مقدمه مؤلفان

به جلد درس‌نامه خوش آمدید!

این‌جا سعی کردیم همهٔ مطالب رو به صورت مفهومی و با زبونی ساده براتون توضیح بدیم. برای این‌کار از یک سری آیکون کاربردی هم استفاده کردیم که باید درموردشون توضیح بدیم:

نکته: یه مطلب مهم کنکوری که احتمال طرح تست ازش زیاده.

شفاف‌سازی: قسمتی از صورت سؤال رو که مبهم یا غیرمستقیم حرف می‌زنه، این‌جا براتون شفاف می‌کنیم.

تیزبازی: یک تکنیک سریع حل تست یا روش خلاقانهٔ حل یک سؤاله.

تله: اشتباهی رو که ممکنه انجام بدی و به گزینهٔ اشتباه برسی، این‌جا توضیح می‌دیم.

حواستون باشه توضیح برای این که یه وقت اشتباه برداشت نکنی.

یه توصیه: پیشنهادی که بهتره بهش گوش کنی.

فلش بک: یادآوری یک مطلب مهم که ممکنه فراموش کرده باشید.

کمی عمیق‌تر: این‌جا مطالب پیشرفته‌ای رو آوردیم که کمک می‌کنن عمیق‌تر درس رو یاد بگیرید و سریع‌تر تست بزنید.

خارج کتاب ولی داخل کنکور این‌ها مطالب خارج از کتاب هستن که تو کنکور ازشون سؤال میاد.

فهرست

	صفحه
۱ فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد	
درس اول: استدلال ریاضی	۵
درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح	۹
درس سوم: همنهشتی در اعداد صحیح و کاربردها	۳۷
۲ فصل دوم: گراف و مدل‌سازی	
درس اول: معرفی گراف	۶۱
درس دوم: مدل‌سازی با گراف	۸۴
۳ فصل سوم: ترکیبیات	
درس اول: شمارش بدون شمردن	۹۶
درس دوم: مباحثی در ترکیبیات	۱۰۷
درس سوم: روش‌هایی برای شمارش	۱۲۰
۴ فصل چهارم: آشنایی با مبانی ریاضیات	
درس اول: آشنایی با منطق ریاضی	۱۳۲
درس دوم: مجموعه‌ها	۱۴۲
۵ فصل پنجم: احتمال	
درس اول: مبانی احتمال	۱۵۸
درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس	۱۷۰
درس سوم: احتمال شرطی	۱۷۲
درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته	۱۸۰
۶ فصل ششم: آمار توصیفی و استنباطی	
درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها	۱۸۵
درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز	۱۸۹
درس سوم: معیارهای پراکندگی	۱۹۶
درس چهارم: روش‌های جمع‌آوری اطلاعات	۲۰۳
درس پنجم: برآورد	۲۰۸

پیداکردن باقی‌مانده در اعداد توان‌دار

یکی از مهم‌ترین مدل‌های سؤال‌های همنهشتی، پیداکردن باقی‌مانده در عددهای توان‌دار است. سؤال‌هایی مثل این‌که «باقی‌ماندهٔ $۲^{۳۷}$ بر ۲۱ چند است؟» در این قسمت می‌خواهیم روش‌هایی یاد بگیریم که با استفاده از آن‌ها این مدل سؤال‌ها را حل کنیم. برای این کار خوب است یک راهنما و دسته‌بندی برای این نوع سؤال‌ها داشته باشیم، تا بدانیم در مواجهه با این سؤال‌ها بهتر است چه کار کنیم.

روش‌های حل سؤال‌های عدد توان‌دار

۱ پیداکردن همنهشتی ۱ یا ۱−
۲ استفاده از همنهشتی‌های دیگر مثل ۲، ۲− و ...
۳ استفاده از قضیهٔ فرما
۴ وقتی لازم است طرفین را تقسیم کنیم.
۵ روش تبدیل به ضرب دو عدد و استفاده از ک.م.م
۶ وقتی دو عدد، عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ دارند.
۷ استفاده از قضیهٔ اویلر
۸ وقتی متغیر داریم.

حالا برویم سراغ توضیح‌دادن هر کدام از مدل‌ها:

۱. پیداکردن همنهشتی ۱ یا ۱- برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ a^n بر b سعی می‌کنیم اول یک توان کوچک از a پیدا کنیم که به پیمانهٔ m، ترجیحاً همنهشت با ۱ یا ۱− باشد، بعد با استفاده از ویژگی به توان‌رساندن در همنهشتی، a^n را بسازیم.

برای مثال اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ $۳^{۱۰۲}$ بر ۱۶ را به دست آوریم، اول باید ببینیم در میان توان‌های کوچک ۳ کدامشان در تقسیم بر ۱۶ همنهشت با ۱ یا ۱− است. اولین توان ۳ که از ۱۶ بزرگ‌تر است، $۳^۳$ است:

$$۳^۳ \overset{۱۶}{\equiv} ۱۱$$

همان‌طور که می‌بینید باقی‌ماندهٔ $۳^۳$ بر ۱۶ برابر ۱۱ است که به درد ما نمی‌خورد. می‌رویم سراغ توان بعدی:

$$۳^۴ \overset{۱۶}{\equiv} ۱$$

خب! این خودش است. باقی‌ماندهٔ ۸۱ یا $۳^۴$ بر ۱۶ برابر ۱ است. بنابراین توان مناسب را پیدا کرده‌ایم. حالا نوبت ساختن $۳^{۱۰۲}$ است:

$$۳^۴ \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲۵}} ۳^{۱۰۰} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^{۱۰۲} \overset{۱۶}{\equiv} ۹$$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۲۴۳}$ بر ۳۱ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ۳: این‌جا باید یک همنهشتی اولیه بنویسیم، بعد آن را به توان رسانده و $۲^{۲۴۳}$ را بسازیم. اگر بتوانیم توانی از ۲ پیدا کنیم که همنهشت با ۱ یا ۱− به پیمانهٔ ۳۱ بشود، خیلی خوب است. اولین توان ۲ که از ۳۱ بزرگ‌تر است $۲^۵$ است که در تقسیم بر ۳۱ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد:

$$۲^۵ \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۴۸}} ۲^{۲۴۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^۳} ۲^{۲۴۳} \overset{۳۱}{\equiv} ۲^۳ = ۸$$

پس باقی‌مانده برابر ۸ می‌شود.

تست: باقی‌ماندهٔ عدد $۲\times(۳^{۲۳}-۱)$ در تقسیم بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ۲: می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ $۲\times(۳^{۲۳}-۱)$ را بر ۷ پیدا کنیم. در گام اول سعی می‌کنیم توانی از ۳ را پیدا کنیم که ترجیحاً به پیمانهٔ ۷ همنهشت با ۱ یا ۱− باشد:

$$۳^۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان ۷}} ۳^{۲۱} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^۷ = -۱ \xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^{۲۳} \overset{۷}{\equiv} -۹ \equiv -۲ \xrightarrow{-۱} ۳^{۲۳}-۱ \overset{۷}{\equiv} -۳ \xrightarrow{\times ۲} ۲\times(۳^{۲۳}-۱) \overset{۷}{\equiv} -۶+۷ = ۱$$

۷تا اضافه کردیم تا باقی‌مانده مثبت دربیاید؛ پس باقی‌مانده برابر ۱ می‌شود.

تست: باقی‌ماندهٔ $۲^{۵n+۱}$ در تقسیم بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲ یا ۷ ۳) ۲ یا ۹ ۴) ۲ یا ۱۰

پاسخ۳: ابتدا یک توان کوچک از ۲ پیدا می‌کنیم که در تقسیم بر ۱۱ همنهشت با ۱ یا ۱− باشد. اولین توان ۲ که بزرگ‌تر از ۱۱ است، $۲^۴$ است که داریم: $۲^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$

$$۲^۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} -۱$$

۵ عدد مناسبی نیست. بنابراین به سراغ توان بعدی می‌رویم:

حالا سعی می‌کنیم عبارت صورت سؤال را بسازیم. طرفین را به توان n می‌رسانیم و در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲^۵ \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان n}} ۲^{۵n} \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^n \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۵n+۱} \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^n \times ۲$$

حالا دقت کنید که دو حالت پیش می‌آید:

- **اگر n زوج باشد:**

$$۲^{۵n+۱} \overset{۱۱}{\equiv} ۱\times ۲ = ۲$$

یعنی در این حالت باقی‌مانده در تقسیم به ۱۱ برابر ۲ است.

- **اگر n فرد باشد:**

$$۲^{۵n+۱} \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۹$$

در این حالت باقی‌ماندهٔ عبارت بر ۱۱ برابر ۹ است.

۲. استفاده از همنهشتی‌های دیگر مثل ۲،۲- و ...

گاهی اوقات در بعضی سؤال‌های پیداکردن باقی‌مانده در اعداد توان‌دار نمی‌توانیم به راحتی یک توان کوچک پیدا کنیم که همنهشت با ۱ یا ۱− باشد. در این صورت باید از عددهای دیگری استفاده کنیم و مرحله‌به‌مرحله سؤال را ساده کنیم.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ $۵^{۱۹}$ را بر ۴۱ پیدا کنیم، اول باقی‌ماندهٔ چند توان ۵ را بر ۴۱ پیدا می‌کنیم:

$$۵^{۳} \overset{۴۱}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۴} \overset{۴۱}{\equiv} ۱۰ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۵} \overset{۴۱}{\equiv} ۵۰ \overset{۴۱}{\equiv} ۹$$

همان‌طور که می‌بینید توان‌های کوچک ۵ هیچ‌کدام در پیمانهٔ ۴۱ همنهشت با ۱ یا ۱− نیستند، پس به ناچار از عدد همنهشت دیگری استفاده می‌کنیم و مرحله‌به‌مرحله عدد توان‌دار مورد نظر را می‌سازیم:

$$۵^{۳} \overset{۴۱}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{به توان } ۶} ۵^{۱۸} \overset{۴۱}{\equiv} ۶۴ \overset{۴۱}{\equiv} ۲۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۱۹} \overset{۴۱}{\equiv} ۱۱۵ \overset{۴۱}{\equiv} \underbrace{۳۳}_{\text{باقی‌مانده}}$$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۳۳}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ۲: ترجیح آن است که یک توان کوچک از ۷ پیدا کنیم که در تقسیم بر ۱۷ همنهشت با ۱ یا ۱− باشد، اما از آن‌جایی که در توان‌های کوچک ۷ چنین عددی وجود ندارد، از $۷^{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$۷^{۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\text{به توان } ۱۶} ۷^{۳۲} \overset{۱۷}{\equiv} (-۲)^{۱۶} \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۲^{۱۶} \times ۷$$

پس به جای $۷^{۳۳}$ می‌توانیم باقی‌ماندهٔ $۲^{۱۶} \times ۷$ را بر ۱۷ به دست آوریم:

$$۲^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۴} ۲^{۱۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷} ۲^{۱۶} \times ۷ \overset{۱۷}{\equiv} ۷$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $۷^{۳۳}$ بر ۱۷ برابر ۷ است.

۳. استفاده از قضیهٔ فرما

یک قضیه‌ای داریم به اسم قضیهٔ فرما که در این مدل سؤال‌ها کمک‌کننده است. البته حواستان باشد که این قضیه در کتاب درسی نیست و در امتحان نهایی نمی‌توانید از آن استفاده کنید.

اگر p عددی اول و هم‌چنین $(a, p) = ۱$ باشد، داریم:

$$a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$$

برای مثال در تست قبل اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ $۷^{۳۳}$ بر ۱۷ را با استفاده از قضیهٔ فرما به دست آوریم، داریم:

فرما: $$۷^{۱۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} ۷^{۳۲} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۷$$

تست: کوچک‌ترین مقدار طبیعی a که به ازای آن $۵^{۷۵} + a$ بر ۳۷ بخش‌پذیر می‌شود، کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۳ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

پاسخ۲: با توجه به این‌که ۳۷ عددی اول است، از قضیهٔ فرما استفاده می‌کنیم:

$$۵^{۳۶} \overset{۳۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} ۵^{۷۲} \overset{۳۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^{۳}} ۵^{۷۵} \overset{۳۷}{\equiv} ۱۲۵ \overset{۳۷}{\equiv} ۱۴ \xrightarrow{+a} ۵^{۷۵} + a \overset{۳۷}{\equiv} ۱۴ + a$$

a باید کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد به طوری که $۱۴ + a$ بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. بنابراین $۱۴ + a$ را برابر خود ۳۷ فرض می‌کنیم:

$$۱۴ + a = ۳۷ \Rightarrow a = ۲۳$$

۴. وقتی لازم است طرفین را تقسیم کنیم

گاهی در بعضی سؤال‌های پیداکردن باقی‌مانده در عددهای توان‌دار وقتی از قضیهٔ فرما استفاده می‌کنیم، لازم می‌شود در آخر طرفین را تقسیم بر یک عددی تقسیم کنیم. در این مدل سؤال‌ها، مثل روش اول حل معادلهٔ همنهشتی عمل می‌کنیم.

برای درک بهتر به مثال زیر نگاه کنید:

مثال آموزشی: باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۵}$ بر ۱۹ چند است؟

پاسخ: خب اگر از قضیهٔ فرما استفاده کنیم، داریم:

$$۵^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} ۵^{۳۶} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

حالا اگر بتوانیم طرفین را بر ۵ تقسیم کنیم، پاسخ سؤال به دست می‌آید. اما مشکل این‌جاست که ۱ را نمی‌شود به ۵ تقسیم کرد، به همین خاطر یک عدد از $[۱]_{۱۹}$ پیدا می‌کنیم که مضرب ۵ باشد:

$$[۱]_{۱۹} = \{\dots, ۱, ۲۰, \dots\}$$

همان اول کار ۲۰ پیدا شد! داریم:

$$۵^{۳۶} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \overset{۱۹}{\equiv} ۲۰ \xrightarrow[(۵,۱۹)=۱]{\div ۵} ۵^{۳۵} \overset{۱۹}{\equiv} ۴$$

تست: باقی‌ماندهٔ $۲^{۸۱}$ بر ۴۳ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۲۳ ۴) ۲۷

پاسخ ۴: اگر از قضیهٔ فرما استفاده کنیم، داریم:

$$۲^{۴۲} \overset{۴۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲^{۸۴} \overset{۴۳}{\equiv} ۱$$

حالا اگر طرفین را تقسیم بر ۸ کنیم، پاسخ به دست می‌آید. برای این کار کلاس $[۱]_{۴۳}$ را می‌نویسیم:

$$[۱]_{۴۳} = \{\ldots, -۴۲, ۱, ۴۴, \ldots\}$$

$$۲^{۸۴} \overset{۴۳}{\equiv} ۴۴ \xrightarrow[(۴,۴۳)]{\div ۴} ۲^{۸۲} \overset{۴۳}{\equiv} ۱۱$$

حالا باید دوباره طرفین را به ۲ تقسیم کنیم، داریم:

$$[۱۱]_{۴۳} = \{\ldots, ۱۱, ۵۴, \ldots\} \Rightarrow ۲^{۸۲} \overset{۴۳}{\equiv} ۵۴ \xrightarrow[(۲,۴۳)=۱]{\div ۲} ۲^{۸۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۲۷$$

۵. روش تبدیل به ضرب دو عدد و استفاده از ک.م.م

در سؤال‌های پیداکردن باقی‌ماندهٔ n بر b گاهی عدد b عدد بزرگی است که نمی‌شود از راه‌های معمول به سؤال جواب داد. اما اگر b را بتوان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد کوچک‌تر نوشت (مثلاً $b = c \times d$) آن‌گاه می‌توانیم باقی‌ماندهٔ a^n را بر c و d به دست آورده و بعد ک.م.م بگیریم.

برای درک بهتر، مثال زیر را ببینید:

مثال آموزشی: باقی‌ماندهٔ $۵^{۲۱}$ بر ۸۸ چند است؟

پاسخ: خب همین‌طور که می‌بینید ۸۸ به نسبت عدد بزرگی است و پیداکردن یک توان مناسب ۵ که در تقسیم به آن همنهشتی ۱ یا -۱ یا حتی ۲ یا ... داشته باشد، سخت است و حتی برای پاسخگویی به این سؤال نمی‌توانیم از قضیهٔ فرما استفاده کنیم.

حالا سعی می‌کنیم این عدد را تجزیه کنیم و به صورت حاصل‌ضرب دو عدد بنویسیم:

$$۸۸ = ۸ \times ۱۱$$

حالا باقی‌ماندهٔ $۵^{۲۱}$ بر ۸ و ۱۱ را به دست آورده و ک.م.م می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۵^{۲} \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۱۰}} ۵^{۲۰} \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۲۱} \overset{۸}{\equiv} ۵ \\ \underbrace{۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱}_{\text{فرما}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵^{۲۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۲۱} \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \end{array}\right\} \xrightarrow[[۱۱,۸]=۸۸]{\text{قانون ک.م.م پیمانه‌ها}} ۵^{۲۱} \overset{۸۸}{\equiv} ۵$$

حالا سعی کنید قبل از این‌که به پاسخ تست زیر نگاه کنید اول خودتان با استفاده از این روش آن را حل کنید.

تست: باقی‌ماندهٔ $۲^{۲۴}$ بر ۱۵۳ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۵۲

پاسخ ۱: ۱۵۳ عدد بزرگی است و پیداکردن یک توان کوچک از ۲ که با آن همنهشتی ۱ یا -۱ داشته باشد، سخت است؛ بنابراین ۱۵۳ را تجزیه می‌کنیم:

$$۱۵۳ = ۳^{۲} \times ۱۷$$

حالا باقی‌ماندهٔ $۲^{۲۴}$ را بر ۹ و ۱۷ به دست می‌آوریم:

$$۲^{۳} \overset{۹}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۸}} ۲^{۲۴} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

سمت راست‌ها یکسان است، بنابراین ک.م.م می‌گیریم:

$$۲^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۶}} ۲^{۲۴} \overset{۱۷}{\equiv} ۱$$

(این تست مشابه دوتا از تست‌های کنکور ۹۹ است)

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{۲۴} \overset{۹}{\equiv} ۱ \\ ۲^{۲۴} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \end{array}\right. \Rightarrow ۲^{۲۴} \overset{[۹,۱۷]}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۴} \overset{۱۵۳}{\equiv} ۱$$

۶. دو عدد عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ دارند

در بیشتر سؤال‌های پیداکردن باقی‌ماندهٔ a^n بر b، دو عدد a^n و b نسبت به هم اول‌اند، اما گاهی این دو عدد عامل مشترک دارند.

برای پاسخ‌دادن به این سؤال‌ها:

۱ اول ب.م.م دو عدد را پیدا کنید.

۲ هر دو عدد را بر ب.م.م تقسیم کنید تا دو عدد جدید و در نتیجه یک سؤال جدید به وجود بیاید.

۳ در سؤال جدید باقی‌مانده را پیدا کنید.

۴ جواب نهایی را در ب.م.م ضرب کنید.

حالا با استفاده از همین روش، باقی‌ماندهٔ $۲^{۳۷}$ را بر ۱۲۰ به دست می‌آوریم:

- ب.م.م دو عدد برابر ۸ است:

$$(۲^{۳۷}, ۱۲۰) = (۲^{۳۷}, ۲^{۳} \times ۳ \times ۵) = ۲^{۳} = ۸$$

- اگر $۲^{۳۷}$ و ۱۲۰ را بر ۸ تقسیم کنیم، می‌شوند $۲^{۳۴}$ و ۱۵، پس سؤال جدید ما پیداکردن باقی‌ماندهٔ $۲^{۳۴}$ بر ۱۵ است.

- باقی‌ماندهٔ $۲^{۳۴}$ را بر ۱۵ پیدا می‌کنیم:

$$۲^{۴} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۸}} ۲^{۳۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^{۲}} ۲^{۳۴} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

- حالا این عدد ۴ را در ب.م.م دو عدد که ۸ است ضرب می‌کنیم، جواب نهایی برابر است با:

$$۴ \times ۸ = ۳۲$$

تست: باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۶}$ بر ۸۵ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

پاسخ ۴: دو عدد $۵^{۳۶}$ و ۸۵ عامل مشترک بزرگ‌تر از یک دارند، پس:

۱ ب.م.م دو عدد برابر است با: $(۸۵, ۵^{۳۶}) = (۵ \times ۱۷, ۵^{۳۶}) = ۵$

۲ دو عدد را بر ۵ تقسیم می‌کنیم. حالا باید باقی‌ماندهٔ $۵^{۳۵}$ را بر ۱۷ به دست آوریم.

۳ $۵^{۱۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱$ (فرما) $\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ $۵^{۳۲} \overset{۱۷}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\times ۵^{۳}}$ $۵^{۳۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۱۲۵ \overset{۱۷}{\equiv} ۶$

۴ حالا این باقی‌مانده یعنی ۶ را در ب.م.م دو عدد ضرب می‌کنیم. پاسخ نهایی برابر است با: $۵ \times ۶ = ۳۰$

کمی عمیق‌تر:

۷. استفاده از قضیهٔ اویلر

توجه کنید این روش نیز مانند قضیهٔ فرما خارج از کتاب است، اما دانستن آن خیلی خوب است و یک جاهایی خیلی به درد می‌خورد.

قبل از این‌که با قضیهٔ اویلر آشنا شوید، اول باید تابع اویلر یا $\varphi(n)$ را یاد بگیرید.

تابع اویلر: $\varphi(n)$ برابر است با تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به n اول باشد.

برای مثال $\varphi(۱۰) = ۴$ است، زیرا ۴ عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰ وجود دارد که نسبت به ۱۰ اول‌اند:

$(۱,۱۰)=۱$ ✓ $(۲,۱۰)=۲$ ✗ $(۳,۱۰)=۱$ ✓ $(۴,۱۰)=۲$ ✗ $(۵,۱۰)=۵$ ✗ $(۶,۱۰)=۲$ ✗ $(۷,۱۰)=۱$ ✓ $(۸,۱۰)=۲$ ✗ $(۹,۱۰)=۱$ ✓

اما راه ساده‌تری برای به دست آوردن $\varphi(n)$ وجود دارد:

روش سریع به دست آوردن $\varphi(n)$

(۱) ابتدا عدد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم: $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} p_۳^{\alpha_۳} \cdots p_k^{\alpha_k}$	برای مثال برای پیداکردن $\varphi(۳۶۰)$ عدد ۳۶۰ را تجزیه می‌کنیم: $۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵$
(۲) از همهٔ پایه‌ها یکی کم می‌کنیم و عددها را در هم ضرب می‌کنیم: $(p_۱ - ۱)(p_۲ - ۱)\ldots(p_k - ۱)$	$(۲-۱)(۳-۱)(۵-۱) = ۱ \times ۲ \times ۴$
(۳) حالا از همهٔ توان‌ها یکی کم می‌کنیم و پایه با توان‌های کم‌شده را در عدد مرحلهٔ قبل ضرب می‌کنیم: $\varphi(n) = \underbrace{(p_۱ - ۱)(p_۲ - ۱)\ldots(p_k - ۱)}_{\text{از پایه‌ها یکی کم کردیم}} \underbrace{p_۱^{\alpha_۱ - ۱} p_۲^{\alpha_۲ - ۱} \ldots p_k^{\alpha_k - ۱}}_{\text{از توان‌ها یکی کم کردیم}}$	$\varphi(۳۶۰) = \underbrace{۱ \times ۲ \times ۴}_{\text{عدد مرحله قبل}} \times \underbrace{۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۰}_{\text{از پایه‌ها یکی کم کردیم}} = ۹۶$

برای درک بهتر $\varphi(۱۰۰)$، $\varphi(۱۰۱)$ و $\varphi(۱۰۵)$ را پیدا می‌کنیم:

$\varphi(۱۰۰) = \varphi(۲^۲ \times ۵^۲) = \underbrace{۱ \times ۴}_{\text{از پایه‌ها یکی کم کردیم}} \times \underbrace{۲^۱ \times ۵^۱}_{\text{از توان‌ها یکی کم کردیم}} = ۴۰$

دقت کنید ۱۰۱ عددی اول است و بنابراین نسبت به همهٔ عددهای طبیعی قبل از خودش اول است، پس: $\varphi(۱۰۱) = ۱۰۰$

$\varphi(۱۰۵) = \varphi(۳ \times ۵ \times ۷) = \underbrace{۲ \times ۴ \times ۶}_{\text{از پایه‌ها یکی کم کردیم}} \times \underbrace{(۳^۰ \times ۵^۰ \times ۷^۰)}_{\text{از توان‌ها یکی کم کردیم}} = ۴۸$

(یعنی وقتی همهٔ عوامل اول توان ۱ دارند فقط کافی است از هر کدام از پایه‌ها یکی کم کنیم و عددها را در هم ضرب کنیم.)

حالا برسیم به قضیهٔ اویلر

قضیهٔ اویلر: اگر $(a, n) = ۱$ باشد، آن‌گاه: $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$

این قضیه کمک می‌کند که ما توان مناسب که همنهشت با ۱ باشد را پیدا کنیم.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم باقی‌مانده $۲^{۵۰}$ را بر ۱۰۵ به دست آوریم، یکی از روش‌ها خردکردن ۱۰۵ به دو عدد است، اما می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ اویلر نیز به این سؤال پاسخ دهیم:

با توجه به این‌که $(۲, ۱۰۵) = ۱$ است، داریم: $۲^{\varphi(۱۰۵)} \overset{۱۰۵}{\equiv} ۱$

$\varphi(۱۰۵)$ را کمی بالاتر به دست آوردیم، بنابراین: $۲^{۴۸} \overset{۱۰۵}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\times ۲^۲}$ $۲^{۵۰} \overset{۱۰۵}{\equiv} ۴$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۳^{۲۵}$ بر ۴۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۴۴

پاسخ۳: پاسخگویی به این سؤال از روش‌های معمول سخت است، اما با استفاده از قضیهٔ اویلر می‌توانیم به سادگی به آن پاسخ دهیم:

$$\varphi(۴۵)=\varphi(۳^۲\times۵)=\underbrace{(۳-۱)(۵-۱)}_{\text{از پایه‌ها یکی کم کردیم}}\times\underbrace{۳^۱\times۵^۰}_{\text{از توان‌ها یکی کم کردیم}}=۲۴$$

حالا با توجه به این‌که $(۲۳,۴۵)=۱$ است از قضیهٔ اویلر استفاده می‌کنیم:

$$۲۳^{\varphi(۴۵)}\overset{۴۵}{\equiv}۱\Rightarrow ۲۳^{۲۴}\overset{۴۵}{\equiv}۱\xrightarrow{\times ۲۳}۲۳^{۲۵}\overset{۴۵}{\equiv}۲۳$$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۸}$ بر ۴۲۰ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۴۹ ۴) ۱۶

پاسخ۳: $۷^{۱۸}$ و ۴۲۰ عامل مشترک دارند، بنابراین ابتدا ب.م.م آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$(۷^{۱۸},۴۲۰)=(۷^{۱۸},۲^۲\times۳\times۵\times۷)=۷$$

اگر عددها را به ۷ ساده کنیم، داریم: $\frac{۴۲۰}{۷}=۶۰$ ، $\frac{۷^{۱۸}}{۷}=۷^{۱۷}$

پس سؤال جدید می‌شود: «باقی‌ماندهٔ $۷^{۱۷}$ بر ۶۰ چند است؟»

حالا از قضیهٔ اویلر استفاده می‌کنیم؛ $\varphi(۶۰)$ می‌شود:

$$\varphi(۶۰)=\varphi(۲^۲\times۳\times۵)=\underbrace{۱\times۲\times۴}_{\text{از پایه‌ها یکی کم کردیم}}\times\underbrace{۲^۱\times۳^۰\times۵^۰}_{\text{از توان‌ها یکی کم کردیم}}=۱۶$$

حالا با توجه به این‌که $(۷,۶۰)=۱$ داریم:

$$۷^{\varphi(۶۰)}\overset{۶۰}{\equiv}۱\Rightarrow ۷^{۱۶}\overset{۶۰}{\equiv}۱\xrightarrow{\times ۷}۷^{۱۷}\overset{۶۰}{\equiv}۷$$

حالا برای به دست آوردن جواب نهایی کافی است این باقی‌مانده را در ب.م.م ضرب کنیم، داریم:

$$r=۷\times۷=۴۹$$

۸. وقتی متغیر داریم

یک فرم مهمی از سؤال‌های پیداکردن باقی‌مانده در عددهای توان‌دار وجود دارد که چندین بار هم از این فرم در کنکور سراسری سؤال آمده است. در این بخش می‌خواهیم با روش پاسخگویی به این مدل سؤال‌ها آشنا شویم. به مثال زیر نگاه کنید:

مثال آموزشی: به ازای چند عدد طبیعی $n<۱۰۰$ ، عدد ۲^n بر ۱۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱۲ دارد؟

پاسخ: اگر رابطه را به صورت همنهشتی بنویسیم، داریم:

$$۲^n\overset{۱۳}{\equiv}۱۲\overset{۱۳}{\equiv}-۱$$

برای پاسخگویی به این سؤال‌ها، پیش از هر کار باید کوچک‌ترین توان ۲ یا به عبارت دیگر کوچک‌ترین مقدار n که در تقسیم به ۱۳ همنهشت با ۱ یا -۱ می‌شود را پیدا کنیم. اولین توان ۲ که از ۱۳ بزرگ‌تر است، $۲^۴$ است، داریم:

$$۲^۴\overset{۱۳}{\equiv}۳$$

خب این ۱ یا -۱ نشد، پس طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times ۲}۲^۵\overset{۱۳}{\equiv}۶$$

باز هم نشد، دوباره ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times ۲}۲^۶\overset{۱۳}{\equiv}۱۲\overset{۱۳}{\equiv}-۱$$

خب حالا شد! با توجه به این‌که می‌خواهیم سمت راست همان -۱ باقی بماند، باید طرفین را به توان فرد برسانیم:

$$۲^۶\overset{۱۳}{\equiv}-۱\xrightarrow{\text{به توان }۲k+۱}(۲^۶)^{۲k+۱}\overset{۱۳}{\equiv}-۱\Rightarrow ۲^{۱۲k+۶}\overset{۱۳}{\equiv}-۱$$

پس n باید به صورت $۱۲k+۶$ باشد:

$$۰<۱۲k+۶<۱۰۰\Rightarrow -۶<۱۲k<۹۴\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<k<\frac{۹۴}{۱۲}=۷/\cdots\Rightarrow k=۰,۱,\ldots,۷$$

پس به ازای ۸ مقدار n، رابطه برقرار است.

تست: تعداد اعداد دورقمی a، به طوری که $۱۱^a\overset{۱۹}{\equiv}۱$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۷ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

پاسخ۴: این‌جا مجهول در توان قرار گرفته است. در این مدل سؤال‌ها باید بگردیم و اولین عددی که رابطه به ازای آن برقرار می‌شود را پیدا کنیم، بعد فرم کلی مجهول را به دست آوریم:

$$۱۱\overset{۱۹}{\equiv}-۸\xrightarrow{\text{به توان }۲}۱۱^۲\overset{۱۹}{\equiv}(-۸)^۲=۶۴\overset{۱۹}{\equiv}۷\xrightarrow{\times ۱۱}۱۱^۳\overset{۱۹}{\equiv}۷\times۱۱=۷۷\overset{۱۹}{\equiv}۱$$

حالا اگر دو طرف رابطه را به توان k برسانیم، $۱۱^{۳k}\overset{۱۹}{\equiv}۱$ می‌شود؛ بنابراین اگر $a=۳k$ باشد، رابطه برقرار می‌شود. حالا چند عدد دورقمی مضرب ۳ داریم؟

$[\frac{۹۹}{۳}]=۳۳$ تا مضرب ۳ داریم، ولی ۳، ۶ و ۹ قابل قبول نیستند (*پون گفته دورقمی*) پس ۳۰تا جواب دورقمی برای a به دست می‌آید:

$$[\frac{۹۹}{۳}]-[\frac{۹}{۳}]=۳۳-۳=۳۰$$

تست: به ازای چند عدد طبیعی n ″ ۱۰۰ عبارت $۱۰^n - ۵^n$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ ۱: اگر $۱۰^n - ۵^n$ بر ۴۳ بخش‌پذیر باشد، یعنی باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۴۳ برابر صفر است. داریم:

$$۱۰^n - ۵^n \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰^n \overset{۴۳}{\equiv} ۵^n \xrightarrow[(۵^n, ۴۳)=۱]{\div ۵^n} ۲^n \overset{۴۳}{\equiv} ۱$$

حالا باید کوچک‌ترین توان ۲ را پیدا کنیم که به ۴۳ همنهشتی ۱ دهد:

$$۲^۶ \overset{۴۳}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{\times ۲} ۲^۷ \overset{۴۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} -۱$$

حالا اگر بخواهیم سمت راست به عدد ۱ تبدیل شود، باید طرفین را به یک توان زوج برسانیم:

$$۲^۷ \overset{۴۳}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۲k} ۲^{۱۴k} \overset{۴۳}{\equiv} ۱$$

پس فرم کلی n باید به صورت $n = ۱۴k$ باشد. در این صورت:

$$۱۴k \le ۱۰۰ \Rightarrow k \le \frac{۱۰۰}{۱۴} = ۷/\cdots \Rightarrow k = ۱, ۲, \ldots, ۷$$

تست: اگر k عددی طبیعی و دورقمی باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۳۰k-۱}$ بر ۶۱ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۳ ۳) ۲۰ ۴) ۴۱

پاسخ ۴: کوچک‌ترین توان ۳ که در تقسیم به ۶۱ همنهشتی ۱ یا ۱− دهد را پیدا می‌کنیم:

$$۳^۴ \overset{۶۱}{\equiv} ۲۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۶۱}{\equiv} ۶۰ \overset{۶۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۶k} ۳^{۳۰k} \overset{۶۱}{\equiv} ۱$$

اما باقی‌ماندهٔ $۳^{۳۰k-۱}$ را بر ۶۱ می‌خواهیم، پس باید طرفین رابطه را بر ۳ تقسیم کنیم:

$$۳^{۳۰k} \overset{۶۱}{\equiv} ۱ \overset{۶۱}{\equiv} -۶۰ \xrightarrow[(۳, ۶۱)=۱]{\div ۳} ۳^{۳۰k-۱} \overset{۶۱}{\equiv} -۲۰ \overset{۶۱}{\equiv} ۴۱$$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۹^k بر ۹۱ برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

پاسخ ۳: می‌دانیم $۹^k = ۳^{۲k}$. بررسی می‌کنیم کدام‌یک از توان‌های ۳ در تقسیم به ۹۱ همنهشت با ۱ یا ۱− است:

$$۳^۴ \overset{۹۱}{\equiv} -۱۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۹۱}{\equiv} -۳۰ \overset{۹۱}{\equiv} ۶۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۶ \overset{۹۱}{\equiv} ۱۸۳ \overset{۹۱}{\equiv} ۱$$

خب ما در صورت سؤال $۳^{۲k}$ داریم، اما باید به $۳^۶$ برسیم؛ بنابراین k را باید سه حالت فرض کنیم:

- $k = ۳q \Rightarrow ۳^{۲k} = ۳^{۶q} : ۳^۶ \overset{۹۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به‌توان } q} ۳^{۶q} \overset{۹۱}{\equiv} ۱$
- $k = ۳q+۱ \Rightarrow ۳^{۲k} = ۳^{۶q+۲} : ۳^۶ \overset{۹۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به‌توان } q} ۳^{۶q} \overset{۹۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^{۶q+۲} \overset{۹۱}{\equiv} ۹$
- $k = ۳q+۲ \Rightarrow ۳^{۲k} = ۳^{۶q+۴} : ۳^۶ \overset{۹۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به‌توان } q} ۳^{۶q} \overset{۹۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۴} ۳^{۶q+۴} \overset{۹۱}{\equiv} ۸۱$

یک اتحاد مهم

بسط $(a+b)^n$ را در نظر بگیرید:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \cdots + nab^{n-۱} + b^n$$

حالا اگر $a^n + b^n$ را از طرفین کم کنیم داریم:

$$(a+b)^n - a^n - b^n = ab(na^{n-۲} + \binom{n}{۲}a^{n-۳}b + \cdots + nb^{n-۲})$$

سمت راست تساوی مضرب ab است، پس سمت چپ هم باید مضرب ab باشد؛ بنابراین:

$$(a+b)^n - a^n - b^n \overset{ab}{\equiv} ۰$$

و در نتیجه:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

تست: عدد $۷^{۳۷} - ۴^{۳۷} - ۱۱^{۳۷}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

پاسخ ۴: می‌دانیم $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$، بنابراین اگر $a = ۷$، $b = ۴$ و $n = ۳۷$ باشد، می‌توان نوشت:

$$(۷+۴)^{۳۷} \overset{۴\times ۷}{\equiv} ۷^{۳۷} + ۴^{۳۷} \Rightarrow ۱۱^{۳۷} - ۷^{۳۷} - ۴^{۳۷} \overset{۲۸}{\equiv} ۰$$

بنابراین این عدد همواره بر ۲۸ بخش‌پذیر است.

تست: باقی‌ماندهٔ $۲^{۷۵} - ۳^{۵۰} - ۶^{۲۵} + ۱۷^{۲۵}$ بر ۷۲ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ ۱: با توجه به این‌که $۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$، پس $۶^{۲۵}$ بر ۷۲ بخش‌پذیر است:

$$\frac{۶^{۲۵}}{۷۲} = \frac{۲^{۲۵} \times ۳^{۲۵}}{۲^۳ \times ۳^۲} = ۲^{۲۲} \times ۳^{۲۳}$$

حالا توان‌ها را یکسان می‌کنیم و از رابطهٔ $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۲۵$، $a = ۸$ و $b = ۹$ باشد، داریم:

$$(۸+۹)^{۲۵} \overset{۹\times ۸}{\equiv} ۸^{۲۵} + ۹^{۲۵} \Rightarrow ۱۷^{۲۵} - ۹^{۲۵} - ۸^{۲۵} \overset{۷۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۷^{۲۵} - (۳^۲)^{۲۵} - (۲^۳)^{۲۵} \overset{۷۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۷^{۲۵} - ۳^{۵۰} - ۲^{۷۵} \overset{۷۲}{\equiv} ۰$$

تقویم‌نگاری

فرض کنید که بدانیم یکی از روزهای سال، چندشنبه است. با همنهشتی می‌توانیم تعیین کنیم که هر تاریخ دیگری، چندشنبه می‌شود. دلیل آن خیلی ساده است؛ مثلاً فرض کنید ۳ فروردین، شنبه باشد. خب اگر ۷ روز برویم جلو، یعنی ۱۰ فروردین باز هم شنبه می‌شود یا ۱۷ فروردین هم شنبه است. حتماً فهمیدید که این اعداد به پیمانهٔ ۷، همنهشت هستند.

حواستون باشه چیزی که در سؤال‌های تقویم‌نگاری خیلی مهم است این است که وقتی دارید فاصلهٔ دو روز را به دست می‌آورید، خود روز اول را در نظر نگیرید.

برای مثال اگر ۱۳ اردیبهشت سالی دوشنبه باشد و بخواهیم ببینیم ۱۳ آبان چندشنبه است، اول باید فاصلهٔ بین دو روز را پیدا کنیم اما خود ۱۳ اردیبهشت را نباید در نظر بگیریم.

آبان	مهر	شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت
۱۳	۳۰ روز	۳۱ روز	۳۱ روز	۳۱ روز	۳۱ روز	۱۸ روز (از ۱۴ تا ۳۱)

$\Rightarrow$ فاصلهٔ اردیبهشت تا آبان $= ۱۸ + ۳۱ \times ۴ + ۳۰ + ۱۳ = ۱۸۵$ روز $\Rightarrow ۱۸۵ \overset{۷}{\equiv} ۳$

حالا با توجه به این‌که ۱۳ اردیبهشت دوشنبه است باید سه روز بعد از دوشنبه را پیدا کنیم که می‌شود پنج‌شنبه.

تست: اگر شانزدهم آذر سالی، سه‌شنبه باشد، چهاردهم اسفند همان سال چندشنبه است؟

۱) شنبه ۲) یکشنبه ۳) دوشنبه ۴) سه‌شنبه

پاسخ ۱: روز شروع یعنی سه‌شنبه را متناظر با عدد صفر گرفته تا جدول زیر به دست آید. حالا بررسی می‌کنیم که ۱۴ اسفند چند روز بعد از ۱۶ آذر است:

$(۳۰ - ۱۶) + ۳۰ + ۳۰ + ۱۴ = ۸۸ \Rightarrow ۸۸ \overset{۷}{\equiv} ۴$

(۳۰−۱۶) روزهای باقی‌مانده از آذر + ۳۰ دی + ۳۰ بهمن + ۱۴ اسفند

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یک‌شنبه	دوشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

حالا ۴ متناظر با کدام روز است؟ بله شنبه. پس اختلاف روزهای دو تاریخ را به دست می‌آوریم. بعد همنهشتی آن را به پیمانهٔ ۷ می‌گیریم و از روی جدول می‌فهمیم چندشنبه است. فقط یک نکته، اگر تاریخ جلوتر را داشتیم و خواستیم تاریخ عقب‌تر را به دست آوریم، باید تعداد روزهای اختلاف را منفی بگیریم *(باید بریم عقب)*.

تست: اگر ۱۷ مهر سالی شنبه باشد، اولین جمعهٔ تیرماه آن سال چندم تیر بوده است؟

۱) اول تیر ۲) دوم تیر ۳) سوم تیر ۴) چهارم تیر

پاسخ ۴: چون نمی‌دانیم اولین جمعه چندم تیرماه بوده است، اول پیدا می‌کنیم اول تیرماه چندشنبه بوده است.

$۴ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۱۷ + ۳۱ + ۳۱ + ۳۰ \Rightarrow$ ۱۷ مهر، ۳۱ شهریور، ۳۱ مرداد، ۳۰ تیر (از دوم تیر تا ۳۱ تیر سی روز است)

پس چهار روز بعد از اول تیرماه شنبه بوده است، یعنی اول تیر می‌شود سه‌شنبه و چون اولین جمعه را می‌خواهیم باید سه روز برویم جلو و در نتیجه اولین جمعهٔ تیرماه چهارم تیر است.

تست: اگر الان ساعت 17 : 50 باشد، ۳۹۱۴ دقیقه بعد ساعت چند است؟

۱) 10 : 50 ۲) 11 : 04 ۳) 22 : 50 ۴) 23 : 04

پاسخ ۲: فقط کافی است ۳۹۱۴ را بر ۶۰ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۹۱۴ & ۶۰ \\ -۳۹۰۰ & ۶۵ \\ \hline ۱۴ & \end{array}$$

می‌شود ۶۵ ساعت و ۱۴ دقیقه بعد. ۴۸ ساعت بعد که می‌شود دو روز بعد، ۱۲ ساعت بعد آن یعنی ۶۰ ساعت بعد می‌شود 5 : 50 و اگر ۵ ساعت دیگر به آن اضافه کنیم، می‌شود 10 : 50، اما ۱۴ دقیقه هم باید به 10 : 50 اضافه کنیم که می‌شود 11 : 04.

پیداکردن باقی‌مانده در اعداد خاص بدون انجام عمل تقسیم

عدد ۲۴۷ را در نظر بگیرید. این عدد از ۷تا یکی، ۴ دستهٔ ۱۰تایی و ۲ دستهٔ صدتایی تشکیل شده است.

در واقع هر عدد طبیعی را می‌توان با استفاده از توان‌های ده بسط داد.

$۲۴۷ = ۷ + ۴ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰^۲$

$۵۳ = ۳ + ۵ \times ۱۰$

$۴۲۹۵ = ۵ + ۹ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰^۲ + ۴ \times ۱۰^۳$

$\overline{xyz} = z + ۱۰y + ۱۰۰x$

$\overline{ab} = b + ۱۰a$

نکته: در حالت کلی، اگر یک عدد را به صورت $A=\overline{a_n\dots a_2a_1a_0}$ در نظر بگیریم، این عدد را به صورت زیر می‌توان بسط داد:

$$\overline{a_n\dots a_2a_1a_0}=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+\dots+10^na_n$$

تست: چند عدد طبیعی دورقمی وجود دارند که از حاصل‌ضرب ارقامشان ۲۶ واحد بیشتر باشند؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ ۴: عدد را به صورت $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$\overline{ab}=26+ab \Rightarrow 10a+b=26+ab \Rightarrow 10a-ab=26-b \Rightarrow a(10-b)=26-b \Rightarrow a=\frac{26-b}{10-b}$$

اگر بخواهیم a عددی طبیعی باشد باید مخرج کسر، صورت کسر را عاد کند:

$$\begin{cases}10-b\mid 26-b\\ 10-b\mid 10-b\end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 10-b\mid 16$$

می‌دانیم b رقم یکان یک عدد است. بنابراین $0\le b\le 9$ و در نتیجه $10-b$ عددی مثبت و کوچک‌تر مساوی ۱۰ است که ۱۶ را عاد می‌کند:

$$\begin{cases}10-b=1 \Rightarrow b=9 \Rightarrow a=\frac{26-9}{10-9}=17 & \text{(غ‌ق‌ق) چون a دهگان یک عدد است و نمی‌تواند ۱۷ باشد.}\\ 10-b=2 \Rightarrow b=8 \Rightarrow a=\frac{26-8}{10-8}=9 \Rightarrow \text{عدد}=98\\ 10-b=4 \Rightarrow b=6 \Rightarrow a=\frac{26-6}{10-6}=5 \Rightarrow \text{عدد}=56\\ 10-b=8 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=\frac{26-2}{10-2}=3 \Rightarrow \text{عدد}=32\end{cases}$$

بنابراین به ازای سه عدد طبیعیِ دورقمی این رابطه برقرار است.

تست: به ازای چند مقدار a، عدد چهاررقمی $\overline{8a5a}$ در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۶ دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

پاسخ ۳: عدد را باز می‌کنیم:

$$\overline{8a5a}\overset{7}{\equiv}6 \Rightarrow 8000+100a+50+a\overset{7}{\equiv}6$$

به جای هر عدد، هم‌نهشت آن را به ۷ می‌نویسیم:

$$8000=8\times10\times10\times10\overset{7}{\equiv}1\times3\times3\times3\overset{7}{\equiv}-1\ ,\ 100=10\times10\overset{7}{\equiv}3\times3\overset{7}{\equiv}2$$

$$-1+2a+1+a\overset{7}{\equiv}6 \Rightarrow 3a\overset{7}{\equiv}6$$

این معادلهٔ هم‌نهشتی را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow[(3,7)=1]{\div 3} a\overset{7}{\equiv}2 \Rightarrow a=7k+2$$

a، رقم است، پس عددی بین صفر تا ۹ است، یعنی:

$$\begin{cases}k=0 \Rightarrow a=2\\ k=1 \Rightarrow a=9\end{cases}$$

به ازای ۲ مقدار، رابطه برقرار است.

حالا که بازکردن یک عدد را در حالت‌های کلی یاد گرفتیم می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ یک عدد را بر برخی از اعداد خاص پیدا کنیم بدون این‌که دو عدد را بر هم تقسیم کنیم.

۱. باقی‌مانده بر ۲ یا ۵ یا ۱۰

به بازشدهٔ عدد $\overline{a_n\dots a_2a_1a_0}$ توجه کنید:

$$a_0+\underbrace{10a_1+100a_2+1000a_3+\dots+10^na_n}_{\text{بر ۲، ۵ و ۱۰ بخش‌پذیرند.}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، از جملهٔ دوم به بعد، همهٔ جمله‌ها بر ۲، ۵ و ۱۰ بخش‌پذیرند، بنابراین برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ یک عدد بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ کافی است، به جای کل عدد، باقی‌ماندهٔ یکان آن را بر عدد خواسته‌شده به دست آوریم:

$$\overline{a_n\dots a_2a_1a_0}\overset{\text{۲ یا ۵ یا ۱۰}}{\equiv}a_0$$

مثلاً داریم:

$$137\overset{10}{\equiv}7 \qquad 137\overset{5}{\equiv}7\overset{5}{\equiv}2 \qquad 137\overset{2}{\equiv}7\overset{2}{\equiv}1$$

یک نکته هم از این آخری می‌فهمیم:

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۰، همان رقم یکان است؛ پس اگر رقم یکان عددی را خواستیم به دست آوریم، کافی است از همنهشتی به پیمانهٔ ۱۰ استفاده کنیم.

۲. باقی‌مانده بر ۳ یا ۹

دوباره، بازشدهٔ عدد $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$ را در نظر بگیرید:

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 10^n a_n = a_0 + (a_1 + 9a_1) + (a_2 + 99a_2) + (a_3 + 999a_3) + \dots$$

جملاتی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است، بر ۳ و ۹ بخش‌پذیرند؛ بنابراین باقی‌ماندهٔ آن‌ها در تقسیم بر ۳ یا ۹، صفر است، پس باقی‌ماندهٔ کل عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ مجموع جمله‌های باقی‌مانده، یعنی:

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \overset{۳\text{ یا }۹}{\equiv} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

مثلاً باقی‌ماندهٔ عدد ۱۳۹۸ بر ۳ و ۹ برابر است با:

$$۱۳۹۸ \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۱+۳+۹}_{۲۱} + ۸ \overset{۳}{\equiv} ۰ \qquad ۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} \underbrace{۱+۳+۹}_{۲۱} + ۸ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

۳. باقی‌مانده بر ۱۱

باز هم عدد $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$ را به صورت زیر باز می‌کنیم:

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + \dots + 10^n a_n = a_0 + (11a_1 - a_1) + (99a_2 + a_2) + (1001a_3 - a_3) + \dots$$

عددهایی که زیر آن‌ها خط کشیده‌ایم، بر ۱۱ بخش‌پذیرند، بنابراین به جای آن‌ها در پیمانهٔ ۱۱، صفر قرار می‌دهیم.

یعنی:

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \overset{۱۱}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$$

پس برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ عددی بر ۱۱، از سمت راست، یک‌درمیان عددی را منفی و مثبت کرده و باقی‌مانده را بر ۱۱ به دست می‌آوریم. مثلاً:

$$\begin{cases} ۲۴۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} \underbrace{۵-۱+۴-۲}_{۶} \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \\ ۷۳۸۲۹ \overset{۱۱}{\equiv} \underbrace{۹-۲+۸-۳+۷}_{۱۹} \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \\ ۷۱۵۲ \overset{۱۱}{\equiv} \underbrace{۲-۵+۱-۷}_{-۹} \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \end{cases}$$

حالا به سه تست در این زمینه نگاه کنید و سعی کنید از این نکته‌ها استفاده کنید:

تست: چند عدد طبیعی سه‌رقمی با دهگان ۵ وجود دارد که در تقسیم بر ۱۱، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ۳: اول عدد را به صورت $\overline{a5b}$ در نظر می‌گیریم. حالا داریم:

$$\overline{a5b} \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow b-۵+a \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow b+a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow b+a = ۱۱k+۷ \quad (I)$$

از طرفی می‌دانیم $۱ \le a \le ۹$ (زیرا صدگان یک عدد سه‌رقمی است) و $۰ \le b \le ۹$ (زیرا یکان است)؛ پس:

$$۱ \le a+b \le ۱۸ \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$۱ \le ۱۱k+۷ \le ۱۸ \Rightarrow k = ۰, k = ۱$$

$k = ۰ \Rightarrow a+b = ۷$

a	b
۷	۰
۶	۱
۵	۲
۴	۳
۳	۴
۲	۵
۱	۶

$k = ۱ \Rightarrow a+b = ۱۸$

a	b
۹	۹

پس به ازای ۸ عدد مختلف، رابطه برقرار است.

تست: اگر عدد سه‌رقمی $\overline{a7b}$ در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده‌ای برابر ۵ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ کدام است؟

۱) همواره صفر ۲) صفر یا ۲ ۳) صفر یا ۹ ۴) ۲ یا ۹

پاسخ۳:

$$\overline{a7b} \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow a+b+۷ \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow a+b \overset{۹}{\equiv} -۲ \overset{۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow a+b = ۹k+۷ \quad (I)$$

دقت کنید که a و b رقم‌های صدگان و یکان یک عدد سه‌رقمی هستند؛ بنابراین $۱ \le a \le ۹$ و $۰ \le b \le ۹$ و در نتیجه:

$$۱ \le a+b \le ۱۸ \quad (II)$$

حالا دو رابطهٔ (I) و (II) را نگاه کنید، $a+b$ از طرفی باید بر ۹ باقی‌مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد و از طرف دیگر بین ۱ و ۱۸ باشد، بنابراین:

$k = ۰ \Rightarrow a+b = ۷$ $\qquad$ $k = ۱ \Rightarrow a+b = ۱۶$

حالا باقی‌ماندهٔ عدد را بر ۱۱ به دست می‌آوریم. با توجه به قانون بخش‌پذیری بر ۱۱ داریم:

$$\overline{a7b} \overset{۱۱}{\equiv} b-۷+a$$

در هر دو حالت این مجموع را پیدا می‌کنیم:

$a+b = ۷ \Rightarrow b+a-۷ = ۰$

$a+b = ۱۶ \Rightarrow b+a-۷ = ۹$

پس باقی‌ماندهٔ $\overline{a7b}$ بر ۱۱ برابر صفر یا ۹ است.

تست: اگر عدد پنج‌رقمی $\overline{5abb6}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد، رقم b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ۴: گفته بر ۹۹ بخش‌پذیر است، پس بر ۱۱ و ۹ بخش‌پذیر است. از قاعدهٔ بخش‌پذیری هر کدام می‌رویم:

$$\overline{5abb6} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 6-b+b-a+5 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 11-a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 11 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a=0$$

(۵رقم از صفر تا ۹ بود.)

اگر $a=0$ قرار دهیم: (bهم یه رقم از صفر تا نه تا بود.)

$$\overline{5abb6} \overset{9}{\equiv} 0 \xrightarrow{a=0} 5+2b+6 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \overset{9}{\equiv} -11 \overset{9}{\equiv} -2 \xrightarrow[(2,9)=1]{\div 2} b \overset{9}{\equiv} -1 \overset{9}{\equiv} 8 \Rightarrow b=8$$

حواستون باشه در این‌جا می‌خواهیم طرفین را بر ۲ تقسیم کنیم، اما ۱۱− بر ۲ بخش‌پذیر نبود، بنابراین عددی از همان کلاس همنهشتی پیدا کردیم که بر ۲ بخش‌پذیر باشد، به همین خاطر از ۲− استفاده کرده‌ایم.

۴. باقی‌مانده بر ۴، ۲۵ و ۹۹ و ۱۰۱

یک بار دیگر بازشدهٔ $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$ را در نظر بگیرید:

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + \underbrace{100a_2 + \dots + 10^n a_n}_{\text{به ۲۵ بخش‌پذیرن}}$$

همان‌طور که می‌بینید از $100a_2$ به بعد جملات بر ۲۵ بخش‌پذیرند؛ پس باقی‌ماندهٔ عدد بر ۲۵ همان $a_0 + 10a_1$ است که می‌توان آن را به صورت $\overline{a_1 a_0}$ نوشت.

۱ $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \overset{25}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$

برای مثال:

$$1391 \overset{25}{\equiv} 91 \overset{25}{\equiv} 16 \qquad 147 \overset{25}{\equiv} 47 \overset{25}{\equiv} 22$$

۲ $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \overset{4}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$

به همین صورت می‌فهمیم که:

اما عدد $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$ را می‌توانیم به صورت روبه‌رو باز کنیم:

$$\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_1 a_0} + 100\overline{a_2 a_3} + 100^2 \overline{a_4 a_5} + \dots$$

برای مثال:

$$35467 = 67 + 54 \times 100 + 3 \times 100^2$$

۳ $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \overset{99}{\equiv} \overline{a_1 a_0} + \overline{a_2 a_3} + \overline{a_4 a_5} + \dots$

حالا با توجه به آن‌که $100 \overset{99}{\equiv} 1$ و $-1 \overset{101}{\equiv} 100$ می‌توان نوشت:

۴ $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \overset{101}{\equiv} \overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_3} + \overline{a_4 a_5} - \overline{a_6 a_7} + \dots$

برای مثال:

$$28627 \overset{99}{\equiv} \underbrace{27+86+2}_{115} \overset{99}{\equiv} 16$$

$$28627 \overset{101}{\equiv} \underbrace{27-86+2}_{-57} \overset{101}{\equiv} 44$$

تست: اگر باقی‌ماندهٔ عدد پنج‌رقمی $\overline{b21a3}$ بر ۹۹ برابر ۱ باشد، a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۷۴ ۳) ۸۵ ۴) ۱۰۰

پاسخ۳: طبق نکته‌ای که گفته شد، داریم:

$$\overline{b21a3} \overset{99}{\equiv} 1 \Rightarrow \overline{a3} + 21 + b \overset{99}{\equiv} 1$$

چون جمع خاصیت جابه‌جایی دارد، می‌توانیم جای b و ۳ را عوض کنیم:

$$\overline{ab} + 21 + 3 \overset{99}{\equiv} 1 \Rightarrow \overline{ab} + 23 \overset{99}{\equiv} 0$$

جمع دو عدد دورقمی که یکی از آن‌ها ۲۳ است بر ۹۹ بخش‌پذیر است، که تنها حالت ممکن این است که:

$$\overline{ab} + 23 = 99 \Rightarrow \overline{ab} = 76 \Rightarrow a=7, b=6 \Rightarrow a^2+b^2 = 49+36 = 85$$

جمع‌بندی: دیدید که به کمک بسط اعداد می‌توانیم یک‌سری قانون برای پیداکردن باقی‌مانده بر اعدادی مثل ۳، ۹، ۱۱ و ... درست کنیم. به همین صورت می‌توانیم برای اعدادی مثل ۱۰۰۱، ۹۹۹، ۲۷ و ... هم قانون درست کنیم. در جدول زیر قانون محاسبهٔ بر اعداد خاصی را که باید بلد باشید یک‌جا برایتان آورده‌ایم:

اگر باقی‌مانده بر ... را بخواهیم	باید ...	مثلاً
۱۰ یا ۲ یا ۵	باقی‌ماندهٔ رقم یکان را پیدا کنیم.	$۵۲۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۷ \overset{۵}{\equiv} ۲$ ، $۵۲۲۷ \overset{۲}{\equiv} ۷ \overset{۲}{\equiv} ۱$ ، $۵۲۲۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۷$
۱۰۰ یا ۴ یا ۲۵	باقی‌ماندهٔ دو رقم سمت راست را پیدا کنیم.	$۱۷۵۳ \overset{۴}{\equiv} ۵۳ \overset{۴}{\equiv} ۱$ ، $۱۷۵۳ \overset{۲۵}{\equiv} ۵۳ \overset{۲۵}{\equiv} ۳$ ، $۱۷۵۳ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۵۳$
۱۱	از سمت راست ارقام را یکی‌در میان مثبت و منفی در نظر بگیریم.	$۱۱۱۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۷-۱+۱-۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۶$ (− + − +)
۱۰۱	از سمت راست دو رقم دو رقم جدا کنیم و یکی‌درمیان مثبت و منفی در نظر بگیریم.	$۱۱۲۳۰۵ \overset{۱۰۱}{\equiv} \underbrace{۵-۲۳}_{-۷}+۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۴$ (+ − + −)
۱۰۰۱ یا ۷	از سمت راست سه رقم سه رقم جدا کنیم و یکی‌درمیان مثبت و منفی در نظر بگیریم.	$۱۰۱۱۷ \overset{۱۰۰۱}{\equiv} ۱۱۷-۱۰ \overset{۱۰۰۱}{\equiv} ۱۰۷$ ، $۱۰۱۱۷ \overset{۷}{\equiv} \underbrace{۱۱۷-۱۰}_{۱۰۷} \overset{۷}{\equiv} ۲$ (− + − +)
۹ یا ۳	ارقام را با هم جمع کنیم.	$۱۲۳۴ \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۱+۲+۳+۴}_{۱۰} \overset{۳}{\equiv} ۱$ ، $۱۲۳۴ \overset{۹}{\equiv} ۱+۲+۳+۴ \overset{۹}{\equiv} ۱$
۹۹	دورقم دورقم از سمت راست جدا و با هم جمع کنیم.	$۲۲۳۳۵ \overset{۹۹}{\equiv} ۳۵+۲۳+۲ \overset{۹۹}{\equiv} ۶۰$ (+ + +)
۹۹۹ یا ۲۷	سه‌رقم سه‌رقم از سمت راست جدا و با هم جمع کنیم.	$۱۱۲۱۳ \overset{۹۹۹}{\equiv} ۲۱۳+۱۱ \overset{۹۹۹}{\equiv} ۲۲۴$ ، $۱۱۲۱۳ \overset{۲۷}{\equiv} \underbrace{۲۱۳+۱۱}_{۲۲۴} \overset{۲۷}{\equiv} ۸$ (+ +)

پیداکردن رقم یکان در عددهای توان‌دار

می‌دانیم رقم یکان عدد a یعنی باقی‌ماندهٔ عدد a به ۱۰. به‌جز استفاده از راه‌های مرسوم پیداکردن باقی‌مانده در اعداد توان‌دار که پیش از آن با آن‌ها آشنا شدیم یک نکته‌هایی هم وجود دارد که اگرچه در کتاب درسی نیست، اما در پاسخگویی به این نوع سؤال‌ها به ما کمک می‌کند.

۱ اگر عددی به صفر، ۱، ۵ یا ۶ ختم شود هر توانی از آن عدد هم به همان رقم ختم می‌شود:

(۱) $a \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \Rightarrow a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۰$

(۲) $a \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۱$

(۳) $a \overset{۱۰}{\equiv} ۵ \Rightarrow a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۵$

(۴) $a \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \Rightarrow a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۶$

۲ اگر رقم یکان عددی ۴ یا ۹ باشد، بسته به این‌که توان زوج یا فرد باشد رقم یکان دو حالت بیشتر ندارد.

(۵) $a \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow \begin{cases} a^{۲k} \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \\ a^{۲k+۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \end{cases}$

یعنی اگر رقم یکان عددی ۴ بود و به توان زوج رسید، رقم یکان آن ۶ می‌شود و اگر به توان فرد رسید، رقم یکان همان ۴ باقی می‌ماند.

(۶) $a \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \Rightarrow \begin{cases} a^{۲k} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \\ a^{۲k+۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \end{cases}$

یعنی اگر رقم یکان عددی ۹ بود و به توان زوج رسید، رقم یکان آن ۱ می‌شود و اگر به توان فرد رسید، رقم یکان آن همان ۹ باقی می‌ماند.

۳ می‌توان ثابت کرد رقم یکان توان پنجم هر عدد با رقم یکان خود عدد برابر است یعنی: $a \overset{۱۰}{\equiv} a^{۵}$

از این نکته می‌توان به نکتهٔ زیر رسید:

نکته: برای پیداکردن رقم یکان a^{n} کافی است باقی‌ماندهٔ a را به ۱۰ و باقی‌ماندهٔ n را به ۴ پیدا کرده و جایگزین کنیم.

حواستون باشه

- اگر n مضرب ۴ بود، به جای آن، خود عدد ۴ را قرار می‌دهیم!
- اگر $r=۱,۲,۳$: $a^{۴n+r} \overset{۱۰}{\equiv} a^{r}$
- اگر $r=۰$: $a^{۴n} \overset{۱۰}{\equiv} a^{۴}$

برای درک بهتر به دو سؤال زیر توجه کنید:

تست: رقم یکان $۲۵^{۲۶}+۲۴^{۲۵}+۲۳^{۲۴}+۲۲^{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ۴:

$۲۵^{۲۶} \overset{۱۰}{\equiv} ۵$	$۲۴^{۲۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۴$	$۲۳^{۲۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$	$۲۲^{۲۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۳}=۸$
چون رقم یکان ۵ است به هر توانی که برسد رقم یکان همان ۵ باقی می‌ماند.	چون ۴ به توان فرد رسیده رقم یکان همان ۴ باقی می‌ماند.	چون ۲۴ مضرب ۴ است به جای آن ۴ قرار داده‌ایم.	باقی‌ماندهٔ ۲۲ را بر ۱۰ و باقی‌ماندهٔ ۲۳ را بر ۴ به دست آوردیم و جایگزین کردیم.

طبق جدول می‌توانیم بنویسیم: $۲۲^{۲۳}+۲۳^{۲۴}+۲۴^{۲۵}+۲۵^{۲۶} \overset{۱۰}{\equiv} \underbrace{۸+۱+۴+۵}_{۱۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۸$

تست: رقم یکان عدد $(۱!+۲!+۳!+\cdots+۱۰!)^{(۲k+۱)^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ۲: عدد داده‌شده در صورت سؤال یک عدد توان‌دار است که پایه آن «$۱!+۲!+۳!+\cdots+۱۰!$» و توان آن $(۲k+۱)^{۲}$ است. طبق آن‌چه گفته شده باید باقی‌ماندهٔ پایه را به ۱۰ و توان را به ۴ پیدا کرده و جایگزین کنیم:

- $(۲k+۱)^{۲}=۴k^{۲}+۴k+۱ \overset{۴}{\equiv} ۱$
- $۱!+۲!+۳!+\cdots+۱۰! \overset{۱۰}{\equiv} \underbrace{۱+۲+۶+۲۴}_{۳۳}+\underbrace{۱۲۰+\cdots+۱۰!}_{\text{رقم یکان صفر}} \overset{۱۰}{\equiv} ۳$

بنابراین: $(۱!+۲!+۳!+\cdots+۱۰!)^{(۴k+۱)^{۲}} \overset{۱۰}{\equiv} ۳$

معادلهٔ سیالهٔ خطی

فرم کلی: $ax+by=c$

شرط جواب: $(a,b)\mid c$

روش‌های حل:

۱) تبدیل به معادلهٔ همنهشتی:

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax \overset{b}{\equiv} c \\ by \overset{a}{\equiv} c \end{cases}$$

یکی از معادله‌ها را حل کرده یک متغیر را پیدا می‌کنیم، سپس برای به دست آوردن متغیر دیگر، متغیر به‌دست‌آمده را در رابطهٔ $ax+by=c$ قرار می‌دهیم.

۲) حدس‌زدن و استفاده از فرمول

یک جواب اولیه برای معادله حدس می‌زنیم: $\begin{vmatrix} x_{۰} \\ y_{۰} \end{vmatrix}$ جواب اولیه

سپس جواب‌های معادله را با استفاده از رابطه‌های روبه‌رو می‌نویسیم:

$$x=x_{۰}+\frac{b}{d}k \quad ,d=(a,b)$$
$$y=y_{۰}-\frac{a}{d}k$$

مشاوره: روش ۲ حل معادلهٔ سیالهٔ خطی در کتاب درسی نیامده اما خیلی روش کارراه‌بنداز و به‌دردبخوری است.

مثلاً $5x+7y=57$ یک معادلهٔ سیالهٔ خطی است و ما دنبال مقادیری صحیح از x و y هستیم. آیا می‌توانید یکی از مقادیر را حدس بزنید؟ خیلی سخت نیست. اگر $x=10$ و $y=1$ باشد، رابطه برقرار است. اما به‌جز این پاسخ چی؟ از هر دو روش توضیح داده شده این معادله را حل می‌کنیم:

روش ۱ تبدیل به یک معادلهٔ همنهشتی: به دو صورت می‌توانیم $5x+7y=57$ را تبدیل به یک معادلهٔ همنهشتی کنیم. یکی به پیمانهٔ ۵، دیگری به پیمانهٔ ۷:

$$5x+7y=57 \Rightarrow \begin{cases} 5x \overset{7}{\equiv} 57 & (\text{چون } 7y \overset{7}{\equiv} 0 \text{ می‌شه}) \\ 7y \overset{5}{\equiv} 57 & (\text{چون } 5x \overset{5}{\equiv} 0 \text{ می‌شه}) \end{cases}$$

حالا یکی از معادله‌های همنهشتی را حل می‌کنیم *(معمولاً حل‌کردن معادله‌ای که پیمانه‌اش کوچک‌تره، ساده‌تره)*؛

$$7y \overset{5}{\equiv} 57 \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} 2y \overset{5}{\equiv} 2 \xrightarrow[(2,5)=1]{\div 2} y \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow y=5k+1$$

حالا مقدار y را در معادلهٔ اصلی می‌گذاریم و x را پیدا می‌کنیم و تمام!

$$5x+7y=57 \Rightarrow 5x+7(5k+1)=57 \Rightarrow 5x+35k+7=57 \Rightarrow 5x=50-35k \Rightarrow x=10-7k$$

بنابراین $\begin{vmatrix} x=10-7k \\ y=5k+1 \end{vmatrix}$ پاسخ این معادلهٔ سیاله است. کافی است به k، عددهای مختلف بدهیم تا مقادیر مختلف و صحیح x و y را پیدا کنیم. با این کار در حقیقت داریم، نقطه‌هایی با مختصات صحیح را روی خط $5x+7y=57$ پیدا می‌کنیم. مثلاً چند نقطه را پیدا کنیم، ببینیم:

$$k=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \end{vmatrix} \qquad k=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 \\ 11 \end{vmatrix} \qquad k=-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 17 \\ -4 \end{vmatrix} \qquad k=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 \\ 1 \end{vmatrix}$$

حواستون باشه وقتی یک معادلهٔ سیاله را با تبدیل به معادلهٔ همنهشتی حل می‌کنیم، نباید هر دو معادلهٔ همنهشتی را حل کنیم و x و y را جداگانه به دست آوریم *(یکی برحسب k پیدا می‌شه و اون یکی برحسب k' به دست میاد که k و k' با هم جور نیستند)*، بلکه باید یکی از معادله‌ها را حل کرد و با قراردادن متغیر پیداشده در معادلهٔ سیاله، متغیر دیگر را پیدا کرد.

روش ۲ حدس‌زدن: سعی می‌کنیم یک جواب اولیه برای معادلهٔ $5x+7y=57$ حدس بزنیم. برای مثال: $\begin{vmatrix} x_0=10 \\ y_0=1 \end{vmatrix}$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\begin{vmatrix} x=x_0+\frac{b}{d}k \\ y=y_0-\frac{a}{d}k \end{vmatrix}$ جواب‌های کلی معادله را پیدا می‌کنیم: $\begin{cases} x=10+7k \\ y=1-5k \end{cases}$

همان‌طور که می‌بینید اگر بتوانید یک حدس اولیهٔ درست بزنید، روش دوم خیلی سریع‌تر است.

تست: چند نقطه روی خط $3x+4y=35$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ آن، عددهایی طبیعی باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

پاسخ ۴: روش ۱ برای حل این معادلهٔ سیاله، آن را تبدیل به یک معادلهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۳ می‌کنیم: $3x+4y=35 \Rightarrow 4y \overset{3}{\equiv} 35 \Rightarrow y \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow y=3k+2$

برای پیداکردن x، مقدار y را در معادلهٔ سیاله قرار می‌دهیم: $3x+4(3k+2)=35 \Rightarrow 3x+12k+8=35 \Rightarrow 3x=27-12k \Rightarrow x=9-4k$

پس: $\begin{vmatrix} x=9-4k \\ y=3k+2 \end{vmatrix}$

اما اگر بخواهیم x و y هر دو طبیعی باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \Rightarrow 9-4k>0 \Rightarrow 4k<9 \Rightarrow k<\frac{9}{4} \\ y>0 \Rightarrow 3k+2>0 \Rightarrow 3k>-2 \Rightarrow k>-\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{3}<k<\frac{9}{4} \Rightarrow k=0,1,2$$

پس به ازای سه مقدار k، هر دو نقطهٔ x و y عددی طبیعی هستند *(با چندتا عددزدن به k هم می‌تونستی بفهمی همین ۳تا می‌شه)*.

هنوز با شک نگاه می‌کنید، با این‌که لازم نیست، ولی باشد، هر سهٔ این نقاط را پیدا می‌کنیم:

$$k=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x=9 \\ y=2 \end{vmatrix} \qquad k=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} x=5 \\ y=5 \end{vmatrix} \qquad k=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x=1 \\ y=8 \end{vmatrix}$$

روش ۲ سعی می‌کنیم یک جواب اولیه برای معادله حدس بزنیم. با کمی تلاش می‌توان فهمید $\begin{vmatrix} x_0=5 \\ y_0=5 \end{vmatrix}$ در معادله صدق می‌کند. با توجه به رابطهٔ $\begin{vmatrix} x=x_0+\frac{b}{d}k \\ y=y_0-\frac{a}{d}k \end{vmatrix}$ و $d=(a,b)$ جواب کلی معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} x=5+4k \\ y=5-3k \end{vmatrix}$$

از این‌جا به بعد مثل پاسخ قبلی است. چون جواب‌های طبیعی معادله را می‌خواهیم x و y هر دو باید بزرگ‌تر از صفر باشند.

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow 5+4k>0 \Rightarrow k>-\frac{5}{4} \\ y>0 \Rightarrow 5-3k>0 \Rightarrow k<\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{4}<k<\frac{5}{3} \Rightarrow k=-1,0,1$$

پس معادله سه جواب دارد.

تست: به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال، تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ۳: تعداد تمبرهای ۱۵۰ریالی را با x و تعداد تمبرهای ۲۵۰ریالی را با y نشان می‌دهیم. داریم:

$$۱۵۰x+۲۵۰y=۳۷۰۰ \xrightarrow{\text{به ۵۰ ساده می‌کنیم}} ۳x+۵y=۷۴$$

برای پیداکردن x و y، معادله را به یک معادلهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۳ تبدیل می‌کنیم:

$$۳x+۵y=۷۴ \Rightarrow \overset{۳}{۵y}\equiv \overset{۳}{۷۴} \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} \overset{۳}{۲y}\equiv \overset{۳}{۲} \xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۲} \overset{۳}{y}\equiv ۱ \Rightarrow y=۳k+۱$$

با قراردادن y در معادلهٔ $۳x+۵y=۷۴$ داریم: $۳x+۵(۳k+۱)=۷۴ \Rightarrow ۳x+۱۵k+۵=۷۴ \Rightarrow ۳x=۶۹-۱۵k \Rightarrow x=۲۳-۵k$

پس:

$$\begin{cases} x=۲۳-۵k \\ y=۳k+۱ \end{cases}$$

دقت کنید که تعداد تمبر نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow ۲۳-۵k\geq ۰ \Rightarrow k\leq ۴/۶ \\ y\geq ۰ \Rightarrow ۳k+۱\geq ۰ \Rightarrow k\geq -۰/۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k=۰,۱,۲,۳,۴$$

پس به ازای ۵ مقدار، معادله دارای جواب است.

تست: اگر $۹x+۱۳y=۱۸۰$ باشد، فرم کلی $x-y$ به کدام صورت است؟

۱) $۲۲k+۱$ ۲) $۲۲k-۱$ ۳) $۲۲k+۲$ ۴) $۲۲k-۲$

پاسخ۴: اگر بتوانیم یک جواب اولیه مثل $\begin{vmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{vmatrix}$ را حدس بزنیم که در رابطهٔ بالا صدق کند، می‌توانیم x و y را با توجه به فرمول داده‌شده برحسب k بنویسیم. با توجه به این‌که ۱۸۰ بر ۹ بخش‌پذیر است، می‌توانیم y را برابر صفر و x را برابر ۲۰ فرض کنیم:

جواب اولیه: $\begin{vmatrix} x_۰=۲۰ \\ y_۰=۰ \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} a=۹ \\ b=۱۳ \end{matrix}\Rightarrow d=(۹,۱۳)=۱$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x=۲۰+۱۳k \\ y=۰-۹k \end{vmatrix} \Rightarrow x-y=۲۲k+۲۰$$

(ای بابا توگزینه‌ها نیس، ولی عیب نداره یک بسته ۲۲تایی کم کن.)

عددهای ۲۰ و -۲ در تقسیم به ۲۲، در یک کلاس همنهشتی هستند، بنابراین $۲۲k+۲۰$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x-y=۲۲k+۲۲-۲=۲۲(\underbrace{k+۱}_{k'})-۲=۲۲k'-۲$$

معادلهٔ $۱۵x+۲۵y=۳۱۲$ را در نظر بگیرید. سمت چپ معادله مضرب ۵ است، در صورتی که سمت راست آن نه، بنابراین این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

گفتیم که شرط جواب‌داشتنِ معادلهٔ $ax+by=c$، آن است که ب.م.م ضرایب x و y، عدد c را عاد کند؛ یعنی: $(a,b)\mid c$

دقت کنید که برخی از سؤال‌های معادلهٔ سیاله با استفاده از همین شرط جواب حل می‌شوند:

تست: اگر معادلهٔ $۲۶x+۳۹y=۵m+۱$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد، فرم کلی m برحسب k کدام است؟

۱) $۱۳k+۴$ ۲) $۱۳k+۵$ ۳) $۱۳k+۶$ ۴) $۱۳k+۷$

پاسخ۲: شرط جواب معادلهٔ سیاله آن است که: $(۲۶,۳۹)\mid ۵m+۱ \Rightarrow ۱۳\mid ۵m+۱$

یعنی $۵m+۱$ باید بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد:

$$\overset{۱۳}{۵m+۱}\equiv ۰ \Rightarrow \overset{۱۳}{۵m}\equiv \overset{۱۳}{-۱}\equiv \overset{۱۳}{۱۲}\equiv \overset{۱۳}{۲۵} \xrightarrow[(۱۳,۵)=۱]{\div ۵} \overset{۱۳}{m}\equiv ۵ \Rightarrow m=۱۳k+۵$$