

۱- آخرین مرحله آمادگی برای کنکور، مرور آموخته‌ها و رفع اشکالات است که بهتر است در قالب پاسخ‌گویی به آزمون‌های مشابه کنکور انجام شود. کتاب حاضر هم برای همین مرحله تألیف شده است.

۲- تست‌های این کتاب، در سه گروه طبقه‌بندی می‌شوند:

(۱) مشابه سؤالات کتاب درسی

(۲) مشابه کنکورهای گذشته

(۳) سؤالات تألیفی

در نتیجه، این کتاب فقط مناسب دانش‌آموزانی است که سؤالات کتاب درسی و کنکورهای گذشته را آموخته و علاوه بر آن‌ها، مسائل تألیفی هم حل کرده باشند.

۳- آزمون‌های این کتاب، در سه گروه طبقه‌بندی می‌شوند:

(۱) آزمون‌های مبحثی داخل فصل‌ها

(۲) آزمون‌های جامع پایان فصل‌ها

(۳) آزمون‌های جامع پایان کتاب

پیشنهاد می‌کنیم شما هم به همین ترتیب آزمون‌های را پاسخ دهید.

۴- یکی از دلایل سختی کنکورهای گذشته، مدت‌زمان کم برای حل سؤالات بوده است. پس با هدف ارزیابی دقیق‌تر نقاط ضعف و قوت خود، بهتر است برای این آزمون‌های هم مدت‌زمانی همانند کنکور در نظر بگیرید.

۵- هر چند این کتاب، «کتاب آزمون‌های» است، سعی کرده‌ایم پاسخ‌نامه‌ها دقیق و کامل باشند که تا جای ممکن نیاز به منابع دیگر نباشد.

علاوه بر این، کنار پاسخ هر سؤال، میزان دشواری آن را با آیکن‌هایی نمایش داده‌ایم. توجه داشته باشید که میزان دشواری یک سؤال، به عوامل مختلفی چون پیچیدگی، حجم محاسبات لازم، نیاز به رسم شکل، نیاز به رسم خطوط اضافی و ... دارد.

قدرت باور و ایمان

اگه تو دوران کودکی یکی بهمون می‌گفت می‌خوای چی کاره شی، چی می‌گفتیم؟

یکی می‌گفت خلبان، یکی پزشک، یکی مهندس، یکی دیگه نونوا و ... (خود من، کشتی‌ساز 😊)

اما تمام تفکرات و علاقه‌ها برگرفته از محیط اطراف ما و گفته‌های بزرگ‌ترها بود. وقتی بزرگ‌تر شدیم و پا به عرصهٔ مدرسه و دبیرستان و انتخاب رشته گذاشتیم، فهمیدیم که تموم اون‌ها یه داستان بوده و اگه بخوایم واقعی به اون آرزوها برسیم خیلی خیلی باید تلاش کنیم و قوی باشیم. البته شاید خیلی‌ها هم به همون خواسته‌های کودکی‌شون رسیده باشن که اصلاً غیرممکن نیست.

اما چیزی که خیلی مهمه، باورها، عقیده‌ها و تلاش‌های ما هست که مسیر زندگی‌مونو می‌سازه و ما رو به هدفمون نزدیک می‌کنه. این‌که ما توی آینده چه چیزی رو برای خودمون متصور می‌شیم و خودمون رو توی چه جایگاهی می‌بینیم؟ چه قدر برای هدف‌هامون تلاش می‌کنیم و چه قدر بی‌خوابی می‌کشیم؟

اما بدونید که اگه با باور صددرصدی قلبی و با تمام انرژی و تلاش برای خواسته‌هامون تلاش کنیم، بی‌شک به تمام خواسته‌هامون می‌رسیم، چراکه خدای این دنیا و تمام کائنات خودشونو موظف و مکلف به این می‌دونن که تو رو به خواسته‌هات و آرزوهات برسونن. اما چی مهمه؟

مهم‌ترین چیز، تلاش تو، ایمان تو، باور قلبی تو به خدا و موجودیت خودته. پس حتماً خودتو توی اون جایگاه و نقطه‌ای که آرزوته و داری براش تلاش می‌کنی ببین که بی‌شک، قطعاً، حتماً، مطمئناً!! 😊 بهش خواهی رسید.

ممنون از مؤلفان عزیز و خلاق کتاب که تألیف این کتاب دشوار را به بهترین شکل به سرانجام رساندند. یک تشکر ویژه هم از یگانه فلاحی که دلسوزانه کارهای کتاب را جلو برد و در نهایت سپاس از تمام دوستان خیلی سبزی!

«انسان‌ها برای بودن هستند، نه برای ماندن.»

فهرست

• صفحه •

- آزمون‌های فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۷
- آزمون‌های فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۱۱
- آزمون‌های فصل ۳: چندضلعی‌ها ۲۲
- آزمون‌های فصل ۴: تجسم فضایی ۲۹
- آزمون‌های فصل ۵: دایره ۳۵
- آزمون‌های فصل ۶: تبدیل‌های هندسی و کاربردها ۴۸
- آزمون‌های فصل ۷: روابط طولی در مثلث ۵۴
- آزمون‌های فصل ۸: مجموعه‌ها ۶۲
- آزمون‌های شبیه‌ساز ۱۴۰۳ ۷۶
- ✓ پاسخنامه تشریحی ۷۹



نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درس سوم: تشابه مثلث‌ها (۳)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۱۰

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

۹۱ در مثلث ABC که $BC = 2AB$ ، نقطه M را روی BC طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$. نسبت $\frac{AM}{AC}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹۲ در مثلث ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ ، $AB = \sqrt{2}$ و $AB < AC$ ، عمود منصف BC، امتداد AB را در D قطع می‌کند. اگر فاصله D تا نزدیک‌ترین رأس مثلث $2\sqrt{2}$ واحد باشد، طول AC کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $\sqrt{11}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۹۳ نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و BC از مستطیل ABCD چنان قرار دارند که $MB = 3MA$ ، $2NB = 3NC$ و $\hat{DMN} = 90^\circ$. اگر $AB > BC$ ، نسبت طول به عرض این مستطیل، کدام است؟

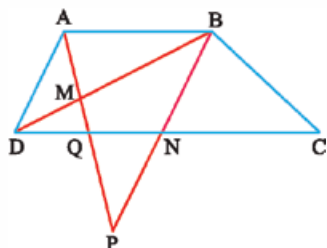
- (۱) $6/\sqrt{5}$ (۲) $8/\sqrt{5}$ (۳) $5/\sqrt{6}$ (۴) $7/\sqrt{6}$

۹۴ مثلثی به ارتفاع‌های ۶، ۸ و ۶ واحد، با مثلثی با کدام طول اضلاع متشابه است؟

- (۱) ۹، ۶، ۸ (۲) ۸، ۶، ۸ (۳) ۸، ۸، ۱۲ (۴) ۹، ۹، ۱۲

۹۵ در دوزنقه ABCD، نقطه Q وسط DN است. اگر $AM = 7$ و $MQ = 3$ ، طول PQ کدام است؟

- (۱) $7/5$ (۲) $7/8$ (۳) ۸ (۴) $8/5$



۹۶ اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به اندازه‌های یکسان BD و CE امتداد داده و محل برخورد امتدادهای BC و DE را F می‌نامیم. اگر $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$ ، نسبت $\frac{FD}{DE}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{8}{5}$

۹۷ در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 2\hat{B}$ ، $BC = 4\sqrt{3}$ و $AC = 6$ ، طول AB کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2/4$ (۳) ۲ (۴) $1/8$

۹۸ در مستطیل به عرض ۳ واحد، از دو رأس متقابل، عمودهایی بر قطر دیگر رسم شده است. اگر فاصله این دو عمود از یکدیگر $\sqrt{3}$ واحد باشد، طول مستطیل چند واحد است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۹۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ و $\sqrt{3}AB = \sqrt{2}AC$ ، مساحت مثلثی که با میانه و ارتفاع وارد بر وتر ساخته می‌شود، چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۱۰۰ فاصله یک نقطه درون یک مستطیل از سه رأس متوالی آن، به ترتیب ۷، ۹ و ۹ واحد است. فاصله این نقطه از رأس چهارم، چند واحد است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳





۱۶۳ طول ضلع یک لوزی $2\sqrt{13}$ واحد و نسبت طول قطرهای آن ۲ به ۳ است. مساحت این لوزی کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳) ۴۶ (۴) ۵۲

۱۶۴ هر یک از اضلاع مثلث ABC را به اندازه خودشان در یک جهت امتداد داده و نقاط حاصل را به هم وصل می کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود.

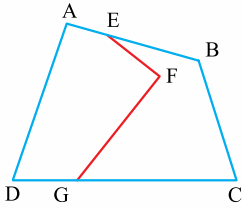
مساحت مثلث جدید، چند برابر مثلث ABC است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۷

۱۶۵ در شکل مقابل، اگر از F خطی به موازات EG رسم کنیم تا AB و CD را به ترتیب در M و N قطع کند،

مساحت ناحیه BEFGC با مساحت کدام ناحیه برابر خواهد بود؟

- (۱) CMEG (۲) CFEG (۳) BNGE (۴) BENC



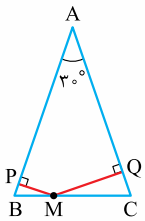
۱۶۶ نقطه O درون مثلث ABC به مساحت $6\sqrt{2}$ واحد مربع قرار دارد. اگر فاصله O از اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب m، n و p فرض کنیم،

حاصل $am + bn + cp$ کدام است؟

- (۱) $10\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $14\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

۱۶۷ در شکل مقابل، اگر $AB = AC = 6\sqrt{3}$ و $MQ = 2MP$ ، حاصل $MP^2 + MQ^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

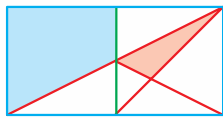


۱۶۸ در مثلث به اضلاع ۱۰، ۵/۱۰ و ۱۴/۵ واحد، فاصله مرکز ثقل از بزرگ ترین ضلع، چند واحد است؟

- (۱) $\frac{70}{29}$ (۲) $\frac{69}{30}$ (۳) $\frac{71}{28}$ (۴) $\frac{68}{31}$

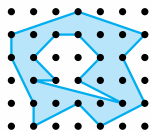
۱۶۹ در شکل مقابل، دو مربع همنهشت، در یک ضلع مشترک اند. نسبت مساحت های دو ناحیه رنگی، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{3}{10}$



۱۷۰ در شکل شبکه ای مقابل، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰



نوع آزمون: مبتدی

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت				

درس دوم: مساحت و کاربردهای آن (۲)

درصد پاسخ گویی داوطلب:

آزمون

۱۸

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

۱۷۱ در متوازی الاضلاع ABCD که $AB = 2BC$ ، نیمساز B ضلع CD را در P قطع می کند. مساحت مثلث BPC چه کسری از مساحت

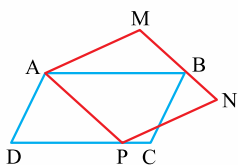
متوازی الاضلاع ABCD است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۱۷۲ در شکل زیر، ABCD یک متوازی الاضلاع و AMNP یک لوزی است. اگر $AB = 2AD$ ، نسبت مساحت این

دو چهارضلعی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$





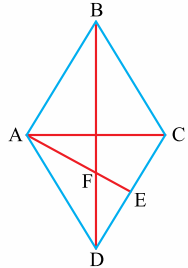
۱۷۳ در لوزی به قطرهای $\frac{14}{3}$ و ۱۶ واحد، فاصله یک رأس از ضلع مقابل، چند واحد است؟

- ۴/۵۴ (۱) ۴/۴۶ (۲) ۴/۵۲ (۳) ۴/۴۸ (۴)

۱۷۴ در مثلث ABC اگر $BC = ۲۵$ و طول میانه‌های وارد بر دو ضلع دیگر، $\frac{۱۰}{۵}$ و ۳۶ واحد باشد، تفاضل طول‌های میانه وارفتاف وارد بر BC ، کدام است؟

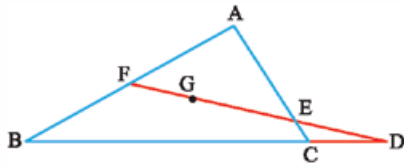
- ۱۶/۴۳ (۴) ۲۱/۱۲ (۳) ۱۷/۳۴ (۲) ۱۹/۸۴ (۱)

۱۷۵ در لوزی مقابل، نقطه E وسط CD است. اگر قطر بزرگ لوزی، دو برابر قطر کوچک آن باشد، AF چند برابر AB است؟



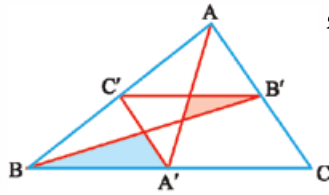
- (۱) $\frac{\sqrt{66}}{۱۶}$
(۲) $\frac{\sqrt{65}}{۱۵}$
(۳) $\frac{\sqrt{67}}{۱۶}$
(۴) $\frac{\sqrt{61}}{۱۵}$

۱۷۶ در شکل زیر، نقطه G مرکز ثقل مثلث ABC است. اگر $GF = ۴$ و $GE = ۶$ ، طول DE کدام است؟



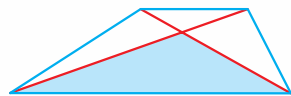
- (۱) ۵
(۲) ۵/۵
(۳) ۶
(۴) ۶/۵

۱۷۷ در شکل مقابل، نقاط A' ، B' و C' وسط‌های اضلاع مثلث ABC می‌باشند. نسبت مساحت‌های دو ناحیه رنگی، کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{3}{8}$

۱۷۸ قاعده بزرگ دوزنقه زیر، $\frac{۲}{۵}$ برابر قاعده کوچک آن است. مساحت دوزنقه، چند برابر مساحت مثلث رنگی است؟



- (۱) $۱/۹۶$
(۲) ۲
(۳) $۲/۰۸$
(۴) $۲/۱۸$

۱۷۹ از نقطه M روی امتداد قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC ، عمودهای MP و MQ را بر ساق‌ها رسم کرده‌ایم. اگر $\sqrt{2}(MP - MQ) = AC$ ،

نسبت $\frac{\hat{B}}{\hat{A}}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۸۰ نقطه O درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $\sqrt{3} \times ۱۴$ واحد، قرار دارد. اگر فاصله O از اضلاع AB و AC ، به ترتیب ۶ و ۵ واحد باشد، فاصله O از BC کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

جامع آزمون: مبحث

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

جامع (۱)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۱۹

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

۱۸۱ تفاضل تعداد قطرهای و ضلع‌های یک چندضلعی منتظم، ۵۲ است. نسبت اندازه یک زاویه داخلی به یک زاویه خارجی آن، کدام است؟

- (۱) $۶/۵$ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) $۵/۵$



۲۸۶ دو دایره $C(O, 8)$ و $C'(O', 5)$ که $OO' = 20$ ، مفروض اند. چند نقطه روی دایره C' وجود دارند که طول مماس های رسم شده از آن نقاط بر دایره C ، ۱۵ واحد باشد؟

(۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) صفر (۴) بی شمار

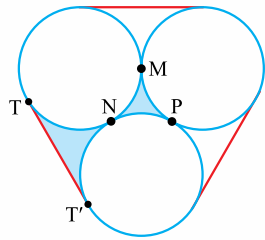
۲۸۷ دایره های $C(O, 3)$ و $C'(O', 2)$ که $OO' = 10$ ، مفروض اند. فاصله محل برخورد مماس مشترک های داخلی دایره ها از محل برخورد مماس مشترک های خارجی آن ها، کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۲۸۸ دو دایره به شعاع های ۵ و ۱۰ واحد، مماس خارج اند. اگر خطی از نقطه تماس آن ها گذشته و در دایره کوچک تر وترى به طول ۶ واحد بسازد، طول وترى که در دایره بزرگ تر می سازد، کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۲۸۹ در شکل مقابل، سه دایره همنهشت توسط نخى به هم بسته شده اند. نسبت مساحت ناحیه MNP به ناحیه TNT' کدام است؟



$$(1) \frac{2\sqrt{5}-3}{2\sqrt{6}}$$

$$(3) \frac{2\sqrt{3}-\pi}{4-\pi}$$

$$(2) \frac{6-2\sqrt{3}}{5}$$

$$(4) \frac{4\sqrt{3}-2\pi}{7\pi}$$

۲۹۰ طول خط المרכזین دو دایره مماس داخل، ۲ واحد و مساحت ناحیه بین آن ها، 9π واحد مربع است. طول وترى از دایره بزرگ که بر دایره کوچک مماس و بر خط المרכזین عمود باشد، چند واحد است؟

(۱) ۴ (۲) $2\sqrt{10}$ (۳) ۶ (۴) $2\sqrt{13}$

جامع

نوع آزمون: مبحث

درصد

وضعیت

بالای ۶۰ درصد	۶۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۲۰ درصد	زیر ۲۰ درصد
😊	🙂	😐	😞

درس دوم: رابطه های طولی در دایره (۳)

درصد پاسخ گویی داوطلب:

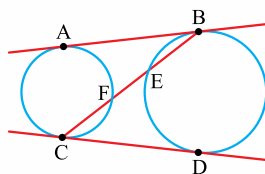
آزمون

۳۰

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

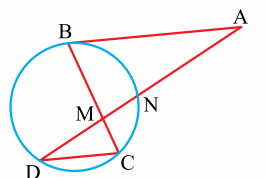
۲۹۱ دایره های C و C' مماس داخل اند و C از مرکز C' می گذرد. از نقطه M واقع بر C ، مماسی بر آن به موازات خط المרכזین دایره ها رسم می کنیم تا C' را در A و B قطع کند. اگر $MA \cdot MB = 4$ و $MA < MB$ ، طول MB کدام است؟

(۱) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$



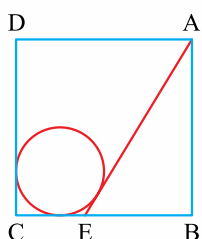
۲۹۲ در شکل مقابل، AB و CD بر دایره ها مماس اند و شعاع دایره بزرگ تر، $\frac{3}{4}$ شعاع دایره کوچک تر است. حاصل $\frac{BE}{CF}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱



۲۹۳ در شکل روبه رو، AB بر دایره مماس و با CD موازی است. اگر $MB = \frac{4}{5}$ ، $MC = \frac{1}{5}$ و $MD = 3$ ، طول AB کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) $\frac{8}{5}$ (۴) $\frac{9}{5}$



۲۹۴ در شکل مقابل، دایره ای به شعاع ۱ واحد بر AE و دو ضلع مربع $ABCD$ مماس است. اگر $AB = 4$ ، طول BE کدام است؟

(۱) $\frac{9-\sqrt{15}}{2}$ (۲) $\frac{8-\sqrt{15}}{2}$ (۳) $\frac{9-\sqrt{17}}{2}$ (۴) $\frac{8-\sqrt{17}}{2}$



۲۹۵ دایره‌های $C(O, \sqrt{2}+1)$ و $C'(O', \sqrt{2}-1)$ مفروض‌اند. اگر $OO' = 4$ ، زاویه بین مماس مشترک‌های داخلی این دو دایره، چند برابر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $5/3$ (۴) $2/5$

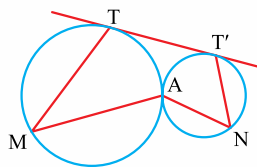
۲۹۶ نسبت شعاع‌های دو دایره مماس خارج، $1/3$ است. طول مماس مشترک خارجی این دایره‌ها، چند برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است؟

- (۱) $3\sqrt{3}/2$ (۲) $2\sqrt{2}/3$ (۳) $2\sqrt{3}/3$ (۴) $3\sqrt{2}/2$

۲۹۷ دو دایره همنهشت و دایره سوم به شعاع ۱ واحد، دایره دوم مماس خارج‌اند. اگر طول پاره‌خطی که نقاط تماس دایره سوم با دو دایره دیگر را به هم وصل می‌کند، $1/6$ واحد باشد، طول شعاع دایره‌های همنهشت، کدام است؟

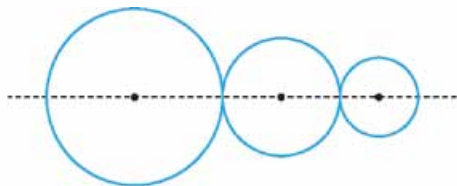
- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۹۸ در شکل مقابل، دایره‌ها مماس خارج‌اند و TT' بر آن‌ها مماس است. حاصل $\hat{TMA} + \hat{T'NA}$ کدام است؟



- (۱) همواره 90° (۲) همواره کمتر از 90° (۳) همواره بیشتر از 90° (۴) بستگی به نسبت شعاع‌ها دارد.

۲۹۹ در شکل روبه‌رو، مرکزهای دایره‌ها روی یک خط قرار دارند و خطی مماس بر هر سه دایره، وجود دارد. اگر شعاع دایره‌های کوچک و متوسط ۲ و ۳ واحد باشند، شعاع دایره بزرگ کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) $5/5$

۳۰۰ دایره $C'(O', R')$ درون دایره $C(O, 8)$ و مماس بر آن، مفروض است. اگر دقیقاً سه وتر به طول $4\sqrt{7}$ واحد از دایره C ، بر دایره C' مماس باشند، شعاع دایره C' کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۱ (۳) $2/5$ (۴) ۲

نوع آزمون: מבחן جامع

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت				

درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و محیطی (۱)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۳۱

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

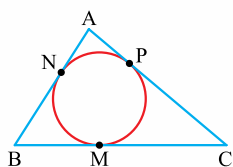
۳۰۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $4\sqrt{3}$ واحد، حاصل $r + r_a$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۳۰۲ اگر طول شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث، $1/3$ ، $1/4$ و $1/5$ واحد باشند، شعاع دایره محاطی داخلی آن چند واحد است؟

- (۱) $1/12$ (۲) $1/10$ (۳) $1/11$ (۴) $1/9$

۳۰۳ در شکل مقابل، دایره بر اضلاع مثلث ABC مماس است. اگر محیط مثلث ۳۸ واحد باشد و $\frac{CM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 1/5$ ، حاصل $BC - AC$ کدام است؟



- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۳۰۴ اگر شعاع دایره محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع $2\sqrt{6}$ واحد باشد، مساحت این مثلث چند واحد مربع است؟

- (۱) $18\sqrt{3}$ (۲) $20\sqrt{3}$ (۳) $14\sqrt{3}$ (۴) $16\sqrt{3}$

۳۰۵ اگر مساحت ناحیه بین دایره‌های محاطی و محیطی یک شش‌ضلعی منتظم، 3π واحد مربع باشد، مساحت این شش‌ضلعی کدام است؟

- (۱) $17\sqrt{3}$ (۲) $19\sqrt{3}$ (۳) $18\sqrt{3}$ (۴) $20\sqrt{3}$





نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درس دوم: قضیه کسینوس‌ها (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۴۴

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

۴۳۱ در مثلث ABC که $a = 2$ ، $b = \sqrt{3} + 1$ و $\hat{C} = 60^\circ$ ، اندازه زاویه A کدام است؟

- (۱) 15° (۲) 30° (۳) 45° (۴) 60°

۴۳۲ در مثلث ABC نسبت مجموع مکعبات دو ضلع به مجموع آن دو ضلع، برابر مربع ضلع سوم است. مجموع زوایای روبه‌رو به آن دو ضلع،

کدام است؟

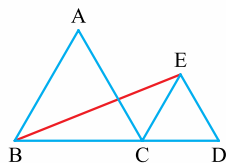
- (۱) 150° (۲) 120° (۳) 135° (۴) 90°

۴۳۳ در مثلث ABC که $AB = 5$ ، $AC = 4$ و $BC = 7$ ، از نقطه M وسط AC خطی رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در N قطع کند. اگر

$NC = 3/5$ ، طول MN کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{105}}{2}$ (۳) 5 (۴) 2

۴۳۴ در شکل زیر، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و CDE به اضلاع 3 و 5 واحد چنان قرار گرفته‌اند که BC و CD در یک امتدادند.

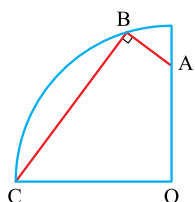


کسینوس زاویه ABE کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{12}{13}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{11}{14}$

۴۳۵ چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای به شعاع 3 واحد، محاط است و قطرهای آن برهم عمودند. اگر $AB = 4$ ، طول CD کدام است؟

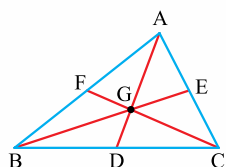
- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{19}$ (۳) $\sqrt{21}$ (۴) $2\sqrt{5}$



۴۳۶ در ربع دایره مقابل، اگر $AB = 7$ و $BC = 24$ ، طول OA کدام است؟

- (۱) 15 (۲) 16 (۳) 13 (۴) 14

۴۳۷ در شکل زیر، نقطه G محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث ABC است. اگر $GE = 3$ ، $AG = 4$ و $BD = 5$ ، طول FG کدام است؟



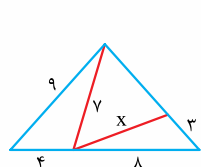
- (۱) $3/5$ (۲) 3 (۳) $4/5$ (۴) 4

۴۳۸ طول قطرهای چهارضلعی محدب $ABCD$ ، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{11}$ واحد و طول پاره‌خطی که وسط‌های قطرهای آن را به هم وصل می‌کند، $\sqrt{2}$ واحد است.

مجموع مربعات اضلاع این چهارضلعی، کدام است؟

- (۱) 23 (۲) 24 (۳) 25 (۴) 26

۴۳۹ در شکل زیر، طول x کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) $\sqrt{42}$ (۴) $\sqrt{43}$

۴۴۰ نقطه M روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC چنان قرار دارد که محیط مثلث‌های ABM و ACM یکسان است. اگر $AB = 4\sqrt{2}$ و

$AC = 3\sqrt{2}$ ، طول AM کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2/64}$ (۲) $\sqrt{2/65}$ (۳) $\sqrt{2/62}$ (۴) $\sqrt{2/63}$



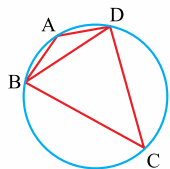


۵۳۵ اگر نقطه M' بازتاب نقطه M نسبت به خط $x = k$ و نقطه M'' بازتاب M' نسبت به خط $x = h$ باشد، طول پاره خط MM'' کدام است؟
(k و h دو عدد حقیقی‌اند.)

- (۱) $2(k+h)$ (۲) $2|k-h|$ (۳) $|k-h|$ (۴) $k+h$

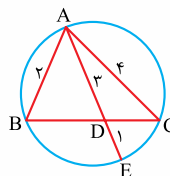
۵۳۶ دو خط موازی d و d' و نقطه A خارج آن‌ها مفروض‌اند. به کمک کدام تبدیل می‌توان مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی رسم کرد که A رأس قائمه آن بوده و دو رأس دیگر آن روی d و d' باشند؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس



۵۳۷ در شکل روبه‌رو، اگر $\hat{B}AD = 2\hat{B}CD$ ، $AB = 2$ و $AD = \sqrt{2}$ ، مساحت دایره کدام است؟

- (۱) $2/5\pi$ (۲) 5π (۳) 20π (۴) 10π



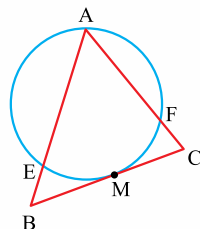
۵۳۸ در شکل مقابل، تفاضل طول پاره‌های BD و CD چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{1/5}$ (۴) $1/5$

۵۳۹ مساحت مثلث ABC که در آن، $\hat{A} = 60^\circ$ ، $AB + AC = 2\sqrt{3}$ و طول نیمساز وارد بر BC ۱ واحد است، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۵۴۰ در شکل زیر، دایره از A گذشته و در نقطه M بر BC مماس است. اگر M وسط کمان EF باشد، حاصل $\frac{BE}{CF}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{BM}{MC}$ (۲) $\frac{AE}{AF}$ (۳) $\frac{AB}{BC}$ (۴) $\frac{BC}{AC}$

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	وضعیت
۶۰ تا ۱۰۰ درصد	خوب
۴۰ تا ۶۰ درصد	متوسط
۲۰ تا ۴۰ درصد	ضعیف
زیر ۲۰ درصد	خیلی ضعیف

جامع پایه (۱)

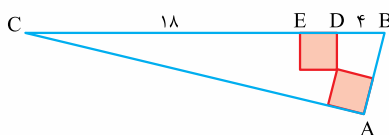
درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۵۵

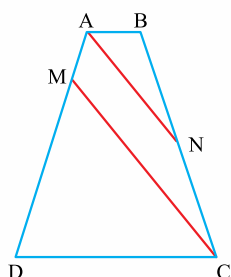
زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

۵۴۱ در شکل زیر، دو مربع همنهشت، درون مثلث ABC قرار دارند. مساحت این مثلث، چند واحد مربع است؟



- (۱) ۸۴ (۲) ۹۶ (۳) ۸۶ (۴) ۹۸

۵۴۲ در دوزنقه مقابل، $AM = AB$ ، $DM = DC$ و N وسط BC است. اگر $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\frac{AN}{CM}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{7}{9}$



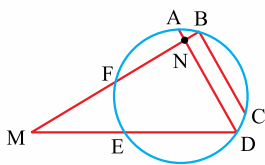
۵۴۳ در یک n ضلعی، با کم شدن دو ضلع، ۳۵ قطر از تعداد قطرها کم می شود. اگر یک ضلع به اضلاع این n ضلعی اضافه شود، چه قدر به تعداد قطرها اضافه می شود؟

۵۴۴ نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع BC و CD از متوازی الاضلاع ABCD چنان قرار دارند که $\frac{BM}{MC} = \frac{3}{4}$ و $\frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$. مساحت چهارضلعی AMCN چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟

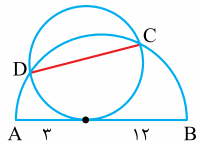
۵۴۵ طول دو ضلع از مثلثی ۱۲ و ۳۷ واحد و طول میانه وارد بر ضلع سوم، ۱۷/۵ واحد است. مساحت این مثلث، چند واحد مربع است؟

۵۴۶ سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک استوانه قائم به حجم 250π واحد مکعب، مستطیلی به مساحت ۶۰ واحد مربع است. اگر فاصله محور استوانه از صفحه، ۴ واحد باشد، مساحت جانبی استوانه کدام است؟

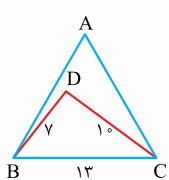
۵۴۷ در شکل زیر، اگر $AD \parallel BC$ ، $\widehat{AB} = 20^\circ$ ، $\widehat{AF} = 100^\circ$ ، $\widehat{CE} = 120^\circ$ و $\widehat{BMD} = 30^\circ$ ، اندازه زاویه MND کدام است؟



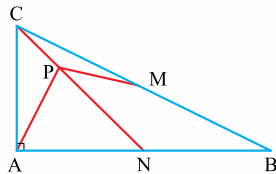
۵۴۸ در شکل مقابل، دایره به قطر CD، بر قطر AB از نیم دایره، مماس است. شعاع دایره کوچک کدام است؟



۵۴۹ در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الاضلاع است. اگر بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی ABDC را حداکثر کنیم، مساحت آن چند برابر می شود؟



۵۵۰ در شکل زیر، $\hat{A} = 90^\circ$ و نقاط M و N وسط های BC و AB می باشند. اگر $PN = 2CP = PM + 2 = 6$ ، طول AP کدام است؟



جامع نوع آزمون: مبحثی

درصد	۲۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	🟡	🟡	🟢	🟢

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

جامع پایه (۲)

درصد پاسخ گویی داوطلب:

آزمون

۵۶

۵۵۱ اگر طول دو ارتفاع از مثلثی ۲ و ۳ واحد باشد، طول ارتفاع سوم، کدام نمی تواند باشد؟

۵۵۲ در دوزنقه ABCD ($AB \parallel DC$)، نقطه M وسط BC است و قطر BD، پاره خط AM را نصف می کند. حاصل $\frac{AB}{DC}$ کدام است؟

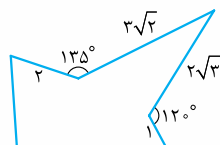
۵۵۳ نقطه O درون مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد و به ترتیب به فاصله $\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ واحد از AC و AB قرار دارد. طول پاره خط OC کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$



۶۰۹ اگر بدون تغییر محیط، مساحت شکل مقابل را به حداکثر برسانیم، چه قدر به مساحت آن اضافه می‌شود؟

- (۱) ۷
(۲) ۱۰
(۳) ۸
(۴) ۹

۶۱۰ در مثلث ABC، نقطه M وسط BC است و نیمسازهای زاویه‌های AMB و AMC، اضلاع AB و AC را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند.

اگر $AP = 4\sqrt{2}$ ، $PB = \sqrt{2}$ و $BC = \frac{1}{3}$ ، مساحت مثلث MPQ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
(۲) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
(۳) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$
(۴) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

۶۱۱ اگر $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ و $3I - 2B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 47 & -26 \\ -78 & 49 \end{bmatrix}$ ، بزرگ‌ترین درایه ماتریس C که $C = 3B - 2A^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۱۷
(۲) ۱۸
(۳) ۱۹
(۴) ۱۶

۶۱۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، بزرگ‌ترین درایه ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۷
(۴) ۶

۶۱۳ اگر خط $y = \frac{37}{12}$ ، هادی سهمی $3x^2 + y + ax = 0$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۳

۶۱۴ از هر رأس مثلث ABC خطی به موازات ضلع روبه‌رو رسم می‌کنیم تا از برخورد آن‌ها، مثلث MNP ایجاد شود. اگر $A = (a, b, 1)$ ،

$B = (a, 1, 4)$ و $C = (a, 2b, 5)$ ، مساحت مثلث MNP، ۲۰ واحد مربع باشد، مجموع مقادیر b کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$
(۲) $\frac{8}{7}$
(۳) $\frac{7}{6}$
(۴) $\frac{6}{5}$

جامع

نوع آزمون: مبحثی

شبیه‌ساز (۲) کنکور ۱۴۰۳

آزمون

۶۲

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۲۰

۶۱۵ در مثلث ABC، از سه رأس مثلث و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

- (۱) محل هم‌رسی ارتفاع‌ها - محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها
(۲) محل هم‌رسی نیمسازها - محل هم‌رسی میانه‌ها
(۳) محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها - محل هم‌رسی نیمسازها
(۴) محل هم‌رسی میانه‌ها - محل هم‌رسی ارتفاع‌ها

۶۱۶ در شکل روبه‌رو، مساحت مثلث ABC، سه برابر مساحت مثلث ABM و پنج برابر مساحت مثلث CMN است.

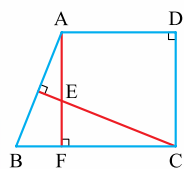
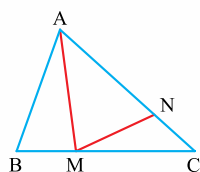
حاصل $\frac{CM}{BC} + \frac{CN}{AC}$ کدام است؟

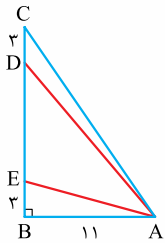
- (۱) ۱
(۲) $\frac{14}{15}$

- (۳) $\frac{29}{30}$
(۴) $\frac{2}{3}$

۶۱۷ در دوزنقه مقابل، $BC = 14$ ، $BF = 4$ و $AE = 6$. مساحت دوزنقه کدام است؟

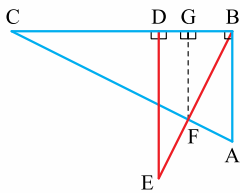
- (۱) ۹۰
(۲) ۷۰
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۴۰





۶۱۸ در شکل مقابل، $\hat{C} = \hat{DAE}$. طول DE کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۹
(۴) ۸

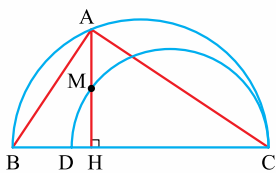


۶۱۹ در شکل مقابل، مثلث‌های ABC و BDE متشابه‌اند. اگر $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ و $\frac{BE}{AC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{FG}{AB}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{9}$
(۳) $\frac{1}{7}$
(۴) $\frac{1}{8}$

۶۲۰ مساحت یک مثلث متساوی الساقین، مربع طول میانه وارد بر قاعده آن است. نسبت طول میانه بزرگ به میانه کوچک این مثلث، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $\sqrt{2}$



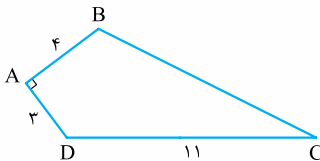
۶۲۱ در شکل زیر، دو نیم‌دایره به قطرهای BC و CD رسم شده‌اند. اگر $AB = 2\sqrt{13}$ ، $AC = 3\sqrt{13}$ و نقطه M وسط AH باشد، طول DM کدام است؟

- (۱) $\sqrt{11}$
(۲) $\sqrt{10}$
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) $\sqrt{13}$

۶۲۲ کدام تبدیل هندسی، همواره جهت شکل را حفظ می‌کند؟

- (۱) تجانس
(۲) دوران
(۳) انتقال
(۴) هر سه گزینه

۶۲۳ در چهارضلعی ABCD، از نقاط B و D دو پاره خط به ترتیب موازی با AD و AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M (درون چهارضلعی) قطع کنند. اگر $\hat{BDC} = 2\hat{BDM}$ ، فاصله نقطه M از رأس C کدام است؟



- (۱) $3\sqrt{\frac{37}{5}}$
(۲) $4\sqrt{\frac{38}{5}}$
(۳) $3\sqrt{\frac{34}{5}}$
(۴) $4\sqrt{\frac{39}{5}}$

۶۲۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های A^2 ، چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

- (۱) ۲
(۲) $\frac{3}{5}$
(۳) $\frac{2}{5}$
(۴) ۳

۶۲۵ اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند و $AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس C که $C = \frac{3}{5}A \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} B - \frac{2}{3}A \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۳۸
(۳) ۴۰
(۴) ۳۴

۶۲۶ رئوس کانونی یک بیضی، نقاطی به طول‌های ۱- و ۲ از خط $2x - y = 3$ می‌باشند. اگر طول قطر کوچک این بیضی ۲ واحد باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{195}}{15}$
(۲) $\frac{\sqrt{205}}{15}$
(۳) $\frac{\sqrt{215}}{15}$
(۴) $\frac{\sqrt{185}}{15}$

۶۲۷ در متوازی‌السطوحی که با بردارهای $\vec{a} = (m+1, m, -1)$ ، $\vec{b} = (1, -1, 0)$ و $\vec{c} = (3, 2, -1)$ ساخته می‌شود، طول ارتفاع وارد بر وجه

شامل $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ است. اگر $m < 2$ ، طول ارتفاع وارد بر وجه شامل $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
(۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

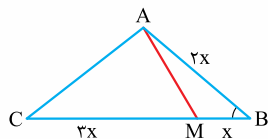


آزمون ۱۵

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۱

فرض کنیم $BM = x$ ؛ پس $MC = 3x$ ، $BC = 4x$ و
 $AB = \frac{1}{4}(4x) = x$ حال در مثلث های BAM و BCA داریم:



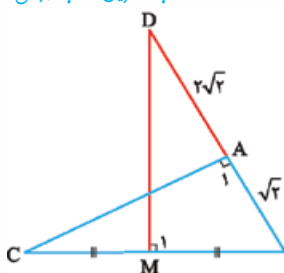
$$\left(\frac{BA}{BC} = \frac{BM}{BA}\right), (\hat{B} = \hat{B}) \Rightarrow \triangle BAM \sim \triangle BCA$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{4}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۲

نزدیک ترین رأس مثلث ABC به نقطه D ، نقطه A است؛ پس
 $AD = 2\sqrt{2}$ حال داریم:



$$(\hat{A}_1 = \hat{M}_1), (\hat{B} = \hat{B})$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBD$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BM} \xrightarrow{BM = \frac{1}{4}BC} \frac{BC}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{4}BC}$$

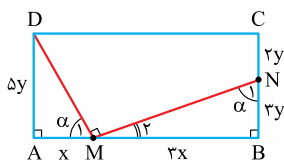
$$\Rightarrow \frac{1}{4}BC^2 = 6 \Rightarrow BC^2 = 12 \quad (*)$$

$$\triangle ABC: \text{ فیثاغورس } \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\xrightarrow{(*)} 2 + AC^2 = 12 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۳



چون $\frac{NB}{NC} = \frac{3}{4}$ و $\frac{MB}{MA} = 3$
 طول پاره خط ها را مطابق شکل،
 نام گذاری می کنیم. حال داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_1 + \hat{M}_2 &= 90^\circ \\ \hat{N}_1 + \hat{M}_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1$$

$$(\hat{M}_1 = \hat{N}_1), (\hat{A} = \hat{B}) \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle NBM$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{MB} = \frac{AM}{NB} \Rightarrow \frac{5y}{3x} = \frac{x}{4y} \Rightarrow \frac{5y}{x} = \frac{x}{y}$$

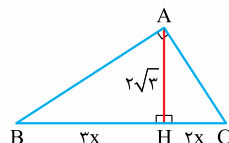
$$\Rightarrow x^2 = 5y^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}y \quad (*)$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{4x}{5y} \xrightarrow{(*)} \frac{4\sqrt{5}y}{5y} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

پس از یافتن $\hat{M}_1 = \hat{N}_1 = \alpha$ ، با مقایسه مقدار $\tan \alpha$ در دو مثلث هم می توانستیم مسئله را حل کنیم.

۸۸ اگر BC و HC را

قاعده های مثلث های ABC و AHC فرض کنیم، ارتفاع وارد بر این قاعده ها یکسان است (AH) و در نتیجه:



$$\frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{HC}{BC} \xrightarrow{\text{فرض سوال}} \frac{40}{100} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow HC = 2x, BC = 5x \Rightarrow BH = 3x$$

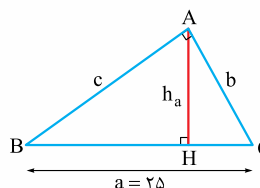
$$\triangle ABC: \text{ روابط طولی } \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow 12 = 6x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow BC = 5\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} (5\sqrt{2})(2\sqrt{3}) = 5\sqrt{6}$$

۸۹ طبق فرض، در مثلث

قائم الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ داریم:



$$a + b + c = 56 \xrightarrow{a=25} b + c = 31$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} b^2 + c^2 + 2bc = 31^2 \Rightarrow bc = 168$$

$$\xrightarrow{\frac{b^2+c^2=a^2}{a=25}} 25^2 + 2bc = 31^2 \Rightarrow 2bc = 336$$

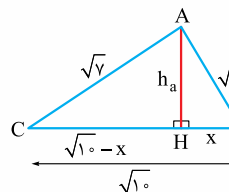
$$\triangle ABC: \text{ روابط طولی } \Rightarrow h_a = \frac{bc}{a} = \frac{168}{25} = 6 \frac{12}{25}$$

توجه اگر می دانستیم که اعداد ۷، ۲۴ و ۲۵ فیثاغورسی اند ($7^2 + 24^2 = 25^2$)، با فرض $a = 25$ ، $b = 7$ و $c = 24$ ، زودتر به جواب می رسیدیم.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۰

می دانیم ترتیب طول ارتفاع های مثلث، برعکس ترتیب طول اضلاع آن است؛ پس باید حاصل ضرب طول ارتفاع های



وارد بر ضلع های کوچک و بزرگ مثلث را بیابیم. حال با نام گذاری طول قطعات و به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} x^2 + h_a^2 = 5 \\ (\sqrt{10} - x)^2 + h_a^2 = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} 2\sqrt{10}x - 10 = -2$$

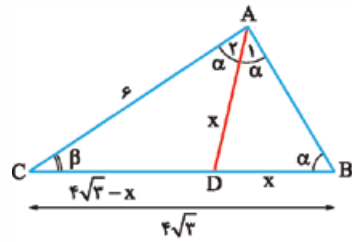
$$\Rightarrow 2\sqrt{10}x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله اول}} \frac{16}{10} + h_a^2 = 5 \Rightarrow h_a^2 = 5 - \frac{8}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}} \quad (*)$$

$$ah_a = ch_c \Rightarrow (\sqrt{10})\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}}\right) = (\sqrt{5})(h_c)$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{\sqrt{170}}{5} \xrightarrow{(*)} h_a h_c = \left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{170}}{5}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{5}$$



۹۷ فرض کنیم
 $\hat{A} = 2\alpha$ و $\hat{B} = \alpha$
 رسم نیمساز AD داریم:

$$\begin{aligned} \triangle DAB : \hat{B} = \hat{A}_1 &\Rightarrow DB = DA = x \Rightarrow CD = 4\sqrt{3} - x \\ (\hat{A}_1 = \hat{B}), (\hat{C} = \hat{C}) &\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BCA \\ \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} &\Rightarrow \frac{4\sqrt{3} - x}{6} = \frac{x}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

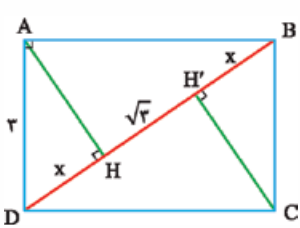
از برابری کسره‌های اول و سوم نتیجه می‌گیریم:

$$4\sqrt{3} - x = \frac{36}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

حال با جای‌گذاری مقدار x در کسر دوم، داریم:

$$\frac{\sqrt{3}}{AB} = \frac{6}{4\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 2$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۲ نوبت دوم)

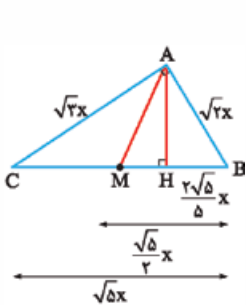


طبق فرض، $HH' = \sqrt{3}$. از
 طرف دیگر، مثلث‌های AHD و
 $CH'B$ هم‌نهشت‌اند (چرا؟)،
 پس $DH = H'B = x$ حال
 در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$\begin{aligned} AD^2 &= DB \cdot DH \Rightarrow 9 = (2x + \sqrt{3})x \\ \Rightarrow 2x^2 + \sqrt{3}x - 9 &= 0 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{3} \quad (*) \\ AB^2 &= BD \cdot BH \xrightarrow{(*)} AB^2 = (3\sqrt{3})(2\sqrt{3}) = 18 \\ \Rightarrow AB &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

توجه پس از یافتن $x = \sqrt{3}$ ، می‌توانستیم طول AB را با
 استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABD بیابیم.

(مشابه تیرپی ۹۸)



روشن‌اول: چون $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
 فرض می‌کنیم $AB = \sqrt{2}x$ و $AC = \sqrt{3}x$ حال داریم:

فیثاغورس: $\triangle ABC$
 $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2x^2 + 3x^2} = \sqrt{5}x$

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC \cdot BH \Rightarrow 2x^2 = (\sqrt{5}x)(BH) \\ \Rightarrow BH &= \frac{2}{\sqrt{5}}x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x \end{aligned}$$

۹۴ در مثلث ABC فرض می‌کنیم $h_b = 6, h_a = 6$ و $h_c = 8$ حال داریم:

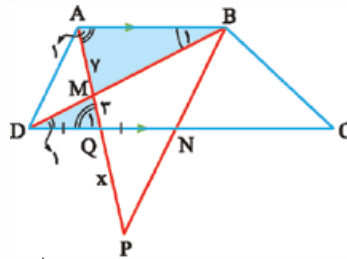
$$\begin{aligned} ah_a &= bh_b = ch_c = 2S \Rightarrow 6a = 6b = 8c = 2S \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{3}S, b = \frac{1}{3}S, c = \frac{1}{4}S \end{aligned}$$

پس باید مثلثی را انتخاب کنیم که طول اضلاع آن، با اعداد $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ متناسب باشند که فقط این ویژگی را دارد، زیرا:

$$\frac{6}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{\frac{1}{3}}$$

توجه در حالت کلی، اگر طول اضلاع یک مثلث، با معکوس طول
 ارتفاع‌های مثلث دیگری متناسب باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

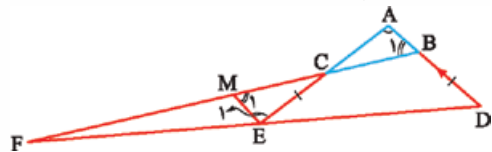
۹۵ با فرض $PQ = x$ داریم:



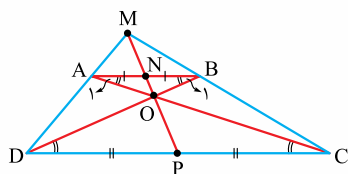
$$\begin{aligned} \triangle PAB : QN \parallel AB &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PQ}{PA} = \frac{QN}{AB} \\ \xrightarrow{QN=DQ} \frac{x}{x+10} &= \frac{DQ}{AB} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB \parallel DQ &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{Q}_1, \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MQD \\ \Rightarrow \frac{DQ}{AB} = \frac{MQ}{MA} &\Rightarrow \frac{DQ}{AB} = \frac{3}{5} \xrightarrow{(*)} \frac{x}{x+10} = \frac{3}{5} \\ \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x}{10} = \frac{3}{4} &\Rightarrow x = 7.5 \end{aligned}$$

۹۶ از E خطی به موازات DA رسم می‌کنیم تا FB را
 در M قطع کند. حال داریم:



$$\begin{aligned} (\hat{E}_1 = \hat{A}), (\hat{M}_1 = \hat{B}_1) &\Rightarrow \triangle EMC \sim \triangle ABC \\ \Rightarrow \frac{AB}{ME} = \frac{AC}{CE} &\xrightarrow{CE=BD} \frac{AB}{ME} = \frac{AC}{BD} \\ \Rightarrow \frac{ME}{BD} = \frac{AB}{AC} &\Rightarrow \frac{ME}{BD} = \frac{1}{3} \quad (*) \\ \triangle FDB : EM \parallel DB &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FE}{FD} = \frac{ME}{BD} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{DE}{FD} = \frac{2}{3} &\Rightarrow \frac{FD}{DE} = \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

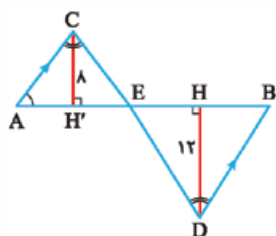


طبق نکته قبلی، نقاط M، O، N و P روی یک خط قرار دارند. حال داریم:

$$\begin{aligned} \triangle OAB \sim \triangle OCD &\Rightarrow (\text{نسبت تشابه}) = (\text{نسبت میانه‌ها}) \\ \Rightarrow \frac{ON}{OP} = \frac{AB}{CD} = \frac{2/5}{7/5} = \frac{1}{3} &\Rightarrow \frac{ON}{ON+OP} = \frac{1}{1+3} \\ \Rightarrow \frac{ON}{5} = \frac{1}{4} &\Rightarrow ON = \frac{5}{4} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle MAB \sim \triangle MDC &\Rightarrow (\text{نسبت تشابه}) = (\text{نسبت میانه‌ها}) \\ \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{MN}{MP-MN} = \frac{1}{3-1} &\Rightarrow \frac{MN}{5} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow MN = \frac{5}{2} \quad (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MO = MN + ON &\xrightarrow{(*), (***)} MO = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} \\ &= \frac{15}{4} = 3.75 \end{aligned}$$

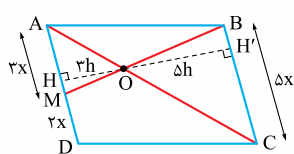


طبق فرض، داریم:
AC || BD
 $\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle BDE$
 $\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle BDE$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} &= (\text{نسبت ارتفاع‌ها}) \\ \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3} &\Rightarrow \frac{AE+EB}{EB} = \frac{5}{3} \Rightarrow EB = 15 \quad (*) \end{aligned}$$

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}(EB)(DH) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2}(15)(12) = 90$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)



چون $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}$ فرض می‌کنیم
پس $AM = 3x$ و $MD = 2x$
 $BC = AD = 5x$ حال داریم:

$$\begin{aligned} \triangle OAM \sim \triangle OCB &\Rightarrow (\text{نسبت تشابه}) = (\text{نسبت ارتفاع‌ها}) \\ \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{AM}{CB} = \frac{3}{5} &\Rightarrow OH = 3h, OH' = 5h \quad (*) \end{aligned}$$

$$\frac{S_{\triangle OAM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}AM.OH}{AD.HH'} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{1}{2}(3x)(3h)}{(5x)(8h)} = \frac{9}{80}$$

$$MH = BM - BH = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}x = \frac{\sqrt{5}}{10}x$$

$$\frac{S_{\triangle AHM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}MH.AH}{\frac{1}{2}BC.AH} = \frac{MH}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{10}x}{\sqrt{5}x} = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$$

روش دوم: پس از یافتن $BC = \sqrt{5}x$ ، داریم:

$$AH = \frac{AB.AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{6}x^2}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}x$$

$$AM \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$\triangle AHM: \text{فیثاغورس} \Rightarrow MH^2 + AH^2 = AM^2$$

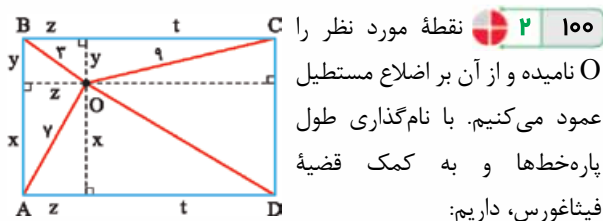
$$\Rightarrow MH^2 + \frac{6}{5}x^2 = \frac{5}{4}x^2 \Rightarrow MH^2 = \frac{1}{20}x^2$$

$$\Rightarrow MH = \frac{1}{2\sqrt{5}}x = \frac{\sqrt{5}}{10}x$$

ادامه راه حل، همانند روش اول است.

توجه: ۱) برای سادگی محاسبات، می‌توانستیم مقدار x را عددی دلخواه فرض کنیم.

۲) در حالت کلی، در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، با رسم ارتفاع AH و میانه AM نتیجه می‌شود $|b^2 - c^2| = 2a.MH$ و با استفاده از این رابطه هم می‌توانستیم مسئله را حل کنیم.



$$\left. \begin{aligned} x^2 + t^2 &= OD^2 \\ y^2 + z^2 &= 3^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = OD^2 + 9 \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + z^2 &= 7^2 \\ y^2 + t^2 &= 9^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 130 \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow OD^2 + 9 = 130 \Rightarrow OD^2 = 121$$

$$\Rightarrow OD = 11$$

توجه: به همین ترتیب ثابت می‌شود در مستطیل ABCD همواره $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.

آزمون ۱۱

۱۵۱

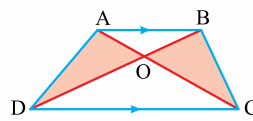
نکته

در هر دوزنقه، محل برخورد قطرهای، محل برخورد امتداد ساق‌ها و وسط‌های دو قاعده، روی یک خط قرار دارند.

۱۶۵ ۴

یادآوری

قضیه شبه پروانه: در هر دوزنقه، مثلث‌های محدود به قطر‌ها و یک ساق، هم‌مساحت‌اند.

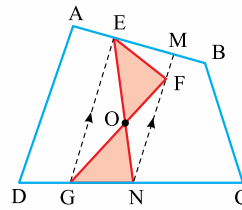


$$AB \parallel DC \Rightarrow S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC}$$

طبق فرض، چهارضلعی EGNF

دوزنقه است، پس مساحت مثلث‌های OGN و OEF یکسان است و داریم:

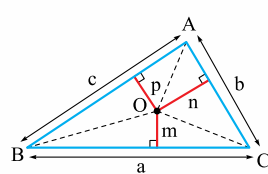
$$S_{BEFGC} = S_{BEFONC} + S_{\triangle OGN} \\ = S_{BEFONC} + S_{\triangle OEF} = S_{BENOC}$$



۱۶۶ ۴

یادآوری

نقطه O را به رئوس مثلث وصل می‌کنیم. مطابق شکل، داریم:



$$S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCA} + S_{\triangle OAB} = S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}am + \frac{1}{4}bn + \frac{1}{4}cp = 6\sqrt{2}$$

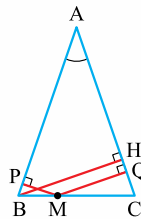
$$\Rightarrow am + bn + cp = 12\sqrt{2}$$

۱۶۷ ۲

یادآوری

مجموع فواصل هر نقطه واقع بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق، برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.

$$AB = AC \Rightarrow MP + MQ = BH$$



فرض کنیم $MP = x$ ، پس $MQ = 2x$ و چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، داریم: $MP + MQ = BH \Rightarrow 3x = BH$

حال در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB \Rightarrow 3x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MP = \sqrt{3}, MQ = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MP^2 + MQ^2 = 3 + 12 = 15$$

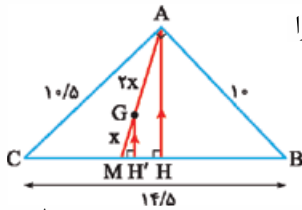
۱۶۸ ۱ در مثلث ABC فرض می‌کنیم $AB = 10$.

$AC = 10/5$ و $BC = 14/5$ حال داریم:

$$BC^2 - AC^2 = 14^2/5^2 - 10^2/5^2 \\ = (14^2/5 - 10^2/5)(14/5 - 10/5) = 100$$

$$\Rightarrow BC^2 - AC^2 = AB^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\xrightarrow{\text{عکس فیثاغورس}} \hat{A} = 90^\circ$$



می‌دانیم مرکز ثقل مثلث، میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. مطابق شکل، داریم:

$$\triangle MAH: \text{تالس} \Rightarrow \frac{GH'}{AH} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH' = \frac{1}{3}AH (*)$$

$$\triangle ABC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{10 \times 10/5}{14/5}$$

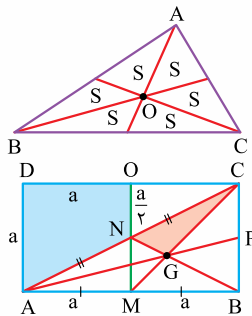
$$\xrightarrow{(*)} GH' = \frac{10 \times 10/5}{3 \times 14/5} = \frac{70}{29}$$

۱۶۹ ۳

یادآوری

میانه‌های هر مثلث، آن را به شش مثلث هم‌مساحت (هم‌ارز) تقسیم می‌کنند.

مثلث‌های AMN و CON هم‌نهشت‌اند (چرا؟)، پس $ON = NM$ و $AN = NC$



بنابراین BN و CM دو میانه از مثلث ABC می‌باشند و با رسم میانه سوم (AP)، نتیجه می‌گیریم:

$$S_{\triangle GNC} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6}(\frac{1}{2}(2a)(a)) = \frac{1}{6}a^2 (*)$$

چهارضلعی ADON دوزنقه است؛ بنابراین:

$$S_{ADON} = \frac{1}{4}(a + \frac{a}{2})(a) = \frac{3}{4}a^2 (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow \frac{S_{\triangle GNC}}{S_{ADON}} = \frac{\frac{1}{6}a^2}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{2}{9}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۷۰ ۲

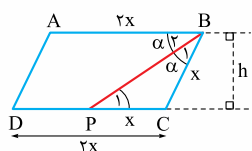
یادآوری

اگر یک چندضلعی شبکه‌ای b نقطه مرزی و i نقطه درونی داشته باشد، مساحت آن برابر است با: $S = \frac{b}{2} + i - 1$

تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی بزرگ‌تر به ترتیب ۱۷ و ۱۰ و تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی کوچک‌تر، به ترتیب ۸ و ۲ است. مساحت ناحیه رنگی، برابر است با مساحت ناحیه بین دو چندضلعی؛ بنابراین:

$$S_{\text{رنگی}} = (\frac{17}{2} + 10 - 1) - (\frac{8}{2} + 2 - 1) = 16$$

آزمون ۱۸



فرض کنیم $BC = x$

پس $AB = 2x$ و مطابق شکل، داریم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{B}_1 \xrightarrow{\hat{B}_2 = \hat{B}_1} \hat{P}_1 = \hat{B}_1$$



می دانیم میانه های مثلث، آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کنند؛ بنابراین:

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BGC} = 252 \Rightarrow \frac{1}{2}BC \cdot AH = 252$$

$$\xrightarrow{BC=25} AH = \frac{504}{25} = \frac{2016}{100} = 20/16$$

از طرف دیگر، GM میانه وارد بر وتر مثلث BGC است، بنابراین:

$$GM = \frac{1}{2}BC = 12/5 \Rightarrow AM = 3GM = 37/5$$

$$AM - AH = 37/5 - 20/16 = 17/34$$

(مشابه تهرانی ۱۳۰۲ خارج)

۱۷۵

می دانیم قطرهای لوزی، عمودمنصف یکدیگرند؛ در نتیجه DO و AE

دو میانه از مثلث ACD بوده و یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند؛ پس اگر $OF = x$ ، $BO = OD = 3x$ و $FD = 2x$ آن گاه $BD = 2AC$ ؛ در نتیجه از طرف دیگر، $AO = \frac{3}{2}x$ و $AC = 3x$ حال طبق قضیه فیثاغورس در مثلث های AOF و AOB، داریم:

$$AF = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + x^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}x$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (3x)^2} = \frac{\sqrt{45}}{2}x = \frac{3\sqrt{5}}{2}x$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}x}{\frac{3\sqrt{5}}{2}x} = \frac{\sqrt{65}}{15}$$

از نقطه G دو خط به موازات AB و AC رسم می کنیم تا BC را در B' و C' قطع کنند. می دانیم $AG = 2GM$ ؛ حال داریم:

تالس: $\frac{MB'}{B'B} = \frac{MG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MB' = y, B'B = 2y$

نقطه M وسط BC است، پس $MC = MB = 3y$ و به کمک قضیه تالس در مثلث MAC نتیجه می گیریم $MC' = y$ و $C'C = 2y$ ؛ حال با فرض $DC = z$ داریم:

$$\begin{aligned} \triangle DFB: GB' \parallel FB &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DG}{GF} = \frac{DB'}{B'B} \\ \Rightarrow \frac{DG}{\frac{4y+z}{2y}} &\Rightarrow \frac{DG}{4} = 2 + \frac{z}{2y} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle DGC': EC \parallel GC' &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DG}{GE} = \frac{DC'}{CC'} \\ \Rightarrow \frac{DG}{\frac{2y+z}{2y}} &\Rightarrow \frac{DG}{6} = 1 + \frac{z}{2y} \quad (***) \end{aligned}$$

پس مثلث CPB متساوی الساقین است و $CP = CB = x$. حال داریم:

$$\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(x)(h)}{(2x)(h)} = \frac{1}{4}$$

۱۷۲ از B و P به ترتیب بر AB و AP عمود می کنیم. مطابق شکل، داریم:

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PH' \Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (*)$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AP \cdot BH \Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}S_{AMNP} \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow S_{ABCD} = S_{AMNP}$$

۱۷۳ (۱) قطرهای لوزی، عمودمنصف یکدیگرند. (۲) مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند (مانند لوزی یا کایت)، نصف حاصل ضرب دو قطر آن است.

محل برخورد قطرهای لوزی را O می نامیم، پس $OC = \frac{4}{3}$ ، $OB = 8$ و داریم:

$$\begin{aligned} \triangle OBC: \text{فیثاغورس} &\Rightarrow BC = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{24}{3}\right)^2} = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

می دانیم لوزی، نوعی متوازی الاضلاع است؛ بنابراین:

$$S_{ABCD} = BC \cdot AH = \frac{25}{3}AH \quad (*)$$

از طرف دیگر، مساحت لوزی، نصف حاصل ضرب دو قطر آن است؛

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}\right)(16) \xrightarrow{(*)} \frac{25}{3}AH = \frac{112}{3} \\ \Rightarrow 25AH &= 112 \Rightarrow AH = \frac{112}{25} = \frac{448}{100} = 4/48 \end{aligned}$$

(مشابه ریاضی ۱۳۰۲ خارج)

۱۷۴

میانه های وارد بر AC و AB را BN و CP می نامیم. می دانیم میانه های مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می کنند؛ بنابراین:

$$BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}(36) = 24 \quad CG = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}(10/5) = 7$$

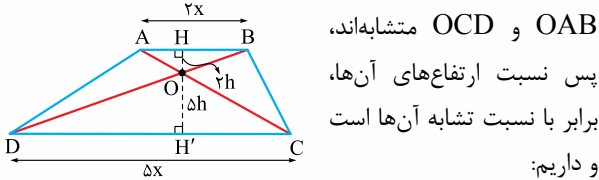
$$\begin{aligned} BG^2 + CG^2 &= 576 + 49 = 625 = 25^2 \\ \Rightarrow BG^2 + CG^2 &= BC^2 \xrightarrow{\text{عکس فیثاغورس}} \widehat{BGC} = 90^\circ \\ \Rightarrow S_{\triangle BGC} &= \frac{1}{2}(7 \times 24) = 84 \end{aligned}$$

$$\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle OAB}} = \left(\frac{\Delta}{\gamma}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow S_{\triangle OCD} = 25S, S_{\triangle OAB} = 4S$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC} = \sqrt{(25S)(4S)} = 10S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle OCD}} = \frac{49S}{25S} = \frac{49}{25} \times \frac{4}{100} = 1/96$$

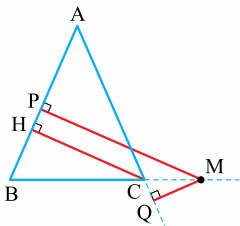
روشن دوم: فرض می کنیم $AB = 2x$ و $DC = \Delta x$. مثلث های



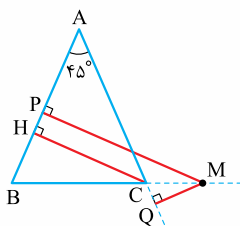
$$\frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{\Delta} \Rightarrow OH = \gamma h, OH' = \Delta h$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle OCD}} = \frac{\frac{1}{2}(\Delta x + 2x)(\gamma h)}{\frac{1}{2}(\Delta x)(\Delta h)} = \frac{49}{25} = 1/96$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)



تفاضل فواصل هر نقطه
واقع بر قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ساق، برابر است با ارتفاع وارد بر ساق مثلث.
 $AB = AC \Rightarrow MP - MQ = CH$



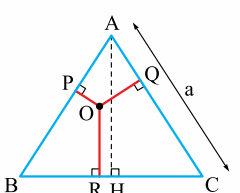
طبق نکته فوق، $MP - MQ = CH$ ، و از مقایسه این رابطه با فرض سؤال، نتیجه می شود $CH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$. حال داریم:

$$\frac{\triangle AHC}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

$$\frac{\triangle ABC}{AB = AC} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{\frac{135^\circ}{2}}{45^\circ} = \frac{3}{2}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)



مجموع فواصل هر نقطه
درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع، برابر است با ارتفاع مثلث.

$$OP + OQ + OR = AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

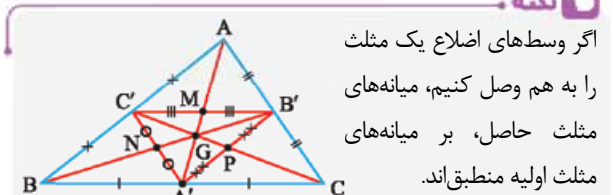
$$(*) \Rightarrow \frac{DG}{4} - \frac{DG}{6} = 1 \Rightarrow \frac{1}{12} DG = 1$$

$$\Rightarrow DG = 12 \Rightarrow DE + EG = 12 \xrightarrow{EG=6} DE = 6$$

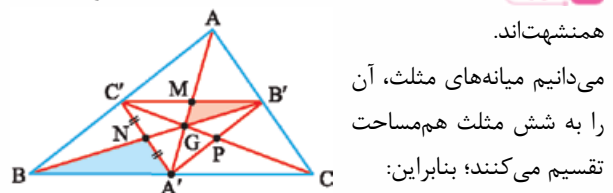
توجه در حالت کلی، در شکل صفحه قبلی داریم:

$$\frac{1}{GF} = \frac{1}{GE} + \frac{1}{GD}$$

۱۷۷



توجه مثلث های $AB'C'$ و $CA'B'$ ، $BC'A'$ ، $A'B'C'$ همنشئت اند.



$$S_{\triangle GMB'} = \frac{1}{6} S_{\triangle A'B'C'} (*)$$

از طرف دیگر، BN میانه مثلث $BC'A'$ است؛ بنابراین:

$$S_{\triangle BNA'} = \frac{1}{2} S_{\triangle BC'A'} \Rightarrow S_{\triangle BNA'} = \frac{1}{2} S_{\triangle A'B'C'} (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow \frac{S_{\triangle GMB'}}{S_{\triangle BNA'}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

۱۷۸

در دوزنقه ABCD که $AB \parallel DC$ و قطرهای O متقاطع اند، داریم:

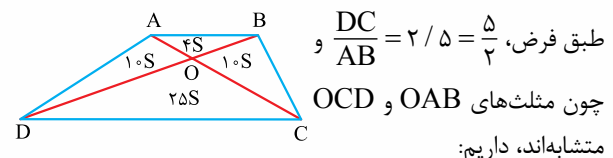
۱ مثلث های محدود به قطرهای O یک ساق، هم مساحت اند (قضیه شبه پروانه).

$$S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC} = S$$

۲ مثلث های محدود به قطرهای O یک قاعده، متشابه اند.

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

۳ مساحت هر یک از مثلث های محدود به قطرهای O یک ساق، میانگین هندسی مساحت مثلث های محدود به قطرهای O قاعده ها است.
 $S^2 = S_1 S_2$



$$\frac{DC}{AB} = \frac{2}{5} = \frac{5}{25}$$

چون مثلث های OAB و OCD متشابه اند، داریم:



توجه ۱ هر دو زاویه $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ متمم زاویه C می باشند، پس با هم برابرند و $\hat{A}_1 = \hat{B} = 31^\circ$.

۱۸۴ طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع را a فرض می کنیم،

پس محیط آن و محیط لوزی برابر $3a$ است؛ در نتیجه طول ضلع لوزی، $\frac{3}{4}a$ است و داریم:

$$\begin{aligned} \triangle AHB: \hat{H} = 90^\circ, \hat{A} = 30^\circ \\ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{8}a \\ \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{AD \times BH}{\frac{MN^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{(\frac{3}{4}a)(\frac{3}{8}a)}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{9}{8\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

۱۸۵ طول ضلع مربع را x فرض کرده و دو حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱ یک ضلع مربع، منطبق بر وتر مثلث باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \triangle MNB: \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow MB = \sqrt{2}x \\ \triangle AQM: \hat{Q}_1 = 45^\circ \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ \frac{AB}{MN} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2})x}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

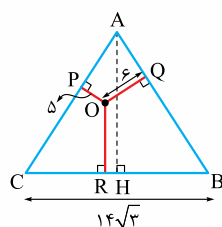
حالت ۲ دو ضلع مربع، منطبق بر اضلاع قائمه مثلث باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \triangle MBN: \hat{B} = \hat{N}_1 = 45^\circ \\ \Rightarrow MB = MN = x \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{2x}{x} = 2 \\ \text{چون } 2 > \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ حداکثر نسبت طول ضلع قائمه مثلث به ضلع مربع،} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ است.} \end{aligned}$$

۱۸۶ قطر BD از مستطیل را رسم می کنیم تا AC را در O قطع کند. چون قطرهاى مستطیل، یکدیگر را نصف می کنند، O وسط

BD است و چون OA با قاعده های دوزنقه $MDBN$ موازی است، میان خط دوزنقه است؛ در نتیجه $OA = \frac{BN + DM}{2} = \frac{5}{2}$ و چون قطرهاى مستطیل، برابرند، $BD = 2OA = 5$. حال با رسم عمود BH بر DM ، داریم:

$$\begin{aligned} \triangle BHD: \Rightarrow HB^2 + 1^2 = 5^2 \Rightarrow HB = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \xrightarrow{\text{مستطیل } MNBH} MN = HB = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$



با توجه به نکته فوق، داریم:

$$\begin{aligned} OP + OQ + OR &= AH \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(14\sqrt{3}) \\ &\Rightarrow 5 + 6 + OR = 21 \\ &\Rightarrow OR = 10. \end{aligned}$$

آزمون ۱۹

۱۸۱ طبق فرض، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-2)}{2} - n = 52 \Rightarrow \frac{n^2 - 5n}{2} = 52 \\ \Rightarrow n^2 - 5n - 104 = 0 \Rightarrow \xrightarrow{n>} n = 13 (*) \\ \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{n-2}{2} (*) = 5/5 \end{aligned}$$

۱۸۲ فرض کنیم هر یک از قطرهای چهارضلعی $ABCD$ مساحت آن را نصف می کنند؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \\ S_2 + S_3 = S_1 + S_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = S_3 \\ S_2 = S_4 \end{cases} \\ \Rightarrow S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC} \Rightarrow \frac{1}{2}DC \cdot AH = \frac{1}{2}DC \cdot BH' \\ \Rightarrow AH = BH' \Rightarrow AB \parallel DC \end{aligned}$$

به روش مشابه، از برابری مساحت مثلث های BAD و CAD نتیجه می گیریم $AD \parallel BC$ ؛ پس چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع و درست است. **۱**

حال دوزنقه متساوی الساقین زیر را در نظر می گیریم. در این دوزنقه $AD = BC$ و $AB \parallel DC$ ، اما این چهارضلعی، دوزنقه نیست (مثال نقض **۲**). از طرف دیگر، $AB \parallel DC$ و $AC = BD$ ؛ پس هم غلط است و چون $AD = BC$ و هم غلط است. **۲**



۱۸۳ طبق فرض، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر مثلث،

28° است، یعنی $\hat{A}_2 = 28^\circ$ و در نتیجه $\hat{M}_1 = 62^\circ$. می دانیم میانه وارد بر وتر، نصف وتر است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} MA = MB \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} (*) \\ \triangle MAB: \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A}_2 + \hat{B} \text{ است.} \\ \xrightarrow{(*)} 62^\circ = 2\hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = 31^\circ \\ \hat{A}_1 = 90^\circ - (\hat{A}_2 + \hat{A}_3) = 90^\circ - (28^\circ + 31^\circ) = 31^\circ \end{aligned}$$

$$O'M = R\sqrt{2} \rightarrow 4 = 4R^2 - 2R^2 \Rightarrow 2R^2 = 4$$

$$\Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2} (*)$$

عمود O'H را بر AB رسم می‌کنیم. پس چهارضلعی OO'HM مربع است و $HM = R$. حال طبق قضیه فیثاغورس در مثلث

$$BH = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3}R \quad \text{داریم: } O'HB$$

$$MB = R + \sqrt{3}R \stackrel{(*)}{=} \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

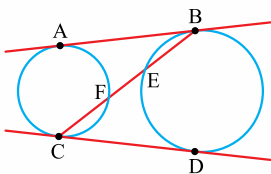


پس از یافتن $O'M = R\sqrt{2}$ ، می‌توان $O'M$ را از طرفین امتداد داد تا دایره C' را در N و P قطع کند که در این صورت، $MN = 2R - R\sqrt{2}$ و مقدار R از رابطه طولی زیر به دست می‌آید:

$$MN \cdot MP = MA \cdot MB$$

$$\Rightarrow (2R - R\sqrt{2})(2R + R\sqrt{2}) = 4$$

$$\Rightarrow 2R^2 = 4 \Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$$



۲۹۲ AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دو دایره‌اند؛ پس

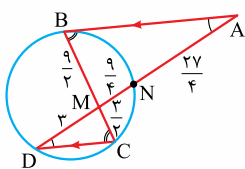
هم‌اندازه‌اند. حال طبق روابط طولی در دایره‌ها، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BA^2 = BF \cdot BC \\ CD^2 = CE \cdot CB \end{array} \right\} \xrightarrow{BA=CD} BF \cdot BC = CE \cdot CB$$

$$\Rightarrow BF = CE \Rightarrow BE + EF = CF + EF \Rightarrow BE = CF$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = 1$$

۲۹۳ طبق روابط طولی در دایره داریم:



$$MD \cdot MN = MB \cdot MC$$

$$\Rightarrow 2MN = \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow MN = \frac{9}{4}$$

از توازی AB و CD نتیجه می‌گیریم:

$$(\hat{A} = \hat{D}), (\hat{B} = \hat{C}) \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MDC$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{MA}{3} = \frac{2}{\frac{3}{2}} \Rightarrow MA = 4$$

$$\Rightarrow AN + NM = 9 \xrightarrow{MN=\frac{9}{4}} AN = \frac{27}{4}$$

از مماس بودن AB بر دایره، نتیجه می‌گیریم:

$$AB^2 = AN \cdot AD \Rightarrow AB^2 = \frac{27}{4} \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + 3 \right) = 81$$

$$\Rightarrow AB = 9$$

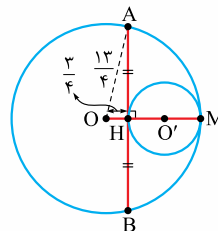
$$S_1 = S_{\triangle ABC} - 2S_{\text{قطاع } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - 2\left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\right)(\pi r^2)$$

$$\Rightarrow S_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)r^2$$

$$S_2 = S_{\triangle A'B'T} - 2S_{\text{قطاع } 90^\circ} = (2r)(r) - 2\left(\frac{90^\circ}{360^\circ}\right)(\pi r^2)$$

$$\Rightarrow S_2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)r^2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)r^2}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)r^2} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{4 - \pi}$$



۲۹۰ شعاع دایره بزرگ

را R و شعاع دایره کوچک را R'

فرض می‌کنیم. چون دایره‌ها

مماس داخل‌اند، $OO' = R - R'$ ؛

پس $R - R' = 2$ حال داریم:

$$\text{مساحت ناحیه بین دایره‌ها} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 9\pi$$

$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 9 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 9$$

$$\Rightarrow R + R' = \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} R - R' = 2 \\ R + R' = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{13}{4}, R' = \frac{5}{4}$$

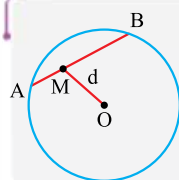
$$OH = OM - HM = R - 2R' = \frac{13}{4} - \frac{10}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle OHA \Rightarrow AH = \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$$

آزمون ۳۰

۲۹۱



نقطه M درون دایره $C(O, R)$ مفروض

است. به ازای هر وتر دلخواه AB گذرنده از

M داریم:

$$MA \cdot MB = R^2 - OM^2$$

شعاع دایره C را R فرض می‌کنیم؛ پس شعاع دایره C' برابر $2R$ است. حال چون AB بر دایره C مماس است، $OM \perp AB$ و چون

$QO' \parallel AB$ ، OM بر QO' هم عمود

است؛ پس مثلث $O'OM$ قائم‌الزاویه

متساوی‌الساقین است و $O'M = R\sqrt{2}$.

از طرف دیگر، طبق نکته فوق داریم:

$$MA \cdot MB = (2R)^2 - O'M^2$$



(مشابه ریاضی ۱۴۰۱ فارغ و تمرین کتاب درسی)

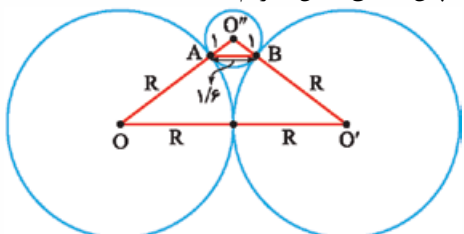
۲۹۶

اگر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $2\sqrt{RR'}$ است.

شعاع دایره‌ها را R و R' که $R' = 3R$ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها را x فرض می‌کنیم. طبق یادآوری فوق، داریم:

$$x = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}R'\right)R'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R' \Rightarrow \frac{x}{R'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

شعاع دایره‌های همنهشت را R فرض می‌کنیم. می‌دانیم مرکزها و نقطه تماس دایره‌های مماس خارج، در یک امتدادند؛ پس مطابق شکل، داریم:

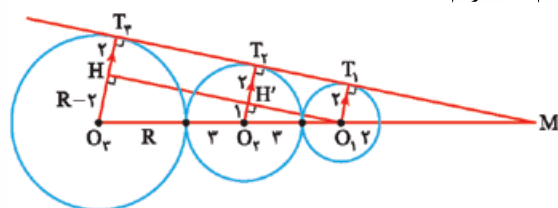


$$\begin{aligned} \triangle OO'A &\sim \triangle OO'B \quad \text{عکس تالس} \Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{O'A}{O'B} \Rightarrow \frac{AO}{O'A} = \frac{BO}{O'B} \Rightarrow \frac{1}{1+R} = \frac{1/6}{2R} \\ \Rightarrow 2R &= 1/6 + 1/6R \Rightarrow 12R = 1 + R \Rightarrow 11R = 1 \Rightarrow R = 1/11 \end{aligned}$$

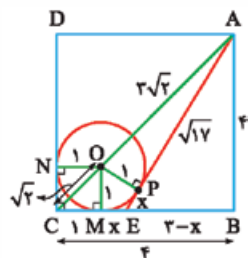
مماس مشترک داخلی دایره‌ها را رسم می‌کنیم تا مماس مشترک خارجی آن‌ها را در P قطع کند. می‌دانیم مماس‌هایی که از یک نقطه به یک دایره رسم می‌شوند، هم‌اندازه‌اند؛ در نتیجه:

$$\begin{aligned} (PT = PA), (PT' = PA) &\Rightarrow PT = PT' = PA \\ \text{پس در مثلث } ATT' &\text{ طول میانه } TT' \text{ وارد بر } TT' \text{ (یعنی } AP \text{)، نصف این ضلع است. در نتیجه این مثلث، قائم‌الزاویه است (} \angle TAT' = 90^\circ \text{).} \\ \text{حال داریم: } (\hat{M} = \frac{1}{2}\widehat{AT}), (\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{AT}) &\Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 \\ \hat{N} = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{M} + \hat{N} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ &\Rightarrow \text{به روش مشابه} \end{aligned}$$

شعاع دایره بزرگ را R فرض کرده و از مرکز دایره کوچک، بر O_1T_3 عمود می‌کشیم. طبق قضیه تالس در مثلث O_1HO_3 ، داریم:



$$\begin{aligned} \frac{H'O_2}{HO_3} &= \frac{O_1O_2}{O_1O_3} \Rightarrow \frac{1}{R-r} = \frac{5}{R+8} \\ \Rightarrow 5R - 10 &= R + 8 \Rightarrow 4R = 18 \Rightarrow R = 4.5 \end{aligned}$$



از مرکز دایره بر CB و CD عمود می‌کشیم.

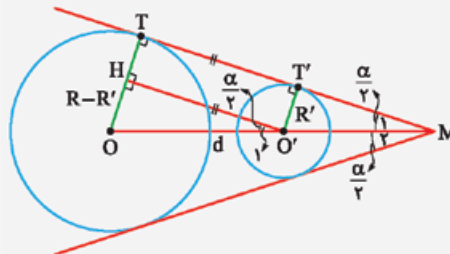
چهارضلعی $OMCN$ مربع است (چرا؟)؛ پس CO نیمساز زاویه C است. در نتیجه O روی قطر AC قرار دارد. ضمناً $OC = \sqrt{2}OM = \sqrt{2}r$

و $AO = 3\sqrt{2}r$ ؛ پس $AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$ و EM و EP بر دایره مماس‌اند، هم‌اندازه‌اند که اندازه آن‌ها را x فرض می‌کنیم؛ حال داریم:

$$\begin{aligned} \triangle APO &\Rightarrow AP = \sqrt{(3\sqrt{2}r)^2 - 1^2} = \sqrt{17} \\ \triangle ABE &\Rightarrow AE^2 = AB^2 + BE^2 \\ \Rightarrow (x + \sqrt{17})^2 &= 4^2 + (3-x)^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{17}x + 17 &= 16 + 9 - 6x + x^2 \\ \Rightarrow 2(\sqrt{17} + 3)x &= 8 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{17} + 3} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \\ BE &= 3 - x = 3 - \frac{\sqrt{17} - 3}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

۲۹۵

دایره‌های $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ که $OO' = d$ و $R > R'$ مفروض‌اند.

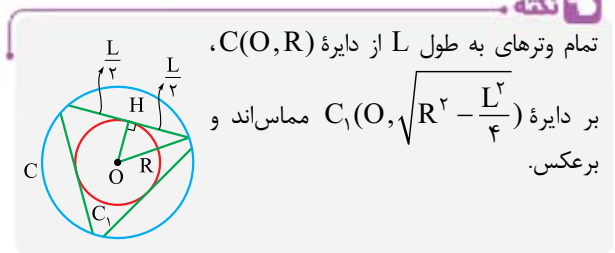


اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی را α و زاویه بین مماس مشترک‌های داخلی را β بنامیم، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{R - R'}{d}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R - R'}{TT'} \\ \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{R + R'}{d}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{R + R'}{TT'} \end{aligned}$$

طبق نکته فوق، داریم:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \\ \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\beta}{2} = 45^\circ \\ \Rightarrow \beta &= 90^\circ \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{90^\circ}{60^\circ} = 1.5 \end{aligned}$$



تمام وترهای به طول L از دایره $C(O, R)$ بر دایره $C_1(O, \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}})$ مماس اند و برعکس.

طبق نکته فوق، تمام وترهای به طول $4\sqrt{3}$ واحد از دایره $C(O, 8)$ بر دایره $C_1(O, 6)$ مماس اند؛ پس وترهایی به طول $4\sqrt{3}$ واحد که بر دایره C' هم مماس باشند، مماس مشترک‌های دایره‌های C_1 و C' می‌باشند. حال چون سه وتر با این شرایط وجود دارند، دایره‌های C_1 و C' سه مماس مشترک دارند، در نتیجه مماس خارج‌اند و مطابق شکل، داریم:

$$6 + 2R' = 8 \Rightarrow 2R' = 2 \Rightarrow R' = 1$$

آزمون ۳۱



طول ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ می‌باشند.

روش اول: می‌دانیم $r = \frac{S}{p}$ و $r_a = \frac{S}{p-a}$ حال داریم:

$$2p = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \Rightarrow p = 6\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(16 \times 3) = 12\sqrt{3}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 2$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 6$$

$$\Rightarrow r + r_a = 2 + 6 = 8$$

روش دوم: مثلث‌های I_aBC و ABC همنهشت‌اند (چرا؟) پس $I_aH = AH$ یعنی $IH = \frac{1}{3}AH$ از طرف دیگر، $r_a = AH$ یعنی $r = \frac{1}{3}AH$ و در نتیجه:

$$r + r_a = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(4\sqrt{3})\right) = 8$$



در مثلث دلخواه ABC داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

در مثلث ABC فرض می‌کنیم $r_a = \frac{1}{3}$ ، $r_b = \frac{1}{4}$ و $r_c = \frac{1}{5}$. طبق یادآوری فوق، داریم:

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{r} \Rightarrow 3 + 4 + 5 = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{12}$$

توجه! بدون استفاده از یادآوری هم می‌توانستیم به روش زیر، شعاع دایره محاطی را بیابیم:

$$\left. \begin{aligned} r_a = \frac{S}{p-a} \xrightarrow{r_a = \frac{1}{3}} \frac{S}{p-a} = \frac{1}{3} &\Rightarrow p-a = 3S \\ p-b = 4S &\Rightarrow p-b = 4S \\ p-c = 5S &\Rightarrow p-c = 5S \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌زنیم}} 3p - (a+b+c) = 12S \Rightarrow p = 12S$$

$$\xrightarrow{r = \frac{S}{p}} r = \frac{S}{12S} = \frac{1}{12}$$



روش اول: می‌دانیم $BM = BN$ و $CM = CP$ حال داریم:

$$\frac{CM}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow CM = 3x, MB = 2x \Rightarrow CP = 3x, BN = 2x$$

$$\frac{BN}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2x}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = \frac{3}{2}x \Rightarrow AP = \frac{4}{3}x$$

$$\text{محیط} = 38 \Rightarrow 2(2x + 3x + \frac{4}{3}x) = 38$$

$$\Rightarrow \frac{19}{3}x = 19 \Rightarrow x = 3 (*)$$

$$BC - AC = (2x + 3x) - (3x + \frac{4}{3}x) = \frac{2}{3}x \stackrel{(*)}{=} 2$$

روش دوم: می‌دانیم $BM = BN = p - b$ ، $AN = AP = p - a$ و $CM = CP = p - c$ حال داریم:

$$\frac{CM}{MB} = \frac{BN}{AN} \Rightarrow \frac{p-c}{p-b} = \frac{p-b}{p-a} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{19-c}{19-b} = \frac{19-b}{19-a} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{a+b+c=38} \begin{cases} 3b-2c=19 \\ 3a-2b=19 \\ a+b+c=38 \end{cases}$$

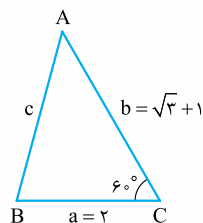
$$\Rightarrow a=15, b=13 \Rightarrow a-b=2$$



آزمون ۴۴

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۳۱



طبق قضیه کسینوس ها، داریم:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow c^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + 4 - 2(\sqrt{3} + 1)(2)(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow c^2 = 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

حال طبق قضیه سینوس ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{2}{\sin \hat{A}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\hat{A} = 45^\circ) \text{ یا } (\hat{A} = 135^\circ)$$

اگر $\hat{A} = 135^\circ$ ، مجموع زوایای داخلی مثلث از 180° بیشتر می شود؛ پس $\hat{A} = 45^\circ$.

طبق فرض، داریم:

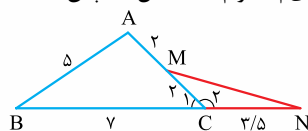
$$\frac{b^2 + c^2}{b + c} = a^2 \Rightarrow \frac{(b + c)(b^2 + c^2 - bc)}{b + c} = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (*)$$

از طرف دیگر، طبق قضیه کسینوس ها، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \xrightarrow{(*)} -2bc \cos \hat{A} = -bc$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$$

مطابق شکل، زوایای C_1 و C_2 مکمل اند؛ پس:

$$\cos \hat{C}_2 = -\cos \hat{C}_1$$

حال به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث ABC، و سپس به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث MNC، طول MN را می یابیم:

$$\Delta ABC: AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C}_1$$

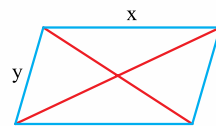
$$\Rightarrow 25 = 16 + 49 - 2(4)(7) \cos \hat{C}_1 \Rightarrow \cos \hat{C}_1 = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{C}_2 = -\frac{5}{7}$$

$$\Delta MNC: MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \cdot CN \cdot \cos \hat{C}_2$$

$$\Rightarrow MN^2 = 4 + \frac{49}{4} - 2(2)(\frac{7}{2})(-\frac{5}{7}) = \frac{105}{4}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{\sqrt{105}}{2}$$



طول اضلاع متوازی الاضلاع را X و Y در نظر می گیریم. طبق نکته صفحه قبل، داریم:

$$2x^2 + 2y^2 = 5^2 + (\sqrt{15})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20 \quad (*)$$

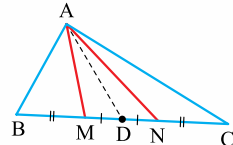
$$\text{محیط متوازی الاضلاع} = 12 \Rightarrow x + y = 6$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = 6^2 \Rightarrow (x^2 + y^2) + 2xy = 36$$

$$\xrightarrow{(*)} 20 + 2xy = 36 \Rightarrow xy = 8 \quad (**)$$

از روابط (*) و (**) نتیجه می گیریم X و Y ریشه های معادله $x^2 - 6x + 8 = 0$ می باشند. در نتیجه $x = 4$ ، $y = 2$ و $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

فرض کنیم D وسط MN است؛ پس D وسط BC

هم می باشد و AD میانه وارد بر وتر مثلث ABC است؛ در نتیجه $AD = \frac{1}{2} BC$. حال طبق فرمول طول میانه در مثلث AMN، داریم:

$$AM^2 + AN^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}MN^2$$

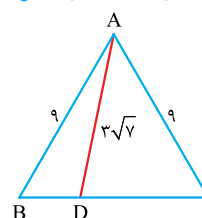
$$\Rightarrow AM^2 + AN^2 = 2(\frac{1}{2}BC)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}BC)^2 = \frac{5}{9}BC^2$$

$$\Rightarrow \frac{AM^2 + AN^2}{BC^2} = \frac{5}{9}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۲۹

طبق قضیه استوارت، داریم:



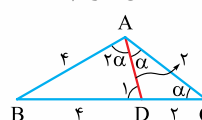
$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD$$

$$= BC(AD^2 + BD \cdot CD)$$

$$\Rightarrow 81BD + 81CD = 9(63 + BD \cdot CD)$$

$$\Rightarrow 81(BD + CD) = 9(63 + BD \cdot CD)$$

$$\Rightarrow 81 = 63 + BD \cdot CD \Rightarrow BD \cdot CD = 18$$

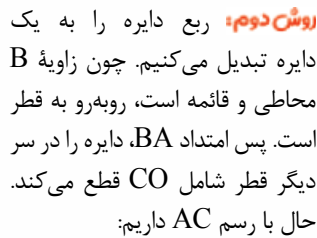
فرض کنیم $\hat{C} = \alpha$ ؛ پس $\hat{A} = 3\alpha$. پاره خط ADرا چنان رسم می کنیم که $\hat{A}_1 = \alpha$ و $\hat{A}_2 = 2\alpha$. حال داریم:

$$\hat{D}_1 = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_2$$

پس مثلث ABD متساوی الساقین است و $BD = AB = 4$ ، در نتیجه $DC = 6 - 4 = 2$. از طرف دیگر، مثلث DAC هم متساوی الساقیناست؛ پس $AD = DC = 2$ و طبق قضیه استوارت در مثلث ABC، داریم:

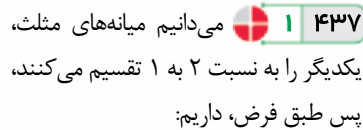
$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BC(AD^2 + BD \cdot CD) \Rightarrow (16)(2) + 4AC^2 = 6(4 + 8) \Rightarrow 32 + 4AC^2 = 72$$

$$\Rightarrow AC^2 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$



است CC' عمود منصف $OA \Rightarrow AC' = AC = AC = 25$

$$\Delta \text{AOC} : \text{فيثاغورس} \Rightarrow \text{OA} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$$



حال طبق فرمول میانه در مثلث GBC، داریم:

$$\Rightarrow CG^r = 49 \Rightarrow CG = 7, \quad FG = \frac{CG}{r} = \frac{7}{7} = 1/\Delta$$

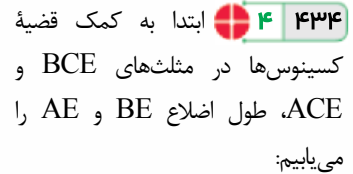
$$\left. \begin{aligned} AB^{\gamma} + AD^{\gamma} &= \gamma AN^{\gamma} + \frac{BD^{\gamma}}{\gamma} \\ CB^{\gamma} + CD^{\gamma} &= \gamma CN^{\gamma} + \frac{BD^{\gamma}}{\gamma} \end{aligned} \right\}$$

پارہ خط MN میانہ مثلث NAC است، بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در رابطه (*)}} AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2$$

توجه به همین ترتیب، ثابت می‌شود اگر M و N وسط‌های قطره‌ای چهارضلعی $ABCD$ باشند، آن‌گاه:

نتیجه ✓ یک چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است، اگر و تنها اگر مجموع مربعات اضلاع آن، برابر با مجموع مربعات اقطار آن باشد.

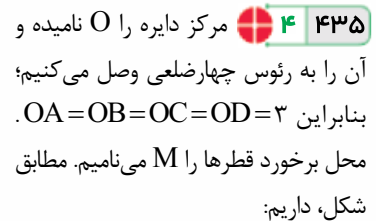


$$\Rightarrow BE^r = 25 + 9 - 2(5)(3)\left(-\frac{1}{4}\right) = 49 \Rightarrow BE = 7$$

$$\Rightarrow AE^r = 25 + 9 - 2(5)(3)\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow AE = \sqrt{19}$$

حال طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABE داریم:

$$\Rightarrow 19 = 25 + 49 - 2(\Delta)(7)\cos(\hat{A}BE) \Rightarrow \cos(\hat{A}BE) = \frac{11}{14}$$



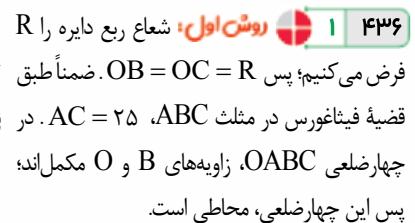
$$\Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ \quad (*)$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث AOB داریم:

$$\Rightarrow \cos \hat{O}_1 = \frac{1}{9} \xrightarrow{(*)} \cos \hat{O}_7 = -\frac{1}{9}$$

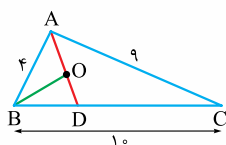
طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث COD، داریم:

$$\Rightarrow CD^r = 9 + 9 - 2(r)(r)(-\frac{1}{9}) = 20 \Rightarrow CD = 2\sqrt{5}$$



$$\Rightarrow r_f = r_R - r_R \left(\frac{Y}{r_A} \right) \Rightarrow r_f = r_R \left(\frac{1}{r_A} \right)$$

$$\overset{\Delta}{\text{OAC}}: \Rightarrow \overset{5}{\text{OA}} = \sqrt{\text{AC}^2 - \text{OC}^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$



۱۴۴۲ روش اول: طبق قضیه نیمساز در مثلث ABC، داریم:

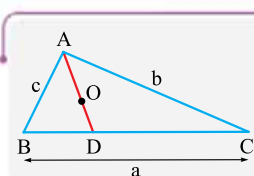
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{BD+CD} = \frac{4}{13} \Rightarrow BD = \frac{40}{13}$$

BO در مثلث ABD نیمساز است؛ بنابراین:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{BD} = \frac{13}{\frac{40}{13}} = \frac{169}{40} \Rightarrow \frac{AO+OD}{OD} = \frac{209}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{OD} = \frac{209}{40}$$

روش دوم:



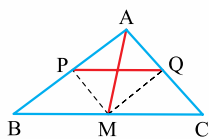
در مثلث ABC اگر O محل هم‌رسمی نیمسازها باشد، آن‌گاه:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{b+c}{a}$$

طبق نکته فوق، داریم:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{4+9}{10} = \frac{13}{10} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AD}{OD} = \frac{23}{10}$$

(مشابه ریاضی ۹۸ داخل و تمرین کتاب درسی)



طبق فرض، داریم:

$$\Delta AMB: MP \text{ نیمساز است.} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AP}{BP} (*)$$

$$\Delta AMC: MQ \text{ نیمساز است.} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{CQ}$$

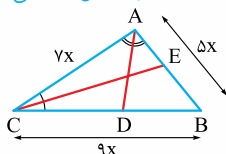
$$\xrightarrow{MB=MC} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{2}$$

پس نقطه P وسط AB است؛ بنابراین در مثلث AMB، پاره خط MP هم نیمساز و هم میانه است. در نتیجه این مثلث، متساوی الساقین است، یعنی $AM = MB$. به روش مشابه، $AM = MC$ ؛ پس در مثلث ABC میانه وارد بر BC، نصف این ضلع است. در نتیجه این مثلث، قائم‌الزاویه است و داریم:

$$\Rightarrow \frac{AM^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{AM^2}{BC^2} = \frac{(\frac{1}{2}BC)^2}{BC^2} = \frac{1}{4}$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۱ خارج)

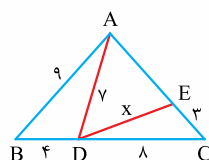


با فرض $AB = 5x$ ، $AC = 7x$ و $BC = 9x$ ، داریم:

$$AD \text{ نیمساز } \hat{A} \text{ است.} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{5}{5+7} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{5}{12} (*)$$

(مشابه ریاضی ۹۹ و تمرین کتاب درسی)



طبق قضیه استوارت در مثلث ABC، داریم:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BC(AD^2 + BD \cdot CD)$$

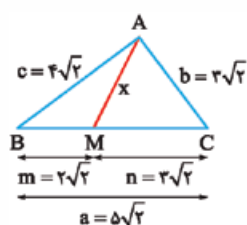
$$\Rightarrow (13)^2(8) + 13^2(4) = 13(10^2 + 4 \cdot 9) \Rightarrow (13)(2) + AC^2 = (13)(3) \Rightarrow AC^2 = 13 \Rightarrow AC = 4 \Rightarrow AE = 6$$

طبق قضیه استوارت در مثلث ACD، داریم:

$$AD^2 \cdot CE + CD^2 \cdot AE = AC(DE^2 + AE \cdot CE) \Rightarrow (4^2)(3) + (6^2)(6) = 4(x^2 + 18)$$

$$\Rightarrow 49 + 128 = 4x^2 + 54 \Rightarrow x = \sqrt{41}$$

۱۴۴۰ اولاً چون ΔABC قائم‌الزاویه است، داریم:



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5\sqrt{2}$
حال چون محیط مثلث‌های ABM و ACM یکسان است، داریم:

$$AB + BM + AM = AC + CM + AM$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2} + BM = 3\sqrt{2} + CM \Rightarrow CM - BM = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CM - BM = \sqrt{2} \\ CM + BM = 5\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CM = 3\sqrt{2} \\ BM = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Delta ABC: \text{قضیه استوارت} \Rightarrow a(x^2 + mn) = mb^2 + nc^2$$

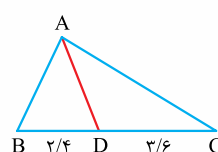
$$\Rightarrow 5\sqrt{2}(x^2 + 12) = 2\sqrt{2}(18) + 3\sqrt{2}(32)$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{2}(x^2 + 12) = 132\sqrt{2} \Rightarrow 5x^2 + 60 = 132$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{132}{5} = 26.4 \Rightarrow x = \sqrt{26.4}$$

آزمون ۴۵

(مشابه تمرین کتاب درسی)



فرض کنیم AD نیمساز زاویه A است.

طبق قضیه نیمساز، داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{2/4}{3/6} = \frac{2}{3} \Rightarrow (AB = 2x), (AC = 3x)$$

$$(محیط مثلث) = 26 \Rightarrow 2x + 3x + (2/4 + 3/6) = 26$$

$$\Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow AB = 8, AC = 12$$

پس AC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.



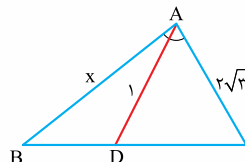
$$\Rightarrow 4CD + 16BD = 12BD + 12CD \Rightarrow 4BD = 8CD$$

$$\Rightarrow BD = 2CD \xrightarrow{(*)} 2CD \cdot CD = 3$$

$$\Rightarrow CD^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{6}$$

$$BD - CD = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1.5}$$

۵۳۹ ۳ فرض کنیم $AB = x$. پس $AC = 2\sqrt{3} - x$ و داریم:



$$AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}}{AB + AC}$$

$$\xrightarrow{\hat{A}=60^\circ} 1 = \frac{2(x)(2\sqrt{3}-x)(\frac{\sqrt{3}}{2})}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 1 = \frac{x(2\sqrt{3}-x)}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = 2\sqrt{3}x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{x>0} x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3-2}}{1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 1$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)(\sin \hat{A})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}(2)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۴۰ ۱ چون M وسط EF است،
زاویه‌های محاطی A_1 و A_2 برابرند. در
نتیجه AM نیمساز $\hat{A}$ است و داریم:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} (*)$$

حال طبق روابط طولی در دایره، داریم:

$$\left. \begin{aligned} BE \cdot BA &= BM^2 \\ CF \cdot CA &= CM^2 \end{aligned} \right\}$$

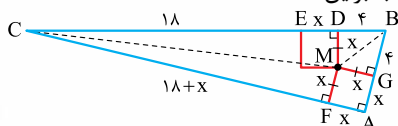
برهم تقسیم می‌کنیم.

$$\xrightarrow{(*)} \left(\frac{BE}{CF}\right)\left(\frac{BA}{CA}\right) = \left(\frac{BM}{CM}\right)^2$$

$$\xrightarrow{(*)} \left(\frac{BE}{CF}\right)\left(\frac{BM}{MC}\right) = \left(\frac{BM}{CM}\right)^2 \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{BM}{CM}$$

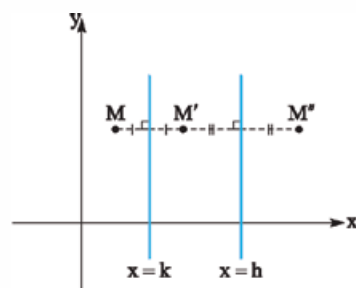
آزمون ۵۵

۵۴۱ ۱ طبق فرض، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. ضلع مربع‌ها را x فرض می‌کنیم. چون مربع‌ها همنهشت‌اند، نقطه M از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله بوده و در نتیجه محل هم‌رسی نیمسازهای مثلث است؛ بنابراین:



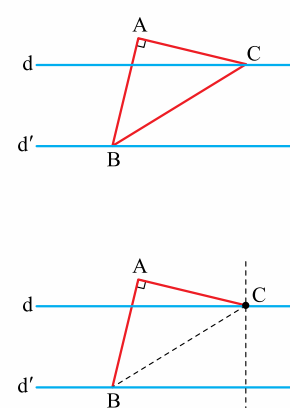
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۳۵ ۲ می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی و به فاصله m از یکدیگر، یک انتقال است با برداری به طول $2m$. طبق فرض، فاصله محورهای بازتاب $|k-h|$ است، پس فاصله نقاط M و M'' برابر $2|k-h|$ است.

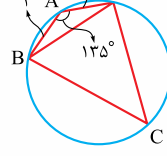


(مشابه ریاضی ۹۸ دافن)

۵۳۶ ۳ فرض کنیم مثلث ABC جواب مسئله است، پس نقطه C دوران یافته B حول A با زاویه 90° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بوده و روش رسم، به صورت زیر است:
خط d' را با زاویه 90° پادساعتگرد دوران می‌دهیم تا d در C قطع کند. C را با زاویه 90° حول A و در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطه B روی خط d' به دست آید.



۵۳۷ ۲ چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس زوایای مقابل، مکمل‌اند و داریم:



$$\hat{B}AD + \hat{B}CD = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}AD = 3\hat{B}CD} 4\hat{B}CD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}CD = 45^\circ \Rightarrow \hat{B}AD = 135^\circ$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD ، داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \hat{B}AD$$

$$\Rightarrow BD^2 = 4 + 2 - 2(2)(\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 \Rightarrow BD = \sqrt{10}$$

اگر شعاع دایره برابر R باشد، طبق قضیه سینوس‌ها، داریم:

$$\frac{BD}{\sin \hat{B}AD} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

$$\pi R^2 = 5\pi = \text{مساحت دایره}$$

۵۳۸ ۳ اولاً طبق روابط طولی در دایره، داریم:

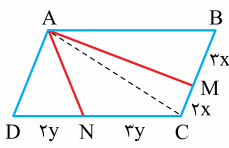
$$BD \cdot CD = AD \cdot DE \Rightarrow BD \cdot CD = 3 (*)$$

حال طبق قضیه استوارت در مثلث ABC ، داریم:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BC(AD^2 + BD \cdot CD)$$

$$\xrightarrow{(*)} 4CD + 16BD = (BD + CD)(9 + 3)$$

(مشابه تهری ۱۴۰۱ و تمرین کتاب درسی)



می دانیم اگر ارتفاع های دو مثلث، برابر باشند، نسبت مساحت های آن ها برابر است با نسبت قاعده های آن ها. حال با رسم قطر AC، داریم:

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABC}$$

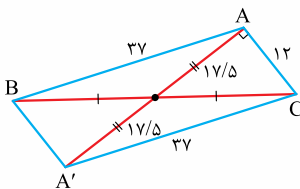
$$\Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} S_{ABCD} \right) = \frac{2}{10} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ANC} = \frac{3}{10} S_{ABCD}$$

$$S_{AMCN} = S_{\triangle AMC} + S_{\triangle ANC} = \frac{5}{10} S_{ABCD} = \frac{50}{100} S_{ABCD}$$

در مثلث ABC فرض می کنیم $AC = 12$ ، $AB = 37$

و طول میانه AM، $17/5$ واحد است. میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا نقطه A' به دست آید. در چهارضلعی $ABA'C$ قطر ها



یکدیگر را نصف کرده اند، پس این چهارضلعی، متوازی الاضلاع است. در نتیجه $CA' = AB = 37$ و در مثلث ACA' داریم:

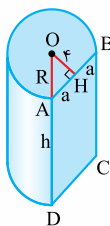
$$37^2 = 12^2 + 35^2 \xrightarrow{\text{عکس فیثاغورس}} \angle CAA' = 90^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACA'} = \frac{1}{2} (AC)(AA') = \frac{1}{2} (12)(35) = 210$$

می دانیم قطر های متوازی الاضلاع، آن را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می کنند؛ پس $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACA'} = 210$.

می توانستیم ابتدا به کمک فرمول طول میانه، طول ضلع سوم مثلث را یافته و سپس مساحت آن را به کمک دستور هرون بیابیم.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



ابتدا با رسم عمود از مرکز یک قاعده بر صفحه، داریم:

$$\begin{aligned} \triangle OAH: \text{فیثاغورس} &\Rightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2 \\ &\Rightarrow R^2 = 16 + a^2 \quad (*) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، مساحت مستطیل ABCD، 60 و حجم استوانه، 250π است؛ پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABCD} = 60 &\Rightarrow 2a \times h = 60 \Rightarrow ah = 30 \\ V_{\text{استوانه}} = 250\pi &\Rightarrow \pi R^2 h = 250\pi \Rightarrow R^2 h = 250 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{برهم تقسیم می کنیم}} \frac{a}{R^2} = \frac{3}{25} \Rightarrow R^2 = \frac{25}{3} a \quad (**)$$

از روابط (*) و (**) نتیجه می گیریم:

$$\frac{25}{3} a = 16 + a^2 \Rightarrow a = 3 \begin{cases} R = 5 \\ h = 10 \end{cases}$$

$$\text{مساحت جانبی استوانه} = 2\pi Rh = 2\pi(5)(10) = 100\pi$$

$$\triangle MDB \cong \triangle MGB \Rightarrow BG = BD = 4$$

$$\triangle MFC \cong \triangle MDC \Rightarrow CF = CD = 18 + x$$

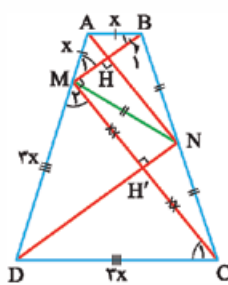
$$\triangle ABC: \text{فیثاغورس} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow (x+4)^2 + (2x+18)^2 = (x+22)^2$$

$$5x^2 + 80x + 340 = x^2 + 44x + 484 \Rightarrow 4x^2 + 36x - 144 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 3 \quad (*)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (AB)(AC) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (7)(24) = 84$$



مثلث های ABM و DCM متساوی الساقین اند؛ بنابراین:

$$\hat{M}_1 = \hat{B}_1 = \frac{18^\circ - \hat{A}}{2}$$

$$\hat{M}_2 = \hat{C}_1 = \frac{18^\circ - \hat{D}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \frac{36^\circ - (\hat{A} + \hat{D})}{2} = \frac{36^\circ - 18^\circ}{2} = 9^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$$

پس مثلث BMC قائم الزاویه و پاره خط MN، میانه وارد بر وتر آن است. در نتیجه $MN = BN = CN$ و چهارضلعی های ABNM و DCNM کایت اند؛ بنابراین AN و DN عمود منصف های BM و MC بوده و چهارضلعی MHNH' مستطیل است. حال داریم:

$$\triangle DNA : \triangle H'M \parallel NA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{MH'} = \frac{AD}{MD}$$

$$\xrightarrow{MH' = \frac{1}{2} MC} \frac{AN}{\frac{1}{2} MC} = \frac{4x}{3x} \Rightarrow \frac{AN}{MC} = \frac{2}{3}$$

به همین روش می توان ثابت کرد:

$$\frac{AB}{DC} = 2 \left(\frac{AN}{CM} \right) - 1$$

(مشابه ریاضی ۱۳۰۲ نوبت اول)

طبق فرض، داریم:

$$35 = (\text{تعداد قطر های } (n-2) \text{ ضلعی}) - (\text{تعداد قطر های } n \text{ ضلعی})$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-2)(n-5)}{2} = 35$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2 - 3n) - (n^2 - 7n + 10)}{2} = 35$$

$$\Rightarrow \frac{4n - 10}{2} = 35 \Rightarrow 2n - 5 = 35 \Rightarrow n = 20 \quad (*)$$

$$(\text{تعداد قطر های } n \text{ ضلعی}) - (\text{تعداد قطر های } (n+1) \text{ ضلعی})$$

$$\stackrel{(*)}{=} (\text{تعداد قطر های } 20 \text{ ضلعی}) - (\text{تعداد قطر های } 21 \text{ ضلعی})$$

$$= \frac{21(21-3)}{2} - \frac{20(20-3)}{2} = 189 - 170 = 19$$



۵۵۵ میانه AM را رسم می کنیم تا میانه CN را در G قطع کند. می دانیم میانه ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند، پس $AG = 2GM = 2x$ و $PG = GN = CP = 3$. میانه وارد بر وتر مثلث ABC است؛ پس $MC = MB = AM = 3x$. در مثلث MGC پاره خط MP میانه است، بنابراین:

$$2MP^2 + \frac{CG^2}{2} = MG^2 + MC^2 \Rightarrow 2(16) + \frac{36}{2} = x^2 + 9x^2$$

$$\Rightarrow 10x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow (AG = 2\sqrt{5}), (GM = \sqrt{5})$$

حال در مثلث PAM طبق قضیه استوارت، داریم:

$$AM(PG^2 + AG \cdot GM) = AG \cdot PM^2 + GM \cdot AP^2$$

$$\Rightarrow 3x(9 + 2x^2) = 2x(16) + x(AP^2)$$

$$\Rightarrow 3(9 + 2x^2) = 32 + AP^2$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{5}} 57 = 32 + AP^2 \Rightarrow AP^2 = 25 \Rightarrow AP = 5$$

آزمون ۵۶

در مثلث دلخواه ABC، با مقادیر معکوس طول ارتفاع ها می توان یک مثلث ساخت. به عبارت دیگر:

$$\left| \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

در مثلث ABC با فرض $h_a = 2$ و $h_b = 3$ ، داریم:

$$\left| \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right| < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{h_c} < \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} < h_c < 6 \Rightarrow 1\frac{1}{2} < h_c < 6$$

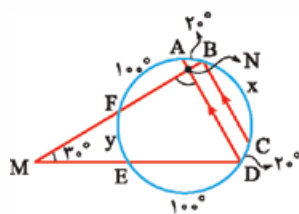
پس طول ارتفاع سوم نمی تواند $1\frac{1}{2}$ باشد.

۵۵۲ فرض کنیم $AO = OM = y$ و $BM = MC = x$. AM را امتداد می دهیم تا امتداد DC را در N قطع کند. حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CN \Rightarrow \hat{A}BM = \hat{N}CM \\ BM = CM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle NCM \text{ (زض)}$$

$$\Rightarrow (MN = MA = 2y) \text{ و } (CN = AB = z) (*)$$

(مشابه ریاضی ۱۴۱ دافل و تمرین کتاب درسی)



۵۴۷ می دانیم کمان های محصور بین دو وتر موازی، برابرند. پس $\widehat{DC} = \widehat{AB} = 20^\circ$ و چون $\widehat{CE} = 120^\circ$ ، نتیجه می گیریم $\widehat{DE} = 100^\circ$. حال با فرض $\widehat{EF} = y$ و $\widehat{BC} = x$ داریم:

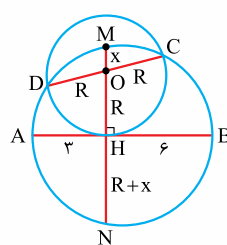
$$x + 20^\circ + 100^\circ + y + 100^\circ + 20^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + y = 120^\circ (*)$$

$$\widehat{BMD} = 20^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}((x + 20^\circ) - y) = 20^\circ \Rightarrow x + 20^\circ - y = 40^\circ$$

$$\Rightarrow x - y = 40^\circ \xrightarrow{(*)} \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80^\circ \\ y = 40^\circ \end{cases}$$

$$\widehat{MND} = \widehat{FND} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{FED}) = \frac{1}{2}(20^\circ + (y + 100^\circ))$$

$$\xrightarrow{y=40^\circ} \frac{1}{2}(160^\circ) = 80^\circ$$



۵۴۸ نیم دایره را کامل می کنیم. فرض کنیم O مرکز و شعاع R دایره کوچک است و $OM = x$. چون AB بر دایره کوچک مماس است، $OH \perp AB$ و چون AB قطر دایره بزرگ است، $HN = HM = R + x$ حال داریم:

$$HM \cdot HN = HA \cdot HB \Rightarrow (R + x)^2 = 36$$

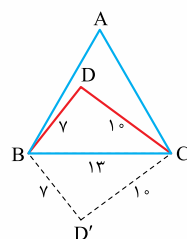
$$\Rightarrow R + x = 6 \Rightarrow x = 6 - R (*)$$

$$OM \cdot ON = OD \cdot OC \Rightarrow x(2R + x) = R^2$$

$$\xrightarrow{(*)} (6 - R)(2R + 6 - R) = R^2$$

$$\Rightarrow 36 - R^2 = R^2 \Rightarrow 2R^2 = 36 \Rightarrow R^2 = 18 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۵۴۹ نقطه D را نسبت به BC بازتاب داده و D' می نامیم؛ پس $\triangle BD'C \cong \triangle BDC$ و مساحت چهارضلعی $ABD'C$ حداکثر است. حال به کمک قضیه هرون، مساحت مثلث $BD'C$ را می یابیم:

$$p = \frac{7 + 10 + 13}{2} = 15 \quad S_{\triangle BCD'} = \sqrt{(15)(8)(5)(2)} = 20\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(13)^2 = \frac{169\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABD'C} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD'} = \frac{169\sqrt{3}}{4} + 20\sqrt{3} = \frac{249\sqrt{3}}{4}$$

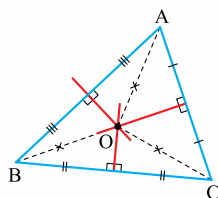
$$\Rightarrow \frac{S_{ABD'C}}{S_{ABDC}} = \frac{\frac{249\sqrt{3}}{4}}{\frac{169\sqrt{3}}{4} - 20\sqrt{3}} = \frac{249}{19}$$

آزمون ۶۲

(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

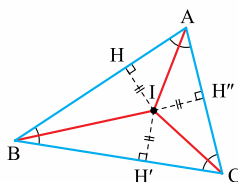
۶۱۵

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط، به یک فاصله است و برعکس؛ پس محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث، از سه رأس آن به یک فاصله است.



$$OA = OB = OC$$

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است و برعکس؛ پس محل هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های مثلث، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



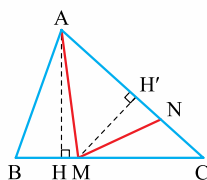
$$OH = OH' = OH''$$

(مشابه تهری ۱۴۰۳ نوبت دوم - داخل)

۶۱۶

فرض می‌کنیم مساحت مثلث ABC برابر ۳ S است؛ بنابراین:

$$(S_{\triangle ABM} = S), (S_{\triangle ACM} = 2S), (S_{\triangle CMN} = \frac{3}{5}S)$$



ارتفاع AH در مثلث‌های ABC و ABM مشترک است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CM}{BC} \Rightarrow \frac{2S}{3S} = \frac{CM}{BC} \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{2}{3} (*)$$

از طرف دیگر، مثلث‌های AMC و CMN در ارتفاع MH' مشترک‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5}S}{2S} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{CN}{AC} = \frac{3}{10}$$

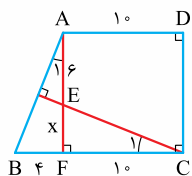
$$\xrightarrow{(*)} \frac{CM}{BC} + \frac{CN}{AC} = \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{29}{30}$$

(مشابه تهری ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۶۱۷

چهارضلعی ADCF مستطیل است؛

بنابراین:



$$CF = BC - BF = 14 - 4 = 10 \Rightarrow AD = 10$$

برای یافتن مساحت دوزنقه، باید ارتفاع آن را به دست آوریم. حال داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 + \hat{B} &= 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{EFC} = \hat{AFB} = 90^\circ$$

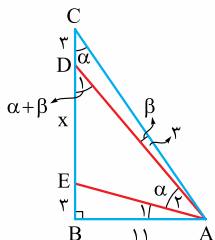
$$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{EF}{BF} = \frac{CF}{AF}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{10}{6+x} \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$\xrightarrow{x>0} x = 4 \Rightarrow AF = 10$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} (AF) = \frac{10+14}{2} (10) = 120$$

۶۱۸ | اندازه زاویه‌های C و A را α و اندازه زاویه A_3 را β فرض می‌کنیم. حال داریم:



$$\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \alpha + \beta$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= \hat{CAE} \\ \hat{A}_3 &= \hat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle DAE \sim \triangle ACE$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{AE} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{x+3} = \frac{x}{AE} = \frac{AD}{AC} (*)$$

از رابطه (*) نتیجه می‌گیریم $AE^2 = x(x+3)$. از طرف دیگر، طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABE داریم:

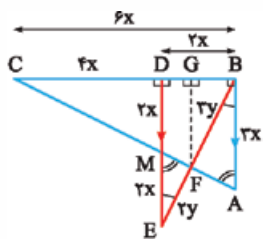
$$AE^2 = 11^2 + 3^2 \Rightarrow x(x+3) = 130$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 130 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 10$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ نوبت دوم - داخل)

۶۱۹

چون $\frac{BE}{AC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت تشابه مثلث‌های BDE و ABC برابر $\frac{2}{3}$ است و داریم:



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$$

پس فرض می‌کنیم $BD = 2x$ و $AB = 3x$. در نتیجه $BC = 6x$ ،

$DE = 4x$ و $CD = 4x$ حال داریم:

$$\triangle CBA : DM \parallel BA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DM}{3x} = \frac{4x}{6x}$$

$$\Rightarrow DM = 2x \Rightarrow ME = 4x - 2x = 2x$$



(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

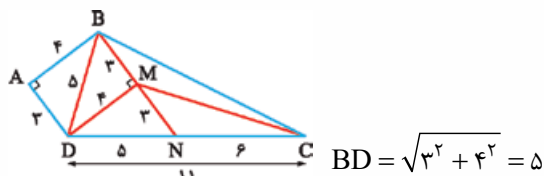
۶۲۲

هر سه تبدیل داده شده، همواره جهت شکل را حفظ می کنند.

(مشابه تهری ۱۴۰۳ - نوبت دوم - داخل)

۶۲۳

BM را امتداد می دهیم تا DC را در N قطع کند. حال داریم:



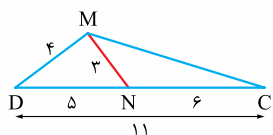
$DM \parallel AB$
 $AD \parallel BM$ $\xrightarrow{A=90^\circ}$ مستطیل است. ABMD

$$\Rightarrow (\hat{BMD} = 90^\circ), (DM = 4), (BM = 3)$$

چون $\hat{BDC} = 2\hat{BDM}$ ، پاره خط DM نیمساز زاویه BDN است. پس در مثلث BDN، ارتفاع و نیمساز وارد بر BN، بر هم منطبق اند. در نتیجه این مثلث متساوی الساقین است؛ بنابراین $MN = BM = 3$ ، $DN = DB = 5$ و $CN = 11 - 5 = 6$. حال طبق قضیه استوارت در مثلث MDC، داریم:

$$11(3^2 + 5 + 6) = 5MC^2 + 6 \times 4^2 \Rightarrow 429 = 5MC^2 + 96$$

$$\Rightarrow 5MC^2 = 333 \Rightarrow MC^2 = \frac{333}{5} \Rightarrow MC = \sqrt{\frac{333}{5}} = 3\sqrt{\frac{37}{5}}$$



(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم - داخل)

۶۲۴

طبق فرض داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2 \text{ مجموع درایه های}}{A \text{ مجموع درایه های}} = \frac{6}{2} = 3$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۶۲۵

طبق ویژگی های ضرب داریم:

$$C = A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} B = A \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} B - A \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} B$$

$$= A \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} B - A \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} B$$

$$= A \left(\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \right) B$$

$$\triangle FME \sim \triangle FAB \Rightarrow \frac{EF}{BF} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle BDE : GF \parallel DE \xrightarrow{\text{تالسی}} \frac{GF}{DE} = \frac{BF}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{GF}{4x} = \frac{3}{5} \Rightarrow GF = \frac{12}{5}x \Rightarrow \frac{GF}{AB} = \frac{\frac{12}{5}x}{3x} = \frac{4}{5} = 0.8$$

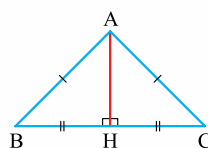
(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۶۲۵

می دانیم میانه وارد بر قاعده مثلث

متساوی الساقین، ارتفاع هم می باشد.

طبق فرض داریم:



$$S_{\triangle ABC} = AH^2 \Rightarrow \frac{1}{2} BC \cdot AH = AH^2 \Rightarrow AH = \frac{1}{2} BC$$

یعنی میانه وارد بر BC، نصف BC است؛ پس این مثلث، قائم الزاویه متساوی الساقین است ($\hat{A} = 90^\circ$).

در نتیجه $AB = AC = x$ و $BC = x\sqrt{2}$. حال داریم:

$$\triangle ABM \Rightarrow \text{فیثاغورس} \Rightarrow BM = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

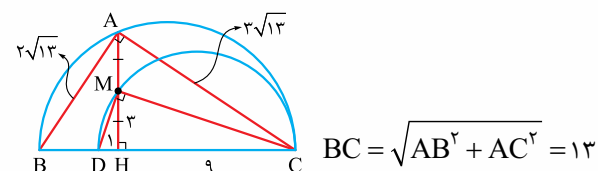
$$\Rightarrow \frac{BM}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}x}{\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۶۲۱

زاویه های BAC و DMC محاطی و روبه رو به قطرند، پس قائمه اند.

حال با استفاده از روابط طولی در مثلث های قائم الزاویه داریم:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{(2\sqrt{13})(3\sqrt{13})}{13} = 6$$

$$\Rightarrow MH = \frac{1}{2}(6) = 3$$

$$CA^2 = CB \cdot CH \Rightarrow 9 \times 13 = 13CH \Rightarrow CH = 9$$

$$MH^2 = CH \cdot HD \Rightarrow 9 = 9HD \Rightarrow HD = 1$$

$$DM^2 = DC \cdot DH = 10 \Rightarrow DM = \sqrt{10}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{45}{4}}} = \sqrt{\frac{41}{45}} = \frac{\sqrt{41}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{205}}{15}$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۶۲۷

طبق فرض داریم:

$$\frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \frac{|(m+1, m, -1) \cdot (1, 1, 5)|}{|(1, 1, 5)|} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{|2m-4|}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow |2m-4| = 2 \Rightarrow |m-2| = 1$$

$$\Rightarrow m-2 = \pm 1 \Rightarrow (m=3) \text{ یا } (m=1)$$

$$\xrightarrow{m < 2} m=1 \Rightarrow \vec{a} = (2, 1, -1)$$

طول ارتفاع وارد بر وجه شامل $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ، برابر است با:

$$\frac{|\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})|}{|\vec{c} \times \vec{a}|} = \frac{|(1, -1, 0) \cdot (-1, 1, -1)|}{|(-1, 1, -1)|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= A \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} B = A(4I)B = 4AB = 4 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (مجموع درایه‌های C) = 4(9) = 36$$

(مشابه ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۶۲۶

مقادیر $x = -1$ و $x = 2$ را در معادله خط $2x - y = 3$ جای گذاری می‌کنیم تا رئوس کانونی بیضی را بیابیم:

$$x = -1 \Rightarrow 2(-1) - y = 3 \Rightarrow y = -5$$

$$\Rightarrow A = (-1, -5)$$

$$x = 2 \Rightarrow 2(2) - y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A' = (2, 1)$$

$$AA' = 2a \Rightarrow \sqrt{3^2 + 6^2} = 2a \Rightarrow 2a = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{فرض سؤال: } 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$