + \cos \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \log_7 (\sin \alpha) - \log_7 (1 + \cos \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \log_7 (\sin \alpha) - \log_7 (1 + \cos \alpha) = 1$$

$$\xrightarrow{\log C A - \log C B = \log C \frac{A}{B}} \log_7 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 \xrightarrow{\text{تبدیل به نمایی}} 7^1 = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

گام ۳ در هر مثلث، مجموع دو زاویه داخلی برابر با زاویه خارجی رأس سوم است؛ پس:

$$\alpha + \alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

در رابطه $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ، جای α می‌نویسیم 22.5° :

$$\cos 45^\circ = 2 \cos^2 22.5^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cos^2 22.5^\circ$$

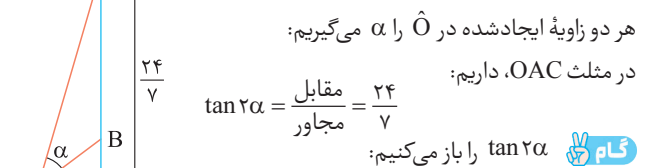
$$\xrightarrow{\div 2} \cos^2 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

عدد $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$ به اندازه $\frac{\sqrt{2}}{4}$ از $\frac{1}{2}$ بیشتر است.

$$\frac{1}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = 2 - \frac{2}{2}$$

گام ۴ را توان دار می‌نویسیم:

گام ۳ ۸۸۹ چون OB نیمساز $\hat{O}$ است، پس:



$$\frac{\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{5} \Rightarrow 5 \tan 2\alpha + 24 \tan \alpha - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روسی}} \tan^2 \alpha + 7 \tan \alpha - 144 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (\tan \alpha + 16)(\tan \alpha - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -16 \\ \tan \alpha = 9 \end{cases} \xrightarrow{\div 12} \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \tan \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

α حاده است) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

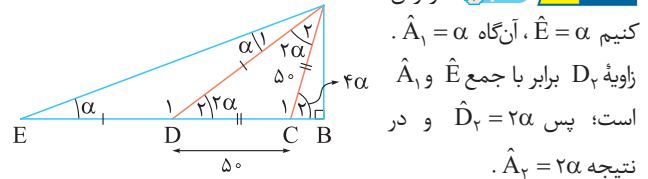
$$\tan \alpha = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \frac{3}{4}$$

در مثلث OBC ، داریم:

$$AB = AC - BC = \frac{24}{5} - \frac{3}{4} = \frac{75}{20}$$

در نتیجه:

گام ۳ ۸۹۰ اگر فرض کنیم $\hat{A}_1 = \alpha$ ، $\hat{E} = \alpha$ ، آن‌گاه $\hat{A}_1$ و $\hat{E}$ زاویه D_1 برابر با جمع $\hat{A}_1$ و $\hat{E}$ است؛ پس $\hat{D}_1 = 2\alpha$ و نتیجه $\hat{A}_1 = 2\alpha$.



گام ۴ از $\cot(\hat{ADC}) = \frac{4}{3}$ نتیجه می‌گیریم که $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$.

$\tan 4\alpha$ و $\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\bullet \tan 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{معادله حل}} \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{5} \xrightarrow{\Delta ABC} \begin{cases} AB = 24k \\ CB = 7k \end{cases}$$

گام ۵ در مثلث ABC ، فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(24k)^2 + (7k)^2 = 50^2 \Rightarrow 625k^2 = 2500 \Rightarrow k = 2$$

گام ۶ در مثلث ABE ، داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{EB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{24k}{ED + 50 + 7}$$

$$\xrightarrow{k=2} \frac{1}{3} = \frac{48}{ED + 64} \Rightarrow ED + 64 = 144 \Rightarrow ED = 80$$



گام ۱ در صورت از اتحاد $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ و در مخرج از اتحاد

طلایی $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$2 = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = 2$$

گام ۲ از اتحاد تانژانت 2α استفاده می‌کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(2)}{1 - 2^2} = \frac{-4}{3} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{معکوس}} \cot \alpha = \frac{-3}{4}$$

گام ۳ سه عدد $\cot \alpha$ ، $\cot 2^\circ$ و $\cot 1^\circ$ ، سه جمله متوالی

یک دنباله حسابی‌اند؛ پس:

$$\cot 2^\circ = \frac{\cot \alpha + \cot 1^\circ}{2} \Rightarrow \cot 2^\circ = \frac{\cot \alpha + \cot 1^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \cot 1^\circ + \cot \alpha = 2 \cot 2^\circ \quad (*)$$

گام ۴ در رابطه $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ ، اگر $\alpha = 1^\circ$ باشد، داریم:

$$\cot 1^\circ - \tan 1^\circ = 2 \cot 2^\circ \quad (**)$$

گام ۵ از مقایسه $(*)$ و $(**)$ ، داریم:

$$\cot 1^\circ + \cot \alpha = \cot 1^\circ - \tan 1^\circ \Rightarrow \cot \alpha = -\tan 1^\circ$$

گام ۶ جای $\tan 1^\circ$ می‌نویسیم $\cot 8^\circ$:

$$\cot \alpha = -\cot 8^\circ$$

گام ۷ دو زاویه که مکمل‌اند، کتانژانت‌هایشان قرینه هم‌است. 8° و 10°

مکمل‌اند؛ پس $-\cot 8^\circ$ با $\cot 10^\circ$ برابر است:

$$\cot \alpha = -\cot 8^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

گام ۸ می‌دانیم $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ، پس به جای

$$\tan \alpha + \cot \alpha \text{ می‌نویسیم } \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$2\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right) + 6 \tan \alpha = 2(\tan \alpha + \cot \alpha) + 6 \tan \alpha$$

$$= 4 \tan \alpha + 2 \cot \alpha$$

گام ۹ اگر a و b اعدادی مثبت باشند، آن وقت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؛ پس با فرض

$a = 4 \tan \alpha$ و $b = 2 \cot \alpha$ ، داریم:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 4 \tan \alpha + 2 \cot \alpha \geq 2\sqrt{(4 \tan \alpha)(2 \cot \alpha)} = 8$$

پس عبارت‌مان بزرگ‌تر یا مساوی ۸ است و در نتیجه کم‌ترین مقدارش ۸ است.