



مقدمه مؤلف

به کتاب پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسهٔ جامع خوش آمدید.

جلد دوم کتاب هندسهٔ جامع مربوط به درس‌نامه است. سعی کردیم تا جای ممکن این درس‌نامه‌ها را خودآموز و کاربردی بنویسیم. تمام روش‌ها و تکنیک‌های حل مسأله (تا جایی که از چارچوب کنکور و کتاب درسی خارج نباشد) را ارائه کردیم. مثال‌ها با دقت و وسواس زیادی چیده شده‌اند، حتماً آن‌ها را بخوانید. این درس‌نامه تمام مفاهیم کتاب‌های درسی هندسهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم را پوشش می‌دهد و با مطالعهٔ آن به راحتی می‌توانید تمام پرسش‌های جلد اول را پاسخ دهید.

فهرست

۵		فصل اول	ماتریس و کاربردها
۶		درس ۱:	ماتریس و اعمال ماتریس
۲۰		درس ۲:	وارون ماتریس و دترمینان
۳۶		فصل دوم	آشنایی با مقاطع مخروطی
۳۷		درس ۱:	مکان هندسی
۳۹		درس ۲:	دایره
۴۹		درس ۳:	بیضی
۵۹		درس ۴:	سهمی
۶۶		فصل سوم	بردارها
۶۹		درس ۱:	معرفی فضای R^3
۷۹		درس ۲:	ضرب داخلی دو بردار
۸۲		درس ۳:	ضرب خارجی دو بردار
۸۶		فصل چهارم	ترسیم‌های هندسی و استدلال
۹۵		فصل پنجم	قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردها
۱۰۸		فصل ششم	چندضلعی‌ها
۱۲۹		فصل هفتم	تجسم فضایی
۱۴۰		فصل هشتم	دایره
۱۵۳		فصل نهم	تبدیل‌های هندسی و کاربردها
۱۶۲		فصل دهم	روابط طولی در مثلث

فصل اول

ماتریس و کاربردها

به فصل ماتریس و کاربردها خوش آمدید.

مباحث مهم و پرسؤال اعمال روی ماتریس‌ها - دترمینان - وارون ماتریس

مباحث پیش‌نیاز کمی معادله خط و مهارت محاسبه با چهار عمل اصلی

فصل‌های مرتبط با کتاب درسی فصل ۱ کتاب درسی هندسه سال دوازدهم

حرف آخر این فصل کاملاً مستقل است و یک تست مستقیماً در کنکور دارد که با تمرین کافی می‌توان آن را پاسخ داد.

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس

به هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی که شامل تعدادی سطر و ستون است، ماتریس می‌گوییم. هر عدد حقیقی در این ماتریس یک درایه نام دارد. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B و C نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

مرتبه ماتریس

اگر ماتریس، m سطر و n ستون داشته باشد، به $m \times n$ مرتبه ماتریس گفته می‌شود.

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

مثلاً مرتبه ماتریس روبه‌رو که ۲ سطر و ۳ ستون دارد، 2×3 است و آن را به صورت 2×3 نمایش می‌دهیم.

درایه موجود در سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نمایش می‌دهیم. پس a_{12} یعنی عنصر روی سطر اول و ستون دوم و a_{23} یعنی عنصر روی سطر دوم و ستون سوم. مطالب بالا را در جدول زیر مرور می‌کنیم:

مرتبه	درایه	سطر و ستون
مرتبه ماتریس 3×2	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$	$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ستون اول سطر سوم

تست: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}_{3 \times m}$ اگر بدانیم $a_{22} = 3$ و جمع درایه‌های ستون دوم ۵ است، حاصل $b + m$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ ۲: ابتدا دقت کنید که مرتبه ماتریس، 3×2 است؛ پس $m = 2$. حالا منظور از a_{22} ؛ یعنی عدد روی سطر دوم و ستون دوم ماتریس که همان a است و باید برابر ۳ باشد؛ پس ماتریس به صورت روبه‌رو است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & b \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

حالا مجموع اعداد ستون دوم ماتریس را مساوی ۵ قرار می‌دهیم تا b را به دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -b+4 & a \\ b & 2 & 2c+7 \\ 3 & c-1 & 1 \end{bmatrix}$$

تست: در ماتریس روبه‌رو می‌دانیم $a_{12} = a_{21}$ و $a_{22} = a_{33}$. مقدار $b + c$ کدام است؟

-۴ (۲)

-۲ (۱)

-۸ (۴)

-۶ (۳)

پاسخ ۳: با توجه به ماتریس می‌دانیم $a_{12} = -b + 4$ ، $a_{21} = b$ ، $a_{22} = c - 1$ و $a_{33} = 2c + 7$ ؛ حالا داریم:

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} \Rightarrow b = -b + 4 \Rightarrow b = 2 \\ a_{22} = a_{33} \Rightarrow 2c + 7 = c - 1 \Rightarrow c = -8 \end{cases}$$

$$b + c = 2 + (-8) = -6$$

بنابراین:

تست: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} y & 2 & -1 \\ x & 3 & 2 \\ 14 & 0 & -x \end{bmatrix}$ ، مجموع ریشه‌های معادله $2a_{33} - a_{21}^2 + 2a_{23} = 0$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۳ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ ۴: با توجه به درایه‌های ماتریس داریم: $a_{33} = -x$ و $a_{21} = x$ و $a_{22} = 2$ پس معادله داده‌شده به صورت $-2x - x^2 + 4 = 0$ است. می‌دانیم در معادله درجه ۲ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است؛ پس:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{(-1)} = -2$$

درایه عمومی

یک روش دیگر تعریف ماتریس‌ها، نوشتن یک تابع برحسب i و j برای هر درایه است. مثلاً در یک ماتریس $a_{ij} = i + j^2$ تعریف می‌شود؛ یعنی اگر درایه a_{12} را بخواهیم باید در فرمول $i + j^2$ اعداد $i = 1$ و $j = 2$ را جای‌گذاری کنیم که $1 + 2^2 = 5$ به دست می‌آید؛ پس درایه سطر اول و ستون دوم برابر ۵ است. در همین مثال اگر مثلاً مرتبه ماتریس 3×4 باشد، ماتریس را به صورت $A = [i + j^2]_{3 \times 4}$ نمایش می‌دهیم.

تست: مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

پاسخ: چون ماتریس 2×2 است؛ پس ۴ درایه دارد و به صورت روبه‌رو است:

از فرمول $i^2 - j$ باید تمام درایه‌های $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ را به دست آوریم و ماتریس را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} a_{11} = 1^2 - 1 = 0 \\ a_{12} = 1^2 - 2 = -1 \\ a_{22} = 2^2 - 2 = 2 \\ a_{21} = 2^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های سطر اول ماتریس -۱ است.

تذکر: البته چون در این تست فقط مجموع درایه‌های سطر اول را می‌خواستیم می‌توانستیم فقط a_{11} و a_{12} را حساب کنیم.

تست: در ماتریس $A = [2ai + 3j]_{3 \times 3}$ اگر درایه واقع بر سطر اول و ستون دوم، صفر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

پاسخ: درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس همان a_{12} است که برای به دست آوردن آن در فرمول $2ai + 3j$ مقدار $i = 1$ و $j = 2$ جایگزین می‌کنیم و مطابق فرض مسئله، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$a_{12} = 0 \Rightarrow 2a(1) + 3(2) = 0 \Rightarrow a = -3$$

تست: ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $[i^2 + j]_{2 \times 2}$ (۲) $[2i - j]_{2 \times 2}$ (۳) $[i^2 + j]_{2 \times 2}$ (۴) $[2i - j]_{2 \times 2}$

پاسخ: دقت کنید که مرتبه ماتریس 2×3 است. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند. حالا در بین گزینه‌های ۳ و ۴ باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که فرمول کلی درایه‌های ماتریس باشد، مثلاً اگر a_{11} را بخواهیم پیدا کنیم در ۳، عدد ۲ می‌شود که غلط است ولی ۴، فرمول تمامی درایه‌هاست و پاسخ ۴ است.

تست: اگر $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ و $b_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i > j \\ ij & i = j \\ 2j - i & i < j \end{cases}$ مجموع درایه‌های ستون اول و سوم کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

پاسخ: ماتریس 3×3 هست و باید ۹ درایه آن با توجه به ضابطه‌های داده‌شده مشخص شود:

$$\begin{array}{lll} b_{11} = 1 \times 1 = 1 & b_{22} = 2 \times 2 = 4 & b_{33} = 3 \times 3 = 9 \\ b_{21} = 2(2) - 1 = 3 & b_{23} = 2(3) - 2 = 4 & b_{31} = 2(3) - 1 = 5 \\ b_{12} = 2(2) - 1 = 3 & b_{13} = 2(3) - 2 = 4 & b_{32} = 2(3) - 1 = 5 \end{array}$$

بنابراین درایه‌های ماتریس B به گونه مقابل است:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون اول ۹ و مجموع درایه‌های ستون سوم ۱۸ بوده و جواب برابر ۲۷ می‌شود.

ماتریس‌های خاص **ماتریس سطری:** ماتریسی که تنها یک سطر داشته باشد و مرتبه آن به صورت $1 \times n$ باشد، ماتریس سطری نام دارد. به طور مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

ماتریس سطری

ماتریس ستونی: ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد و مرتبه آن به صورت $n \times 1$ باشد، ماتریس ستونی نام دارد. به طور مثال:

$$\begin{bmatrix} \sin x \\ -1 \\ \cos x \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ماتریس ستونی

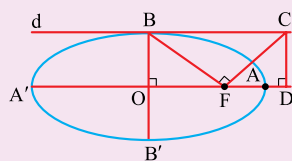
مثلاً اگر ماتریس ستونی A دارای $n + 4$ سطر و $n - 3$ ستون باشد؛ پس $n - 3 = 1$ است و $n = 4$ می‌شود، بنابراین ۸ سطر دارد.

تست: ماتریس سطری A از مرتبه $(k - 2) \times (k + 4)$ دارای چند درایه است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ: ماتریس سطری، فقط یک سطر دارد و مرتبه آن به صورت $1 \times n$ است؛ پس در این سؤال $k - 2$ باید مساوی ۱ باشد و در نتیجه $k = 3$ است؛ بنابراین مرتبه

ماتریس به صورت $A_{1 \times 7}$ است و در نتیجه این ماتریس ۷ درایه دارد.



تست: در شکل مقابل $AA' = 10$ و $BB' = 8$ است. نسبت $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟

(۲) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{5}{3}$

(۳) $\frac{3}{5}$

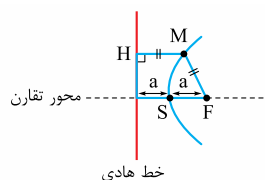
پاسخ: در گام اول a , b و c را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 8 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{1}{e} = \frac{5}{3}$$

و در گام نهایی ابتدا e را محاسبه و سپس از دستور $\frac{AD}{AF} = \frac{1}{e}$ استفاده می‌کنیم:

درس ۴: سهمی

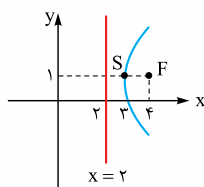


مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطهٔ غیرواقع بر آن خط به یک فاصله باشد.

$$MH = MF$$

مثلاً خط $x = 2$ و نقطهٔ $F(4, 1)$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل روبه‌رو تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ $F(4, 1)$ و خط $x = 2$ فاصلهٔ برابری دارند.

مثلاً نقطهٔ $S(3, 1)$ که روی سهمی است، فاصلهٔ برابری از F و خط $x = 2$ دارد.



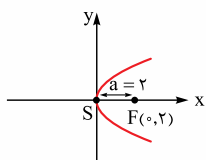
و به طور کلی‌تر در مورد سهمی باید بدانیم که:

به نقطهٔ ثابت F ، کانون سهمی می‌گوییم.	کانون
به نقطهٔ S که تلاقی محور تقارن و سهمی است، رأس سهمی می‌گوییم.	رأس
فاصلهٔ رأس از کانون و همین‌طور رأس از خط هادی برابر $ a $ است.	فاصلهٔ کانونی
فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر $ 2a $ است.	فاصلهٔ کانون از خط هادی
مطابق روش گفته‌شده در کتاب درسی برای رسم سهمی از گونیا، نخ و مداد استفاده می‌شود (که در کنگور کاری به کار آن نداریم).	رسم سهمی

معادلهٔ سهمی به رأس مبدأ اگر رأس یک سهمی مبدأ مختصات باشد و فاصلهٔ کانونی آن a باشد، معادلهٔ سهمی یکی از چهار حالت زیر است:

سهمی قائم	سهمی افقی
رو به بالا	رو به راست
$x^2 = 4ay$	$y^2 = 4ax$
رو به پایین	رو به چپ
$x^2 = -4ay$	$y^2 = -4ax$

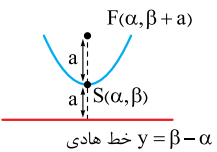
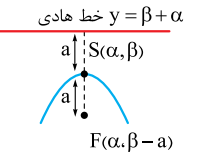
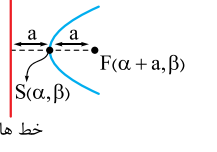
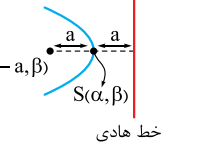
مثلاً معادلهٔ سهمی با رأس مبدأ مختصات و کانون $F(0, 2)$ کدام است؟



فاصلهٔ رأس تا کانون $a = 2$ است و سهمی افقی رو به راست داریم و در نتیجه: $y^2 = 4ax \xrightarrow{a=2} y^2 = 8x$

معادله استاندارد سهمی

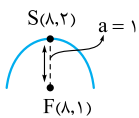
اگر رأس سهمی به جای مبدأ مختصات نقطه $S(\alpha, \beta)$ باشد، دیگر در معادله استاندارد، سهمی y نداریم و به جای آن $y - \beta$ می نویسیم و همین طور به جای x مقدار $x - \alpha$ می نویسیم. پس معادله سهمی ۴ حالت زیر را دارد:

سهمی قائم		سهمی افقی	
رو به بالا	رو به پایین	رو به راست	رو به چپ
$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$	$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta)$	$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$	$(y - \beta)^2 = -4a(x - \alpha)$
			
کانون و رأس هم طول هستند. (در مختصات آن ها برابر است.)		کانون و رأس هم عرض هستند. (در مختصات آن ها برابر است.)	

مثلاً در معادله سهمی افقی $(y - 1)^2 = 12(x - 3)$ مختصات رأس $S(3, 1)$ و همچنین داریم: $4a = 12 \Rightarrow a = 3$

تست: معادله سهمی با رأس $S(8, 2)$ و کانون $F(8, 1)$ محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

- (۱) -12 (۲) -14 (۳) -16 (۴) -18



پاسخ ۲: چون کانون و رأس هم طول هستند و عرض کانون کمتر است، پس یک سهمی قائم رو به پایین داریم:

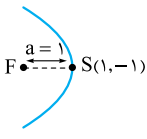
$$(x - 8)^2 = -4 \times 1 \times (y - 2) \Rightarrow (x - 8)^2 = -4(y - 2)$$

و حالا برای پیدا کردن محل برخورد با محور y ها مقدار $x = 0$ قرار می دهیم:

$$x = 0 \Rightarrow 64 = -4(y - 2) \xrightarrow{+4} y - 2 = -16 \Rightarrow y = -14$$

تست: مختصات کانون سهمی $(y + 1)^2 = -4(x - 1)$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, -1)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(1, 0)$



پاسخ ۲: در گام اول دقت کنید که یک سهمی افقی رو به سمت چپ با رأس $S(1, -1)$ و $4a = 4$ داریم.

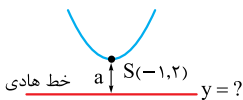
حالا یک شکل تقریبی (بدون محورهای مختصات) رسم می کنیم:

می دانیم در حالت افقی رأس و کانون هم عرض هستند و فاصله x های آن ها برابر $a = 1$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} y_F = y_S = -1 \\ x_F = x_S - a = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(0, -1)$$

تست: معادله خط هادی سهمی $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$ کدام است؟

- (۱) $y = 0$ (۲) $y = 1$ (۳) $y = 2$ (۴) $y = 3$



پاسخ ۱: در گام اول دقت کنید که یک سهمی قائم رو به بالا با $S(-1, 2)$ و $4a = 8$ داریم و شکل تقریبی آن را رسم می کنیم:

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

خط هادی به اندازه $a = 2$ از عرض نقطه رأس کمتر است و بنابراین داریم: خط هادی: $y = y_S - a = 2 - 2 = 0$

معادله گسترده سهمی

اگر در معادله استاندارد سهمی عبارت درجه دو را به توان برسانیم به یکی از حالت های زیر می رسیم:

$$\begin{cases} \text{سهمی افقی: } Ay^2 + By + Cx + D = 0 \\ \text{سهمی قائم: } Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \end{cases}$$

که برای استاندارد کردن آن و پیدا کردن رأس و پارامتر a از دو روش زیر می توانیم استفاده کنیم:

۱. استاندارد با روش مربع کامل ساختن در این روش متغیرهای مربوط به عبارت درجه دوم را یک طرف نگه می داریم و اگر عبارت x^2 یا y^2 ضریب داشت دو طرف را بر ضریب آن تقسیم می کنیم و سپس با اضافه کردن یک عدد، مربع کامل می سازیم.

تذکر: در بعضی حالت ها فرم گسترده سهمی به راحتی مربع کامل می شود، مثلاً وقتی $x^2 - 4x$ و یا $y^2 + 6y$ داریم ولی در اکثر اوقات از روش شماره ۲ استفاده می کنیم.

مثلاً سهمی $y^2 - 4y + 8x = 12$ را به صورت زیر استاندارد می کنیم:

$$y^2 - 4y + 8x = 12 \Rightarrow y^2 - 4y = -8x + 12 \xrightarrow{+4} (y - 2)^2 = -8x + 16 \Rightarrow (y - 2)^2 = -8(x - 2)$$

پس یک سهمی افقی با رأس $S(2, 2)$ و $4a = 8$ یعنی $a = 2$ داریم.

تست: مختصات کانون سهمی $2x^2 - 4x - 6y - 4 = 0$ کدام است؟

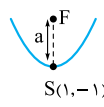
- (۱) $(1, -\frac{1}{4})$ (۲) $(1, \frac{1}{4})$ (۳) $(1, \frac{3}{4})$ (۴) $(1, 1)$

پاسخ ۱: در گام اول سمت چپ فقط عبارت‌های شامل x را نگه می‌داریم:
در گام دوم دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و مربع کامل می‌سازیم:

$$2x^2 - 4x - 6y - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 6y + 4$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x = 3y + 2 \xrightarrow{+1} (x-1)^2 = 3y + 3 = 3(y+1) \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} S(1, -1), 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

و یک سهمی قائم رو به بالا در نظر می‌گیریم و داریم:



$$\begin{cases} x_F = x_S = 1 \\ y_F = y_S + a = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow F(1, -\frac{1}{4}) \end{cases}$$

۲. استفاده از مشتق در این روش از عبارت درجه دوم مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا طول یا عرض رأس به دست آید و سپس با

جای‌گذاری در معادله سهمی مؤلفه دوم رأس هم حساب می‌شود و از طرفی در هر دو حالت $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ و $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ برای پارامتر a در سهمی داریم:

$$a = -\frac{C}{4A}$$

مثلاً در سهمی $y^2 - 4y + 8x = 4$ برای پیدا کردن رأس سهمی و پارامتر a داریم:

$$\begin{cases} |a| = \left| \frac{8}{-4 \times 1} \right| = 2 \\ y^2 - 4y + 8x = 4 \Rightarrow 8x = 4 - y^2 + 4y \Rightarrow 8x = 4 - (y-2)^2 + 4 \Rightarrow 8x = 8 - (y-2)^2 \Rightarrow (y-2)^2 = 8 - 8x \Rightarrow (y-2)^2 = -8(x-1) \Rightarrow S(1, 2) \end{cases}$$

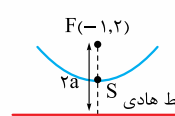
حالت‌های مختلف نوشتن معادله سهمی

۱. با کانون و رأس در گام اول وضعیت کانون (F) و رأس (S) را نسبت به هم مشخص می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا x آن‌ها یکی است یا y آن‌ها (هم‌طول و یا هم‌عرض هستند) و با توجه به آن یک شکل تقریبی از ۴ مدل سهمی افقی و عمودی رسم می‌کنیم و a را پیدا کرده و معادله سهمی را می‌نویسیم:

مثلاً برای نوشتن معادله سهمی با کانون $F(-1, 2)$ و $S(1, 2)$ ، با توجه به این‌که هم‌عرض هستند، پس سهمی افقی داریم و چون طول F کمتر است، یک سهمی رو به چپ داریم:
و برای پیدا کردن a داریم:
 $a = x_S - x_F = 1 - (-1) = 2$
و در نهایت معادله سهمی را می‌نویسیم:
 $(y-2)^2 = -4 \times 2 \times (x-1) \Rightarrow (y-2)^2 = -8(x-1)$

۲. با کانون و خط هادی در گام اول به معادله خط هادی نگاه می‌کنیم که اگر $x = \alpha$ باشد، یک سهمی افقی داریم و اگر $y = \beta$ باشد، یک سهمی قائم داریم و در گام دوم با توجه به موقعیت مختصات F با توجه به خط هادی نوع شکل را مشخص کرده و یکی از ۴ حالت را به طور تقریبی می‌کشیم و مختصات S هم که وسط خط هادی و کانون است، را پیدا می‌کنیم و معادله سهمی را می‌نویسیم:

مثلاً برای نوشتن معادله سهمی با کانون $F(-1, 2)$ و خط هادی $y = 0$ ، با توجه به خط هادی یک سهمی قائم داریم و چون عرض F بیشتر از عرض خط هادی است، یک سهمی قائم رو به بالا رسم می‌کنیم:
حالا مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$\begin{cases} x_S = x_F = -1 \\ y_S = \frac{y_{\text{هادی}} + y_F}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1 \\ 2a = \text{فاصله کانون تا خط هادی} = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$(x+1)^2 = 4 \times 1 \times (y-1)$$

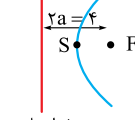
و در نتیجه داریم:

تست: سهمی به کانون $F(3, 2)$ و خط هادی به معادله $x = -1$ محور x ها را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A تا کانون سهمی کدام است؟

- (۱) $2/25$ (۲) $2/5$ (۳) $2/75$ (۴) 3

پاسخ ۲: سهمی افقی رو به راست رسم می‌کنیم:

فاصله کانون تا خط هادی $2a = 4$ است و در نتیجه داریم:



$$\begin{cases} y_S = y_F = 2 \\ x_S = x_F - a = 3 - 2 = 1 \Rightarrow S(1, 2) \end{cases}$$

در گام دوم معادله سهمی را می‌نویسیم و با قرار دادن $y = 0$ محل برخورد با محور x ها را پیدا می‌کنیم:

$$(y-2)^2 = 4 \times 2 \times (x-1) \xrightarrow{y=0} 4 = 8(x-1) \Rightarrow x-1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow A(\frac{3}{2}, 0)$$

$$AF = \sqrt{(\frac{3}{2} - 3)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2/5$$

و در گام نهایی فاصله نقطه A تا کانون سهمی را حساب می‌کنیم:

فصل هفتم

تجسم فضایی

به فصل تجسم فضایی خوش آمدید.

مباحث مهم و پرسؤال وضعیت نسبی نقطه، خط و صفحه، دوران شکل‌های هندسی

مباحث پیش‌نیاز حجم‌های هندسی

فصل‌های مرتبط با کتاب درسی فصل ۴ کتاب درسی هندسه سال دهم

حرف آخر به قول شاعر، تجسم کن اگر حتی تجسم کردنش سخته!

خط، نقطه، صفحه

مفاهیم نقطه، خط و صفحه از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً آن‌ها را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

دقت کنید که خط راست از دو طرف نامحدود است و صفحه هم از هر طرف ادامه دارد و ضخامتی ندارد. اصل‌های اساسی در فضا عبارت‌اند از:

۱ از دو نقطه متمایز در فضا، دقیقاً یک خط می‌گذرد.

۲ از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد.

۳ اگر دو نقطه متمایز از خطی در یک صفحه باشند، کل خط در آن صفحه است.

۴ اگر دو صفحه متمایز در یک نقطه مشترک باشند، آن‌گاه در یک خط مشترک‌اند که به آن فصل مشترک دو صفحه می‌گوییم.

۵ از یک نقطه خارج یک خط، تنها یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

وضعیت نسبی خط و صفحه یک خط و یک صفحه در فضا نسبت به هم سه وضعیت مختلف می‌توانند داشته باشند.

وضعیت	خط d موازی صفحه p	خط d متقاطع با صفحه p	خط d منطبق بر صفحه p
شکل			
بیان ریاضی	$d \cap p = \emptyset$	$d \cap p = \{A\}$	$d \in p$

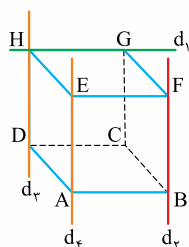
راه‌های مشخص‌شدن صفحه در فضا برای آن‌که یک صفحه به صورت یکتا و منحصر به فرد در فضا مشخص شود باید یکی از چهار حالت زیر را داشته باشیم:

سه نقطه غیرهم‌راستا	یک خط و یک نقطه خارج آن	دو خط متقاطع	دو خط موازی غیرمنطبق

وضعیت نسبی دو خط در فضا دو خط در فضا نسبت به هم یکی از ۴ وضعیت زیر را دارند:

دو خط موازی	دو خطی که در یک صفحه قرار دارند و نقطه مشترک ندارند.	
دو خط متقاطع	دو خطی که در یک نقطه مشترک باشند.	
دو خط متنافر	دو خطی که در هیچ صفحه‌ای قرار نمی‌گیرند.	
دو خط منطبق	دو خطی که بی‌شمار نقطه مشترک دارند.	

مثلاً در شکل روبه‌رو دو خط d_1 و d_2 متناظر هستند.



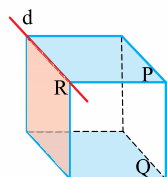
ولی خط‌های d_3 و d_4 موازی هستند.

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

دو صفحه در فضا نسبت به هم یکی از سه وضعیت زیر را دارند:

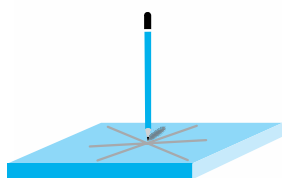
مقاطع	موازی	منطبق

مثلاً در شکل روبه‌رو صفحه P با صفحه Q موازی و همچنین صفحه P با صفحه R متقاطع است و خط d فصل مشترک صفحات P و R است.



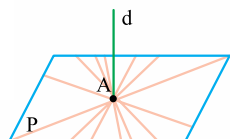
تعامد

نوک مداد خود را مطابق شکل روبه‌رو به صورت قائم بر صفحه کتاب نگه دارید، حالا مداد بر بقیه خط‌های موجود در صفحه عمود است.

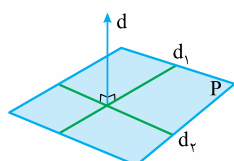


پس نتیجه می‌گیریم:

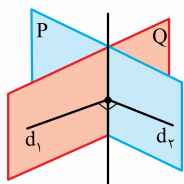
اگر خط d در نقطه A صفحه P را قطع کند و بر تمام خط‌های موجود در صفحه P عمود باشد، خط d بر صفحه P عمود است.



و در حالت خاص‌تر می‌توان نشان داد که اگر خطی بر دو خط متقاطع از یک صفحه در محل تقاطع آن‌ها عمود باشد، بر کل آن صفحه عمود است.



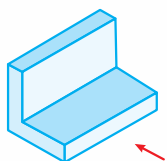
و همچنین می‌گوییم دو صفحه بر هم عمودند، هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود باشد.



رسم سه نما

هدف از این بخش رسم نماهای بالا، چپ و روبه‌رو از شکل‌های مختلف است که البته لحاظ کردن ارتفاع‌های متفاوت و رسم خطوط داخلی نماها لازم نیست و فقط باید با تجسم مناسب و تمرین خطوط لبه و دور هر نما را رسم کنید.

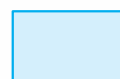
مثلاً در شکل روبه‌رو نماهای بالا، چپ و روبه‌رو به صورت زیر است:



نمای روبه‌رو



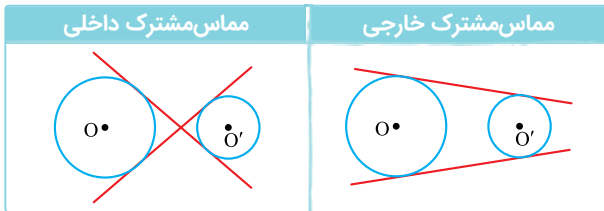
نمای چپ



نمای بالا

مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره یعنی خطی که بر هر دو دایره مماس باشد، که اگر هر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، به آن مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، به آن مماس مشترک داخلی می‌گوییم.



تذکره: دو دایره با توجه به قرارگیری آن‌ها نسبت به هم می‌توانند ۲ مماس مشترک داخلی یا خارجی داشته باشند و یا حتی مماس مشترک داخلی و خارجی نداشته باشند که در وضعیت دو دایره نسبت به هم تعداد آن‌ها را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم.

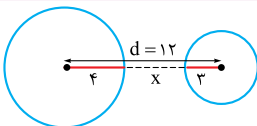
وضعیت دو دایره برای دو دایره در حالت کلی با توجه به اندازه شعاع‌ها و فاصلهٔ مرکزهای دو دایره از یکدیگر ۶ وضعیت مختلف به وجود می‌آید که در جدول زیر حالت‌بندی کرده‌ایم. منظور از d در جدول همان فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره یا طول خط‌المركزین است ($OO' = d$).

وضعیت نسبی	شکل	شرط	تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی
متخارج		$d > R + R'$	۲	۰
*مماس خارج		$d = R + R'$	۲	۱
مقاطع		$ R - R' < d < R + R'$	۲	۰
*مماس داخل		$d = R - R' $	۱	۱
متداخل		$0 < d < R - R' $	۰	۰
هم‌مرکز		$d = 0$	۰	۰

تست: دو دایره $C(O, 4)$ و $C'(O', 3)$ مفروض‌اند. اگر فاصلهٔ مرکزهای دو دایره ۱۲ باشد، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره کدام است؟

۳ / ۵ (۱) ۴ (۲) ۴ / ۵ (۳) ۵ (۴)

پاسخ ۴: با توجه به مقادیر $R = 4$ و $R' = 3$ داریم: $d > R + R'$ ؛ پس دو دایره متخارج رسم می‌کنیم:



$$x = 12 - (3 + 4) = 12 - 7 = 5$$

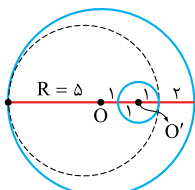
و در نتیجه نزدیک‌ترین فاصله برابر است با:

تست: دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 1)$ مفروض‌اند و فاصلهٔ مرکزهای دو دایره ۲ است. قطر بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو دایره کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

پاسخ ۳: با توجه به رابطه $2 < 5 - 1$ یا همان $d < |R - R'|$ ، مطابق شکل دو دایره متداخل داریم:

و قطر بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر هر دو مماس است برابر $R + d + R'$ یا همان $5 + 2 + 1 = 8$ است.



اندازه مماس مشترک و زاویه بین آنها

در حالت‌هایی که دو دایره مماس مشترک داخلی یا خارجی دارند، طول مماس مشترک و زاویه بین آنها برحسب d ، R و R' به صورت زیر به دست می‌آید:

۱ مماس مشترک خارجی: خط‌المركزین، نیمساز زاویه بین دو مماس است.

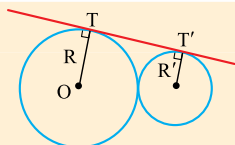
اندازه TT' همان طول مماس مشترک خارجی است.	$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{ R - R' }{d}$	
	$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$	

۲ مماس مشترک داخلی: خط‌المركزین نیمساز زاویه بین دو مماس است.

اندازه TT' همان طول مماس مشترک داخلی است.	$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R + R'}{d}$	
	$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$	

نکته: در حالتی که دو دایره مماس خارج باشند، اندازه مماس مشترک خارجی آنها برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$



تست: اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۱۴ برابر ۱۵ است. فاصله مرکزهای این دو دایره کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ ۳: با توجه به فرمول $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$ داریم:

$$15 = \sqrt{d^2 - (14 - 6)^2} = \sqrt{d^2 - 8^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 15^2 = d^2 - 8^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 64 = 289 \Rightarrow d = 17$$

تست: دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های ۴ و ۹ بر هم مماس خارج هستند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی دو دایره در نقطه M مماس است. فاصله M از نقطه تماس دو دایره با مماس مشترک خارجی‌شان کدام است؟

۷/۵ (۴)

۷ (۳)

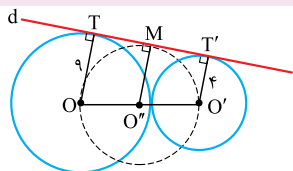
۶/۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ ۱: با توجه به شکل می‌دانیم که TM نصف TT' است و چون دو دایره مماس خارج هستند TT' از دستور $2\sqrt{RR'}$

$$TM = \frac{1}{2} TT' = \frac{1}{2} (2\sqrt{RR'}) = \sqrt{RR'} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$$

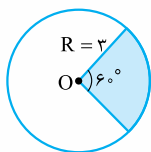
به دست می‌آید، بنابراین داریم:



ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاع دایره برحسب رادیان α باشد، داریم:

طول کمان	مساحت قطاع	مساحت قطعه
$L = R\alpha$	$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$	$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$

مثلاً مساحت قطاع دایره روبه‌رو برابر است با:



$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha = \frac{1}{2} (3^2) \times \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \pi$$

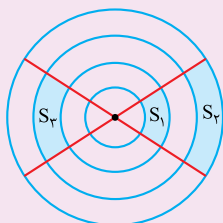
تست: دایره‌ای به شعاع‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ رسم کرده‌ایم. حاصل $\frac{S_1 + S_2}{S_3}$ کدام است؟

۱ (۱)

۱/۵ (۲)

۲ (۳)

۲/۵ (۴)

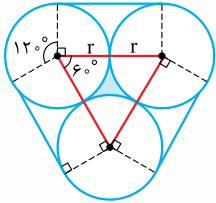


پاسخ ۳: فرض کنیم زاویه α رادیان باشد، داریم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{\alpha}{2} (r^2 - 1^2) = \frac{r^2 \alpha}{2} \\ S_2 = \frac{\alpha}{2} (r^2 - 3^2) = \frac{r^2 \alpha}{2} \\ S_3 = \frac{\alpha}{2} (r^2 - 5^2) = \frac{r^2 \alpha}{2} \end{cases}$$

$$\frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{\frac{1}{2} \alpha}{\frac{5}{2} \alpha} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

و در نتیجه:



یک تمرین مهم کتاب درسی در شکل مقابل سه دایره به شعاع‌های برابر r دایره‌دو بر هم مماس هستند و به وسیله نخ‌ی به هم بسته شده‌اند. می‌خواهیم طول نخ و مساحت رنگی را برحسب r حساب کنیم:

۱ طول نخ:

برای محاسبه طول نخ در نظر می‌گیریم که ۳ تا مستطیل داریم که طول هر مستطیل $2r$ است و از طرفی چون زاویه‌های 120° داریم $(\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3})$ ؛ پس هر قسمت نخ که روی دایره‌هاست برابر $\frac{1}{3}$ محیط دایره و در کل برابر یک محیط دایره است، پس طول کل نخ برابر است با:

۲ مساحت رنگی:



$$S_1 = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi r^2}{6}$$

برای محاسبه مساحت رنگی باید از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع، سه‌تا قطاع زیر را کم کنیم:

$$\text{مساحت رنگی} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - 3 \times \left(\frac{\pi r^2}{6} \right) = \sqrt{3} r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

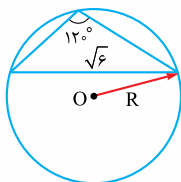
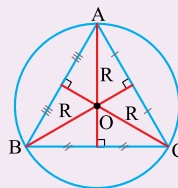
و در نتیجه داریم:

دایره محیطی مثلث

دایره‌ای که از سه رأس مثلث می‌گذرد و مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است. مرکز آن اگر مثلث حادالزاویه باشد، داخل مثلث و اگر قائم‌الزاویه باشد، وسط وتر و اگر مثلث منفرجه باشد، خارج مثلث قرار دارد و طول شعاع از دو روش زیر قابل محاسبه است:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}} = \frac{b}{2 \sin \hat{B}} = \frac{c}{2 \sin \hat{C}}$$



$$R = \frac{\sqrt{6}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

مثلاً در مثلث روبه‌رو، شعاع دایره محیطی برابر است با:

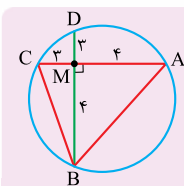
تست: در شکل مقابل دو وتر عمود بر هم به طول مساوی ۷ رسم شده‌اند. شعاع دایره کدام است؟

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{\sqrt{2}} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \quad (۳)$$



$$R = \frac{BC}{2 \sin \hat{A}} = \frac{5}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

پاسخ ۲: در گام اول در مثلث BMC طول BC را با فیثاغورس ۵ به دست می‌آوریم. حالا با توجه به این‌که مثلث MAB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، زاویه $\hat{A} = 45^\circ$ است. در مثلث ABC شعاع دایره محیطی را حساب می‌کنیم.

دایره محاطی داخلی مثلث

دایره‌ای به مرکز محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث بر سه ضلع مثلث مطابق شکل روبه‌رو مماس است و طول قطعه‌هایی که روی ضلع‌های مثلث ایجاد می‌کند $p-a$ ، $p-b$ و $p-c$ است و طول شعاع آن برابر است با:

$$r = \frac{S}{P} \rightarrow \text{نصف محیط}$$

