

...مقدمه ناشر...

می گن یه روز یه امپراتور از یه نقاش مشهور چینی می خواد که تصویر یه مرغ ماهی خوار رو براش بکشه. نقاش می گه: «شش ماه بهم وقت بده.»

شش ماه می گذره و دوباره ازش می پرسن نقاشی آماده ست؟ می گه: «بازم وقت بده.»

همین جور این دوست نقاش می گه بازم زمان می خوام تا این که بعد از یه سال، امپراتور دیگه عصبانی می شه و می گه: «دیگه بسه! یا نقاشی رو می کنی یا این که می کشمت!»

نقاش هم برمی داره و تو کم تر از یه ساعت یه شاهکار تمام عیار می کشه! (می گن بعد دیدن این صحنه برگ درخت های کاخ امپراتور می ریزه)

امپراتور که نقاشی رو می بینه، شگفت زده می پرسه: «اگه می تونستی تو یه دقیقه بکشی، پس چرا یه سال طولش دادی؟» نقاش می گه دلیلش رو می تونید تو خونه ام ببینید! امپراتور هم که این رو می شنوه، به همراه رفقا ش می رن خونه نقاش و با صحنه جالبی روبه رو می شن! صدها تمرین ناقص، طرح اولیه از بدن پرنده، فرم بال ها و چیزهایی شبیه به اون که همه جای خونه هست. بعد این صحنه، نقاش می گه:

«من یه سال فکر کردم، تمرین کردم، کشیدم و انداختم ... تا بتونم الان فقط تو یه ساعت، کامل ترین نسخه شو بکشم.» حکایت کنکور و خیلی کارهای مهم تر دیگه هم همینه! درسته که کل آزمون چند ساعت بیشتر نیست، ولی واقعاً نتیجه اش تو این چند ساعت رقم نمی خوره! تو روزایی رقم می خوره که داری تمرین می کنی، اشتباه می کنی، شکست می خوری و دوباره از نو شروع می کنی!

این کتاب دقیقاً برای همون روزهاست، برای هزاران خط خطی قبل شاهکارت

این کتاب شامل محتوای تکمیلی است. ✓



با اسکن کیوآرکد پشت صفحه، می تونی پاسخ تشریحی آزمون های جامع کتاب رو ببینی! سعی می کنیم بعداً محتواهای دیگه ای هم برات بذاریم! پس چند وقت یه بار کیوآرکد رو اسکن کن 😊

...مقدمه مؤلف...

با درود و سلام به همه همراهان و دوستان عزیز، کتابی که پیش رو دارید از مجموعه کتاب‌های نردبام است. ویژگی‌های این کتاب جامع هندسه به شرح زیر است:

(الف) تست‌های سال‌های اخیر در درس هندسه دچار تغییرات اساسی و مفهومی شده است. لذا تمامی این تست‌ها بررسی و براساس آن‌ها تست‌های جدید طرح گردیده است.

(ب) در درس‌نامه‌ها، مطالب جدید از زوایای مختلف به آن پرداخته شده است و نکات لازم و ضروری ذکر و از نکات غیرضروری پرهیز شده است.

(پ) در پاسخ به تست‌ها علاوه بر روش‌های معمول، روش‌های کوتاه‌تر و ابتکاری با عنوان تیزبازی بیان شده است.

(ت) در درس‌نامه‌ها مطالب کتاب درسی و بیش از آن به طور دقیق پوشش داده شده است و دانش‌آموزان عزیز کاربرد دقیق نکات را مشاهده می‌کنند.

(ث) تست‌های مطرح‌شده چنان است که در کنکور سراسری و آزمون‌های استاندارد مختلف راه‌گشا باشند.

(ج) کتاب شامل یازده فصل است. ده فصل آن براساس فصل‌های کتاب‌های هندسه دهم و یازدهم و دوازدهم نوشته شده و فصل یازدهم آن شامل ده آزمون ۱۰ تستی می‌باشد.

در این کتاب تلاش شده است با مطالب مفید دغدغه دانش‌آموزان را کم کرده و سهمی در پیشرفت آن‌ها داشته باشیم و تست‌های تألیفی چراغ راه دانش‌آموزان در آزمون‌های کنکور سراسری باشد.

در پایان از مدیریت محترم انتشارات خیلی‌سبز که فرصت چاپ کتاب را فراهم آورده‌اند، تشکر می‌کنیم. هم‌چنین از جناب آقای سلیمان‌زاده، سرکار خانم جان‌محمدی و سرکار خانم براتی و ویراستاران گرامی متشکریم.

محمدطاهر شعاعی - سعید قندچی

@Saeed-ghandchi/@tahir-shoei

فهرست

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال	۷
فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربرد	۱۶
فصل سوم: چندضلعی‌ها	۳۵
فصل چهارم: تجسم فضایی	۴۸
فصل پنجم: دایره	۵۶
فصل ششم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها	۷۳
فصل هفتم: روابط طولی در مثلث	۸۳
فصل هشتم: ماتریس و کاربردها	۹۲
فصل نهم: آشنایی با مقاطع مخروطی	۱۰۲
فصل دهم: بردارها	۱۱۶
آزمون‌های جامع	۱۲۸
پاسخ‌نامهٔ تشریحی	۱۳۸
پاسخ‌نامهٔ کلیدی	۳۸۲

ماتریس و کاربردها





ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۸۸۹- مجموع درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ با فرض $a_{ij} - (-1)^j a_{ji} = i + 4j$ کدام است؟

- ۱۹/۵ (۱) ۱۷/۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴)

۸۹۰- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $C = \begin{bmatrix} x^2 & y+1 & y^2 \\ 2x & -2y & xy \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۳ (۴)

۸۹۱- اگر $\begin{bmatrix} 2a-15 & 20-b & 40-a \\ a-2 & 2b-11 & c-11 \\ a-b & a-1 & 4c-15 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

- ۸۴ (۱) ۹۴ (۲) ۱۰۴ (۳) ۱۰۸ (۴)

۸۹۲- اگر $A = \begin{bmatrix} x-2y & y-z \\ 2x+2y & 0 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ با فرض $b_{ij} = \begin{cases} i-j & i=j \\ i+j & i \neq j \end{cases}$ باشند و مجموع درایه‌های قطر اصلی با مجموع درایه‌های قطر فرعی $A+B$ برابر باشند، آن‌گاه حاصل $x+5y-z$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) -۶ (۴)

۸۹۳- اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند به طوری که $3A - B = 2I$ و $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A - B$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) -۲ (۴)

۸۹۴- اگر $\begin{bmatrix} \frac{a}{2} & a+b+c-27 & a+b+c-27 \\ a+b+c-27 & \frac{b}{3} & a+b+c-27 \\ a+b+c-27 & a+b+c-27 & \frac{c}{4} \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، آن‌گاه حاصل $a-b-c$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) -۱۰ (۲) -۱۵ (۳) -۹ (۴)

۸۹۵- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ مجموع مربعات سطر اول برابر یک و مجموع مربعات سطر دوم نیز برابر یک است. اگر مجموع حاصل ضرب ستون اول و حاصل ضرب ستون دوم برابر $\frac{1}{4}$ باشد، آن‌گاه قدرمطلق تفاضل حاصل ضرب قطر اصلی و حاصل ضرب قطر فرعی کدام است؟

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۸۹۶- اگر $\begin{bmatrix} a-8 & p-b & m-a \\ a-5 & b+9 & n-b \\ 5-a & b-2 & 5-2c \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه $m+n+p$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

۸۹۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x^2 & x+y & x^2+z \\ -3 & y^2 & 3y \\ 5 & -3 & y^2 \end{bmatrix}$ چنان باشد که $a_{ij} = a_{ji}$ ، آن‌گاه xyz کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

ضرب ماتریس‌ها - ماتریس‌های تعویض‌پذیر

۸۹۸- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} x & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & y+1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، اگر $AB + BA$ یک ماتریس اسکالر باشد، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

- ۷ (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) ۸ (۴)

۸۹۹- سطر دوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- $[-9 \ 17 \ 14]$ (۱) $[9 \ 17 \ -14]$ (۲) $[9 \ 17 \ 14]$ (۳) $[-9 \ -17 \ 14]$ (۴)





۹۰۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $(A+B) \times (A-B)$ یک ماتریس قطری باشد، آن گاه نسبت درایه‌های غیر صفر این ماتریس کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۹۰۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل ضرب سطر دوم در ستون سوم ماتریس $B \times A$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) -۵

۹۰۲- اگر ماتریس‌های مرتبه ۳ A و B چنان باشند که $A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 31 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & -1 & 30 \end{bmatrix}$ و $B \times A = \begin{bmatrix} 6 & -14 & 6 \\ -8 & 16 & 0 \\ 1 & 34 & x \end{bmatrix}$ ، آن گاه مقدار x کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱

۹۰۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^T = aA + bI$ ، آن گاه b^a کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) ۹ (۴) $-\frac{1}{8}$

۹۰۴- دو ماتریس $A_{2 \times 2}$ و $B_{2 \times 2}$ چنان اند که $A \times B - B \times A = \begin{bmatrix} 2a+3 & 10a-2 \\ 2a+5 & a-12 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر فرعی این ماتریس کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۳۸ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹

۹۰۵- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با فرض $a_{ij} = \frac{(-1)^i + (-1)^j}{4}$ تعریف می‌شود. حاصل $A^T(A+I)$ کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) I (۳) $-I$ (۴) $2A$

۹۰۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -5 & -9 & -4 \\ -4 & -5 & -9 \\ -9 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ و ماتریس $A^T + B$ ، ماتریس اسکالر باشد، آن گاه بیشترین مقدار مجموع درایه‌های $A^T + B$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۹۰۷- فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های P و Q چنان هستند که $A = P + Q$ و $3Q = A$ و $P + Q = I$. اگر داشته باشیم $A^T = aP + bQ$ ، آن گاه $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۹۰۸- ماتریس A چنان است که $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

۹۰۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ، $AB = I$ و $B = \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۵

۹۱۰- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ داریم $A^T = I$. اگر $B = \begin{bmatrix} c+1 & a+c \\ b & c-2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۷ (۳) ۶ (۴) ۷

۹۱۱- اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -3 \\ 1 & -3 & x+1 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند، آن گاه مقدار x کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) -۴





۹۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ ، $i = j$ و $i \neq j$ داشته باشیم $(A+B)(A-B) = A^T - B^T$ ، آن گاه حاصل pq کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) -۱۲

۹۱۳- با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $B^T A^T B + 8BAB - 10B^T$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) I (۴) $\bar{O}$

۹۱۴- مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) -۱۲ (۳) ۱۳ (۴) -۳۰

۹۱۵- از تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}$ مقدار x کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۹۱۶- ستون اول ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

۹۱۷- برای ماتریس $A_{2 \times 2}$ داریم $A^T - 4A + 9I = \bar{O}$ و ماتریس‌های B و C چنان‌اند که $A = B^T + C^T$ ، حاصل BC کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}A$ (۲) $\frac{1}{4}A$ (۳) $\frac{3}{4}A$ (۴) $\frac{2}{3}A$

توان ماتریس‌ها

۹۱۸- با فرض $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل جمع درایه‌های ماتریس $A^{30} + B^{30}$ کدام است؟

- (۱) -2^{30} (۲) -2^{31} (۳) 2^{32} (۴) صفر

۹۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه به ازای کدام مقدار x مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی A^3 برابرند؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n = A$ است، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۹۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A + A^T + A^2 + \dots + A^{100}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۵۰ (۴) صفر

۹۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس A^3 کدام می‌باشد؟

- (۱) همانی (۲) اسکالر (۳) صفر (۴) قطری غیرهمانی و غیراسکالر

۹۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{100} A^{-98}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) صفر





۹۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی $A^6 - A^3 + I$ کدام است؟

- (۱) -۴۵ (۲) ۸۱ (۳) ۱۳۵ (۴) -۱۵۰

۹۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $(A^3 + I)^6$ کدام است؟

- (۱) I (۲) $16I$ (۳) $\bar{O}$ (۴) $-I$

۹۲۶- اگر $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A = M^{16} - N^{15} - P^{15}$ ، آن گاه حاصل $a_{12} + a_{21}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۹۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{fn} برابر $(128)^7$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{2n+3}{n-3}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۹۲۸- اگر $A^2 = \bar{O}$ ، آن گاه حاصل $A(I + A)^6$ کدام است؟

- (۱) A (۲) $I + A$ (۳) $I - A$ (۴) $I + A^2$

۹۲۹- اگر A و B دو ماتریس 2×2 ، $AB = A$ و $BA = B$ باشد، آن گاه $(I + A)^5$ کدام است؟

- (۱) $32I$ (۲) $I + 31A$ (۳) $I + 30A$ (۴) I

۹۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه درایه سطر اول و ستون سوم ماتریس $A^3 - B^3 - 3A^2B + 3B^2A$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^4 + I$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۱ (۲) ۱۰۲ (۳) ۹۹ (۴) ۱۰۰

۹۳۲- اگر ماتریس $A_{7 \times 7}$ در رابطه $A^2 - A = -4I$ صدق کند، آن گاه حاصل $A^5 - 5A$ کدام است؟

- (۱) $32I$ (۲) $16I$ (۳) $28I$ (۴) $-24I$

۹۳۳- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ ، $A = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 2 & i = j \end{cases}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر ۱۴۵۸ باشد، آن گاه n کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۹۳۴- با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $(I + 2A)^{10}$ کدام است؟

- (۱) A (۲) I (۳) $-I$ (۴) $\bar{O}$

۹۳۵- فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $A^{1404} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

۹۳۶- ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos 12^\circ & -\sin 12^\circ \\ \sin 12^\circ & \cos 12^\circ \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$





وارون ماتریس و دترمینان

۹۳۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند، آن گاه دترمینان ماتریس $A + B$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۳۲ (۴) ۴۰

۹۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 3^x & 27^x \\ 3^{-x} & 1 \end{bmatrix}$ و $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}}$ ، آن گاه حاصل $|\frac{1}{5}A|$ کدام است؟

- (۱) $-4/8$ (۲) $2/7$ (۳) $-1/8$ (۴) $-3/6$

۹۳۹- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و داشته باشیم $i^2 + j^2 = ia_{ij} + ja_{ji}$ ، آن گاه مینیمم $|2A|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) -4 (۳) $-\frac{9}{2}$ (۴) ۴

۹۴۰- فرض کنیم a و b و c و d اعداد مثبت باشند و داشته باشیم $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+12 & 29 \\ 7d+4 & d+21 \end{bmatrix}$ ، آن گاه $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) -1

۹۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A^{34} - 2A^9 + I$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -6 (۳) ۷ (۴) -4

۹۴۲- با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A^{2n} + A^{2n+1}$ کدام است؟

- (۱) $2n$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) n

۹۴۳- در ماتریس $A_{2 \times 2}$ داریم $|A| = 4$ و مجموع درایه های قطر اصلی ۸ واحد بیشتر از مجموع درایه های قطر فرعی است. کدام عدد را به درایه های ماتریس A اضافه کنیم به طوری که دترمینان ماتریس جدید برابر -4 شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -1 (۴) -2

۹۴۴- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 30 & 13 & 20 \\ 40 & 51 & 10 \end{bmatrix}$ ، $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس $D = A^{10}BC$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -1 (۳) ۱ (۴) -4

۹۴۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ ، آن گاه بیشترین مقدار x که $|A + xI| = 0$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۵

۹۴۶- اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، آن گاه دترمینان ماتریس 3×3 وسطی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) -3 (۳) -2 (۴) $\frac{1}{3}$

۹۴۷- اگر $A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ b+1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر و $B = \begin{bmatrix} a & 1 & -a \\ b & 2 & -b \\ a & 1 & a \end{bmatrix}$ ، آن گاه $|\frac{1}{4}AB^2|$ کدام است؟

- (۱) -4 (۲) ۴ (۳) $4/5$ (۴) $-4/5$

۹۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A(A-I) = k(A-I)$ ، آن گاه حاصل $\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) صفر





۹۴۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه با فرض $ACA + BCB = ACB + BCA + I$ دترمینان ماتریس C کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۵۰- اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & -13 & 8 \\ 1 & |A| & 1 \\ 1 & 2 & |A| \end{bmatrix}$ ، آن گاه $|A + I|$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۵۱- اگر $|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & |A|^2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۴ (۲) $-\frac{7}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{7}{2}$

۹۵۲- اگر A یک ماتریس 3×3 باشد به طوری که $\begin{bmatrix} -12 & 6 & 18 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه $|A - a_{33}|$ کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۶ (۳) ۴۸ (۴) ۴۴

۹۵۳- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\begin{vmatrix} -x & 2 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ x & -x & 2 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) -۲ (۴) ۱

۹۵۴- دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [a_{ij} - i]_{3 \times 3}$ را با فرض $\begin{cases} i & i > j \\ 1 & i = j \\ -1 & i < j \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. حاصل $|AB + I|$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴) ۲۰

۹۵۵- اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، آن گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) -۲ (۴) ۴

۹۵۶- اگر a و b و c سه عدد حقیقی متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & a & bc - a^2 \\ 1 & b & ac - b^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) abc (۳) $a + b + c$ (۴) $(a-b)(b-c)(c-a)$

وارون ماتریس‌های 2×2

۹۵۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه وارون ماتریس $2A + A^{144}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$

۹۵۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ در رابطه ماتریسی $AX = A - I$ صدق می‌کند. مجموع درایه‌های X کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۹۵۹- اگر $A^{-1} + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A - I$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱





گزینه ۱ - ۸۸۹

ماتریس: جدولی مستطیلی از دسته اعداد حقیقی که در سطر و ستون قرار می‌گیرند، ماتریس نامیده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر اول
سطر دوم
ستون سوم

مرتبه یک ماتریس: ماتریسی که m سطر و n ستون داشته باشد، ماتریس مرتبه $m \times n$ می‌گوییم. مثلاً ماتریس بالا مرتبه 2×3 است. ماتریس مرتبه 1×1 همان عدد داخل کروشه است $[-3]_{1 \times 1}$.

ماتریس مربعی: اگر تعداد سطرها و ستون‌ها در یک ماتریس برابر باشد، ماتریس مربعی نامیده می‌شود.

ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد، ماتریس سطری نامیده می‌شود.

ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفرند، ماتریس قطری نامیده می‌شود، صورت کلی آن $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ با شرط $a_{ij} = 0; i \neq j$ می‌باشد.

ماتریس اسکالر: اگر ماتریسی قطری و تمام درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامیم.

صورت کلی آن: $(k \in \mathbb{R}) a_{ij} = \begin{cases} i & i \neq j \\ k & i = j \end{cases}, A = [a_{ij}]$

ماتریس واحد یا ماتریس همانی: ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن عدد یک و بقیه درایه‌های آن صفرند.

ماتریس صفر: ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر از مرتبه $m \times n$ را با نماد $O_{m \times n}$ نشان می‌دهیم.

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن نظیر به نظیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر: $\forall i, j: a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow A = B$

جمع دو ماتریس: فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ هم‌مرتبه باشند، مجموع A و B یک ماتریس $m \times n$ است به طوری که هر درایه آن برابر مجموع درایه‌های متناظرش در A و B می‌باشد.

$$A + B = B + A$$

جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

قرینه یک ماتریس: قرینه ماتریس A به صورت $-A$ نوشته می‌شود و ماتریسی است که هر درایه آن قرینه درایه متناظرش در A می‌باشد و همواره داریم $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$ و داریم:

$$B + C = \bar{O} \Leftrightarrow B = -C \text{ یا } C = -B$$

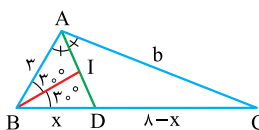
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AE \times AC \times \sin 12^\circ - \frac{1}{2} AE \times AB \times \sin 6^\circ \\ &\Rightarrow 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = AE \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - AE \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow 24 = 8 \times AE - 3 \times AE \Rightarrow AE = \frac{24}{5} = 4.8 \end{aligned}$$

تیزبازی طول نیمساز زاویه خارجی در مثلث ABC برابر است با:

$$d'_a = \frac{2bc}{|b-c|} \sin \frac{A}{2}, d'_b = \frac{2ac}{|a-c|} \sin \frac{B}{2}, d'_c = \frac{2ab}{|a-b|} \sin \frac{C}{2}$$

در این پرسش $b = 8, c = 3$ و $\hat{A} = 6^\circ$ است. داریم:

$$d'_a = \frac{2bc}{|b-c|} \sin \frac{A}{2} = \frac{2 \times 8 \times 3}{8-3} \times \sin 3^\circ = \frac{48}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{24}{5} = 4.8$$



نیمسازهای زاویه‌ای مثلث است؛ پس نقطه همرسی I

پاره خط AD که I متعلق به آن است، نیمساز زاویه A است.

فرض کنیم $BD = x$ پس $CD = 8 - x$. در مثلث ABD طول نیمساز زاویه B یعنی BI برابر است با:

$$BI = \frac{2 \times 3 \times x}{x+3} \times \cos 3^\circ = \frac{3\sqrt{3}x}{x+3} \quad (1)$$

برای محاسبه x ابتدا باید b را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos 6^\circ \\ &= 64 + 9 - 24 = 49 \Rightarrow b = 7 \end{aligned}$$

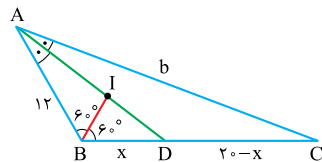
$$AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{x}{8-x} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{x}{8-x} \Rightarrow x = 2.4 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow BI = \frac{3\sqrt{3} \times 2.4}{2.4+3} = \frac{3 \times 2.4 \times \sqrt{3}}{5.4}$$

$$= \frac{2.4 \times \sqrt{3}}{1.8} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۳ - ۸۸۸ امتداد AI



ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند و چون I نقطه همرسی

نیمسازها است، پس AD

نیمساز زاویه A است.

فرض کنیم اندازه پاره خط BD برابر x باشد؛ پس $CD = 20 - x$. برای محاسبه x ابتدا باید b را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 + ac = 20^2 + 12^2 + 20 \times 12 = 400 + 144 + 240 \\ &= 784 \Rightarrow b = 28 \end{aligned}$$

$$AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{28} = \frac{x}{20-x} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{x}{20-x} \Rightarrow x = 6$$

حال طول نیمساز زاویه B را در مثلث ABD به دست می‌آوریم:

$$BI = \frac{2BD \times AB}{AB + BD} \times \cos \frac{12^\circ}{2} = \frac{2 \times 6 \times 12}{12+6} \times \cos 6^\circ$$

$$= \frac{2 \times 6 \times 12}{18} \times \frac{1}{2} = 4$$





$$\Rightarrow \frac{2a}{5} - 15 = \frac{2b}{5} - 11 = \frac{2c}{11} - 15 = 1$$

$$\Rightarrow a = 40, b = 20, c = 44$$

و به ازای مقادیر فوق درایه‌های غیر قطر اصلی صفر می‌شود؛ پس:

$$a + b + c = 40 + 20 + 44 = 104$$

۸۹۲- گزینه ۴ درایه‌های ماتریس $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ را با فرض

$$b_{ij} = \begin{cases} i-j & i=j \\ i+j & i \neq j \end{cases}$$
 مشخص می‌کنیم:

$$b_{11} = 1-1=0, b_{22}=0, b_{12}=1+2=3, b_{21}=2+1=3$$

$$A+B = \begin{bmatrix} x-2y & y-z \\ 2x+2y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y & y-z+3 \\ 2x+2y+3 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\Rightarrow x-2y+0 = 2x+2y+3+y-z+3 \Rightarrow x+5y-z = -6$$

۸۹۳- گزینه ۱ با توجه به مفروضات دو ماتریس A و B را از دستگاه

زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A+B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \\ 2A-B = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 4A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ \frac{3}{2} & 7 \end{bmatrix},$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ \frac{3}{2} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A-B \text{ اصلی قطر ضرب } = (-2) \times (-4) = 8$$

۸۹۴- گزینه ۳ بنا به فرض، ماتریس داده‌شده یک ماتریس اسکالر است، داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} & a+b+c-27 & a+b+c-27 \\ a+b+c-27 & \frac{b}{3} & a+b+c-27 \\ a+b+c-27 & a+b+c-27 & \frac{c}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \\ a+b+c = 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2k + 3k + 4k = 27 \Rightarrow 9k = 27 \Rightarrow k = 3$$

$$a-b-c = 2k - 3k - 4k = -5k = -15$$

۸۹۵- گزینه ۱ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، با توجه به مفروضات داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, ac + bd = \frac{1}{2}$$

تفاضل دو ماتریس: تفاضل ماتریس B از A که هم‌مرتبه هستند با نماد $A-B$ نشان داده می‌شود و به صورت $A+(-B)$ تعریف می‌شود.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس: عدد حقیقی r و ماتریس A داده شده است. منظور از rA ماتریسی است که از ضرب عدد r در هر درایهٔ ماتریس A به دست می‌آید و داریم:

$$rA = B (r \neq 0) \Leftrightarrow A = \frac{1}{r} B$$

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس: اگر A, B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه داریم:

$$1) A+B = B+A \text{ (خاصیت جابه‌جایی)}$$

$$2) A+(B+C) = (A+B)+C \text{ (خاصیت شرکت‌پذیری)}$$

$$3) A+\bar{O} = \bar{O}+A = A \text{ (خاصیت عضو خنثی در عمل جمع)}$$

$$4) A+(-A) = (-A)+A = \bar{O} \text{ (خاصیت عضو قرینه)}$$

$$5) A \pm C = B \pm C \Leftrightarrow A = B$$

$$6) r(A \pm B) = rA \pm rB \quad 7) (r+s)A = rA + sA$$

$$8) r(sA) = rsA \quad 9) \begin{cases} A=B \Rightarrow rA=rB \\ rA=rB \xrightarrow{r \neq 0} A=B \end{cases}$$

$$10) 0 \times A = \bar{O}$$

$$11) r \times \bar{O} = \bar{O}$$

$$12) rA = \bar{O} \Rightarrow r=0 \text{ یا } A = \bar{O}$$

$$13) 1A = A$$

درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ با فرض $a_{ji} - (-1)^j a_{ij} = i + 4j$ صورت زیر مشخص می‌شود:

$$i=j=1 \Rightarrow a_{11} + a_{11} = 1+4 \Rightarrow a_{11} = \frac{5}{2}$$

$$i=j=2 \Rightarrow 2a_{22} - a_{22} = 2+8 \Rightarrow a_{22} = 10$$

$$i=1, j=2 \Rightarrow a_{12} - a_{21} = 1+8=9 \Rightarrow 2a_{12} - 2a_{21} = 18 \quad (1)$$

$$i=2, j=1 \Rightarrow 2a_{21} + a_{12} = 2+4=6 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 3a_{12} = 18+6=24$$

$$\Rightarrow a_{12} = 8, a_{21} = a_{12} - 9 = 8-9 = -1$$

$$\text{بنابراین } A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 8 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \text{ و مجموع درایه‌های } A \text{ برابر } 19/5 \text{ است.}$$

۸۹۰- گزینه ۲ ابتدا x و y را از تساوی دو ماتریس A و B به دست می‌آوریم:

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ x=6-y \\ y=6-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x-3(6-x)=2$$

$$\Rightarrow x-18+3x=2 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5, y=6-5=1$$

$$C = \begin{bmatrix} x^2 & y+1 & y^2 \\ 2x & -2y & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 2 & 1 \\ 10 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}} 41$$

۸۹۱- گزینه ۳ بنا به فرض ماتریس داده‌شده یک ماتریس همانی است؛ پس می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{2a}{5} - 15 & 20-b & 40-a \\ \frac{a}{2} - b & \frac{2b}{5} - 11 & \frac{c}{4} - 11 \\ \frac{a}{10} - \frac{b}{5} & \frac{a}{40} - 1 & \frac{2c}{11} - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$(-A) \times (-B) = A \times B \quad (3)$$

$$A \times (-B) = (-A) \times B = -A \times B \quad (4)$$

(5) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد؛ یعنی تساوی $A \times B = B \times A$ عموماً برقرار نیست.

(6) اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، همواره داریم:

$$A_{n \times n} \times I_{n \times n} = I_{n \times n} \times A_{n \times n}$$

(7) اگر A ، B و C سه ماتریس باشند، در صورتی که $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$ تعریف شوند، داریم:

(8) ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آن‌ها خاصیت پخش‌پذیری یا توزیع‌پذیری دارد؛ یعنی اگر A ، B و C سه ماتریس باشند، به شرط تعریف ضرب‌های زیر داریم:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{ضرب در جمع از سمت چپ}$$

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A \quad \text{ضرب در جمع از سمت راست}$$

$$3A \times (2B - \frac{1}{3}I) = 6A \times B - A \times I = 6AB - A \quad \text{مثلاً داریم:}$$

$$(A + I)(B - 3I) = (A + I)B - 3(A + I)I$$

$$= AB + I \times B - 3A \times I - 3I \times I = AB + B - 3A - 3I$$

با دستور شماره (8) می‌توان عمل فاکتورگیری را نیز انجام داد:

$$6AB + 3B \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از عدد 3}} 3(2AB + B)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از سمت راست}} 3(2A + I)B$$

$$AB - B + A - I \quad \text{مثال دیگر:}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از سمت راست}} (A - I)B + (A - I)I$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از سمت چپ}} (A - I)(B + I)$$

(9) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست؛ یعنی اگر $A \times B = A \times C$ باشد، عموماً نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

(10) یک ماتریس را می‌توان در یک تساوی ماتریسی از سمت چپ یا از سمت راست ضرب کرد. به عبارت دیگر اگر $B = C$ باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$B \times A = C \times A \quad \text{و} \quad A \times B = A \times C$$

(11) ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس غیرصفر برابر ماتریس صفر باشد:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

بنابراین از تساوی $A \times B = \bar{O}$ نمی‌توان نتیجه گرفت A و B ماتریس‌های صفرند.

$$\begin{aligned} AB + BA &= \begin{bmatrix} x & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & y+1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y+1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x-5 & xy+x-15 \\ 0 & -y+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-y-1 & 2y-8 \\ x-3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4x-y-6 & xy+x+2y-23 \\ x-3 & -y+6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

برای این که ماتریس $AB + BA$ اسکالر باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} xy+x+2y-23=0 \\ x-3=0 \\ 4x-y-6=-y+6 \end{cases}$$

از معادله دوم و سوم $x=3$ به دست می‌آید و با قرار دادن آن در معادله اول $y=4$ حاصل می‌شود و $x+y=7$ است.

می‌خواهیم $|ad-bc|$ را محاسبه کنیم. در اتحاد زیر مقادیر فوق را قرار

$$\text{می‌دهیم:} \quad (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2) \times (c^2+d^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + (ad-bc)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (ad-bc)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow |ad-bc| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸۹۶- گزینه ۲ ماتریس داده‌شده، یک ماتریس قطری است؛ پس باید

درایه‌های غیر قطر اصلی صفر باشند، داریم:

$$\begin{bmatrix} a-8 & p-b & m-a \\ a-5 & b+9 & n-b \\ 5-a & b-2 & 5-2c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-5=0 \\ p-b=0 \\ m-a=0 \Rightarrow a=m=5, n=b=p=2 \\ n-b=0 \\ b-2=0 \end{cases}$$

$$m+n+p=5+2+2=9$$

۸۹۷- گزینه ۳ بنا به فرض $a_{ij} = a_{ji}$ پس می‌توان نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x+y & x^2+z \\ -3 & y^2 & 3y \\ 5 & -3 & y^2 \end{bmatrix},$$

$$a_{12} = a_{21} \Rightarrow x+y = -3$$

$$a_{23} = a_{32} \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$$

از دو معادله فوق نتیجه می‌شود $x = -2$ و در ادامه داریم:

$$a_{13} = a_{31} \Rightarrow x^2+z=5 \Rightarrow (-2)^2+z=5 \Rightarrow z=5-4=1$$

$$xyz = (-2)(-1) \times 1 = 2$$

۸۹۸- گزینه ۱

ضرب ماتریس‌ها: اگر A و B دو ماتریس باشند، حاصل ضرب A در B وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B یکی باشد؛ یعنی $A_{m \times n} \times B_{n \times p}$ و حاصل ماتریسی با مرتبه $m \times p$ است $(C_{m \times p} = A_{m \times n} \times B_{n \times p})$ که درایه‌های آن به صورت زیر به دست می‌آید:

ستون اول ماتریس $A \times B$ = سطر اول ماتریس A درایه سطر اول و ستون اول
ستون دوم ماتریس $A \times B$ = سطر اول ماتریس A درایه سطر اول و ستون دوم
ستون i ام ماتریس $A \times B$ = سطر i ام ماتریس A درایه سطر i ام و ستون i ام

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times (-1) & (-1) \times 3 + 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 0 \times 2 + 1 \times 4 + (-1) \times (-1) & 0 \times 3 + 1 \times 1 + (-1) \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ویژگی‌های ضرب دو ماتریس: اگر A و B دو ماتریس باشند، به طوری که $A \times B$ تعریف شود و با فرض این که m و n اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$(mA) \times (nB) = (mn)A \times B \quad (1)$$

$$(mA) \times B = A \times (mB) = m(A \times B) \quad (2)$$



۸۹۹- گزینه ۱

نوشتن سطر و ستون خاصی از $A \times B$ بدون نوشتن همهٔ درایه‌های آن، اگر
 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ، آن‌گاه داریم:

(ماتریس B) $\times$ (سطر A) = سطر $A \times B$

(ستون $A \times B$) = (ستون B) $\times$ (ماتریس A)

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

(ماتریس B) $\times$ (سطر دوم A) = سطر دوم ماتریس M

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 17 & 14 \end{bmatrix}$$

۹۰۰- گزینه ۱ ماتریس $(A+B) \times (A-B)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(A+B) \times (A-B)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & a-2 \\ b+3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & a+2 \\ b-3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 + (a-2)(b-3) & 2a+16 \\ 4b+6 & (a+2)(b+3)-3 \end{bmatrix}$$

برای این که $(A+B) \times (A-B)$ یک ماتریس قطری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2a+16=0 \\ 4b+6=0 \end{cases} \Rightarrow a=-8, b=-\frac{3}{2}$$

$$\text{نسبت درایه‌های غیرصفر} = \frac{15 + (-8-2)(-\frac{3}{2}-3)}{(-8+2)(-\frac{3}{2}+3)-3}$$

$$= \frac{15+15+30}{9-18-3} = \frac{60}{-12} = -5$$

۹۰۱- گزینه ۳

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(ستون سوم $B \times A$) $\times$ (سطر دوم $B \times A$)

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} = -2-1-3 = -6$$

۹۰۲- گزینه ۴

نکته برای هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A و B ، حاصل جمع

درایه‌های قطر اصلی $A \times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B \times A$ برابر است.



مثلاً برای ماتریس‌های 2×2 داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی } A \times B} ae + bg + cf + dh$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی } B \times A} ae + cf + bg + dh$$

با توجه به نکتهٔ فوق و فرض داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 31 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & -1 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی } A \times B} 6 - 3 + 30 = 33$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 6 & -14 & 6 \\ -8 & 16 & 0 \\ 1 & 34 & x \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی } B \times A} 6 + 16 + x = x + 22$$

$$x + 22 = 33 \Rightarrow x = 11$$

۹۰۳- گزینه ۱

توان طبیعی ماتریس‌ها: اگر A یک ماتریس مربعی باشد $A \times A$ را با A^2

نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A = (A \times A) \times A = A \times (A \times A)$$

$$\vdots$$

$$A^{n+1} = A^n \times A \quad (n \text{ عدد طبیعی})$$

چند ویژگی از توان ماتریس‌ها: اعداد طبیعی m, n و ماتریس مربعی A

$$1) A^n \times A = A \times A^n = A^{n+1} \quad \text{مفروض هستند، داریم:}$$

$$2) A^n \times A^m = A^m \times A^n = A^{m+n}$$

$$3) (A^n)^m = (A^m)^n = A^{mn}$$

$$4) I^n = I \quad (I \text{ ماتریس واحد است.})$$

با توجه به فرض داریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$aA + bI = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a \\ a & 2a & a \\ a & 0 & 3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & -2a \\ a & 2a+b & a \\ a & 0 & 3a+b \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^3 = aA + bI \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} b & 0 & -2a \\ a & 2a+b & a \\ a & 0 & 3a+b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$b^a = (-2)^3 = -8$$



با توجه به نکته فوق داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (2+1)A + (2 \times 1 - 1 \times 1)I = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3A - I$$

بنا به فرض $A = \Delta P + 3Q$ و $P + Q = I$ در نتیجه می توان نوشت:

$$A^2 = 3(\Delta P + 3Q) - (P + Q) = 14P + 8Q \Rightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow a-b=6$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ و } A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ با توجه به فرض ۳- گزینه ۳-۹۰۸}$$

نتیجه می شود ماتریس A باید 2×3 باشد تا ضرب های داده شده امکان پذیر باشند، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b+2c \\ e+2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+2c=2 \\ e+2f=3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b+3c \\ d+2e+3f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b+3c=1 \\ d+2e+3f=1 \end{cases}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ d-f \end{bmatrix}$$

 e, b را از چهار معادله فوق حذف می کنیم:

$$a+2(2-2c)+3c=1 \Rightarrow a-c=-3$$

$$d+2(3-2f)+3f=1 \Rightarrow d-f=-5$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

با توجه به فرض داریم: ۱- گزینه ۱-۹۰۹

$$AB = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u & v-x & w-y+z \\ 0 & \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}y-z \\ 0 & 0 & \frac{z}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ \frac{1}{2}x=1 \\ \frac{z}{4}=1 \\ v-x=0 \\ w-y+z=0 \\ \frac{1}{2}y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2, z=4, v=x=2, y=2z=8, w=8-4=4$$

$$B \text{ مجموع درایه های ماتریس } = u+x+y+z+v+w$$

$$= 1+2+8+4+2+4=21$$

گزینه ۴-۹۰۴

نکته برای هر دو ماتریس $A_{2 \times 2}$ و $B_{2 \times 2}$ درایه های قطر اصلی $A \times B - B \times A$ قرینه یکدیگرند.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times B - B \times A = \begin{bmatrix} bg - cf & \text{cloud} \\ \text{cloud} & -(bg - cf) \end{bmatrix}$$

با توجه به فرض و نکته فوق داریم:

$$A \times B - B \times A = \begin{bmatrix} 2a+3 & 10a-2 \\ 2a+5 & a-12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{\text{درایه های قطر اصلی قرینه اند.}} 2a+3 = -(a-12)$$

$$\Rightarrow 3a = 12-3=9 \Rightarrow a=3,$$

$$\text{مجموع درایه های قطر فرعی} = 2a+5+10a-2$$

$$= 12a+3 = 12 \times 3+3 = 39$$

ابتدا درایه های ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با فرض ۴- گزینه ۴-۹۰۵

$$a_{ij} \text{ را مشخص می کنیم: } a_{ij} = \frac{(-1)^i + (-1)^j}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \times (A+I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2A$$

با توجه به فرض، ماتریس $A^2 + B$ را تشکیل می دهیم: ۶- گزینه ۶-۹۰۶

$$A^2 + B = \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -9 & -4 \\ -4 & -5 & -9 \\ -9 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2ab-5 & a^2-9 & b^2-4 \\ b^2-4 & 2ab-5 & a^2-9 \\ a^2-9 & b^2-4 & 2ab-5 \end{bmatrix}$$

برای این که $A^2 + B$ ماتریس اسکالر باشد، باید داشته باشیم:

$$a^2-9=0 \Rightarrow a=\pm 3, b^2-4=0 \Rightarrow b=\pm 2$$

به ازای $a=3$ و $b=2$ مجموع درایه های ماتریس $A^2 + B$ بیشترین مقدار را دارد.

$$A^2 + B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه ها}} 7+7+7=21$$

گزینه ۳-۹۰۷

نکته رابطه A^2 با A و I در ماتریس های 2×2 اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

باشد، آن گاه داریم:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$





۹۱۰- گزینه ۲ ابتدا با توجه به فرض، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ 3a-a^2=0 \\ 3a-4=1 \end{cases}$$

تنها عدد $a=3$ در سه معادلهٔ فوق صدق می‌کند. به ازای این مقدار ماتریس B برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} c+1 & a+c \\ b & c-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+1 & 3+c \\ b & c-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بنا به فرض } B \text{ ماتریس قطری است.}} \begin{cases} c+3=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow b=0, c=-3$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های } B} -7$$

۹۱۱- گزینه ۳

ماتریس‌های تعویض‌پذیر: اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری که $A \times B = B \times A$ در این صورت B, A را ماتریس‌های تعویض‌پذیر می‌نامند و برخی از نکات این ماتریس‌ها به شرح زیر است:

(۱) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه همهٔ ماتریس‌های تعویض‌پذیر با A به صورت $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ می‌باشند.

(۲) ماتریس‌های قطری تعویض‌پذیرند.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

(۳) ماتریس‌های $A_{n \times n}$ و $I_{n \times n}$ همواره تعویض‌پذیرند:

$$(A \times I = I \times A = A)$$

(۴) برای ماتریس‌های تعویض‌پذیر اتحادهای جبری برقرار است؛ یعنی با فرض $AB = BA$ داریم:

الف $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

ب $(A+B) \times (A-B) = A^T - B^T$

پ $(A+B)^T = A^T + B^T$

ت $(A-B)^T = A^T - B^T$

ث $(A+B)(A^T - AB + B^T) = A^T + B^T$

ج $(A-B)(A^T + AB + B^T) = A^T - B^T$

(۵) چون $A_{n \times n}$ و $I_{n \times n}$ ماتریس‌های تعویض‌پذیر هستند، با فرض طبیعی بودن عدد k داریم:

$$(I+A)^k = \binom{k}{0}I + \binom{k}{1}A + \binom{k}{2}A^2 + \dots + \binom{k}{k}A^k$$

(۶) اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر و m و n اعداد طبیعی باشند، داریم:

$$\begin{cases} (A \times B)^n = A^n \times B^n \\ A^m \times B^n = B^n \times A^m \end{cases}$$

(۷) حاصل ضرب ماتریس اسکالر با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با آن خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} am & bm & cm \\ dm & em & fm \\ gm & hm & km \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -3 \\ 1 & -3 & x+1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

تعویض‌پذیرند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -3 \\ 1 & -3 & x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x-1 & x-1 \\ 6 & 2x-6 & 3x-2 \\ 6 & 3x-2 & 2x-6 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -3 \\ 1 & -3 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ x-1 & 2x-6 & 3x-2 \\ x-1 & 3x-2 & 2x-6 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = B \times A \Rightarrow x-1=6 \Rightarrow x=7$$

۹۱۲- گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$(A+B) \times (A-B) = A^T - B^T \Rightarrow A^T - A \times B + B \times A - B^T = A^T - B^T$$

$$\Rightarrow -AB + BA = \vec{0} \Rightarrow AB = BA$$

درایه‌های ماتریس B را مشخص می‌کنیم:

$$B = [b_{ij}]_{2 \times 2}, b_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ i+(-1)^i j & i \neq j \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

چون دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند، می‌نویسیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p+6 & -p+8 \\ 2q-3 & -q-4 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2p-q & 5 \\ 3p+4q & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2p+6=2p-q \\ -p+8=5 \\ 2q-3=3p+4q \\ -q-4=2 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول و چهارم $q=-6$ و از معادلهٔ دوم $p=3$ به دست می‌آید که در معادلهٔ سوم صدق می‌کنند؛ پس $pq=3(-6)=-18$ است.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $C \times B \rightarrow 4 + 10 - 1 = 13$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر ۱۳ است.

۹۱۵- گزینه ۲ با توجه به تساوی ماتریسی فرض، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b+c \\ ab+bc+ac \\ a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b+c=3, ab+bc+ac=1, x=a^2+b^2+c^2$$

به کمک اتحاد مربع سه جمله‌ای داریم:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$\Rightarrow 3^2 = x + 2 \Rightarrow x = 7$$

۹۱۶- گزینه ۱ در ماتریس داده‌شده از سمت چپ و راست می‌توانیم عمل فاکتورگیری انجام دهیم:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ماتریس‌های } B \text{ و } C \text{ را چنان تعیین کنیم که } A = B^T + C^T \text{ می‌باشد. می‌خواهیم}$$

$$A^T - 4A + 9I = \bar{O} \Rightarrow A^T + 9I = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}A^T + \frac{9}{4}I$$

۹۱۷- گزینه ۳ بنا به فرض $A^T - 4A + 9I = \bar{O}$ می‌باشد. می‌خواهیم

ماتریس‌های B و C را چنان تعیین کنیم که $A = B^T + C^T$ ، داریم:

$$A^T - 4A + 9I = \bar{O} \Rightarrow A^T + 9I = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}A^T + \frac{9}{4}I$$

$$= \left(\frac{1}{4}A\right)^T + \left(\frac{9}{4}I\right)^T \Rightarrow B = \frac{1}{4}A, C = \frac{9}{4}I$$

$$\Rightarrow BC = \left(\frac{1}{4}A\right) \times \left(\frac{9}{4}I\right) = \frac{9}{16}A$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^T = A^T = \dots = A^T = \bar{O}$$

۹۱۳- گزینه ۴ عبارت داده‌شده را به کمک فاکتورگیری از سمت چپ و راست به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-2BA^T B + 8BAB - 10B^T = -2B(A^T B - 4AB + 5B)$$

$$= -2B(A^T - 4A + 5I)B \quad (1)$$

$$\text{برای ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

$$A^T - (1+3)A + (1 \times 3 - (-1) \times 2)I = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^T = 4A - 5I \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow -2BA^T B + 8BAB - 10B^T = -2B \times \bar{O} \times B = \bar{O}$$

۹۱۴- گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس A ، ضرب دو ماتریس اول را B و ماتریس سوم را C می‌نامیم.
 $(\text{ستون اول } C) \times (\text{سطر اول } B) = \text{درایه سطر اول و ستون اول } A$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & -31 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 32 - 31 - 3 = -2$$

$$A \text{ درایه سطر دوم و ستون دوم} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -23 & 27 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -10$$

$$A \text{ درایه سطر سوم و ستون سوم} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & -13 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 25$$

$$13 = -2 - 10 + 25 = \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس } A$$

تیزبازی برای هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A و B ، حاصل جمع

درایه‌های قطر اصلی $A \times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B \times A$ برابر است.

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی $A = B \times C$ با مجموع درایه‌های قطر اصلی $C \times B$ یکی است، داریم:

$$C \times B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 15 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$





$$A^T = A^T A = I A = A$$

$$A^F = (A^T)^T = I^T = I, A^\Delta = A^F \times A = I \times A = A$$

و به طور کلی نتیجه می‌شود $A^{2n} = I, A^{2n-1} = A$

$$A + A^T + A^T + \dots + A^{100}$$

$$= (A + A^T + A^\Delta + \dots + A^{99}) + (A^T + A^F + \dots + A^{100})$$

$$= \underbrace{(A + A^T + \dots + A)}_{\text{تا } \Delta} + \underbrace{(I + I + \dots + I)}_{\text{تا } \Delta} = \Delta \cdot A + \Delta \cdot I$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}} \Delta \times \frac{1}{2} + \Delta \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \Delta \times \frac{1}{2} + \Delta \times \frac{1}{2} = 100$$

ماتریس A^T را به شرح زیر تشکیل می‌دهیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین A^T یک ماتریس اسکالر است.

توان‌های ماتریس را به شرح زیر تشکیل می‌دهیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2A^T$$

$$A^F = A^T A = 2A^T A = 2A^T = 2(2A^T) = 2^2 A^T$$

$$A^\Delta = A^F \times A = 2^2 A^T A = 2^2 A^T = 2^2 (2A^T) = 2^3 A^T$$

و به صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^{100} = 2^{99} A^T$

$$2^{-99} A^{100} = 2^{-99} \times 2^{99} A^T = A^T$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}} 2 + 1 + 1 = 4$$

گزینه ۲ - ۹۲۴

توان n ام ماتریس‌های قطری:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

الف

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

ب

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$B^{T^0} = (B^T)^{1\Delta} = (-4I)^{\Delta} = -2^{T^0} I$$

$$A^{T^0} + B^{T^0} = \bar{O} - 2^{T^0} I = -2^{T^0} I$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع درایه‌های ماتریس}} -2^{T^0} - 2^{T^0} = -2^{T^1}$$

گزینه ۱ - ۹۱۹ ماتریس A^T را به شرح زیر به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2x-1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2x-1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3x-3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

حاصل جمع قطر فرعی A^T = حاصل جمع قطر اصلی

$$\Rightarrow 1+1+1 = 3x-3+1 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

تیزبازی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ x & z & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ny & 1 & 0 \\ nx + \frac{n(n-1)}{2}yz & nz & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3x + \frac{3(3-1)}{2} \times 1 \times (-1) & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3x-3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

حاصل جمع قطر فرعی A^T = حاصل جمع قطر اصلی

$$\Rightarrow 1+1+1 = 3x-3+1+0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

گزینه ۱ - ۹۲۰ بنا به فرض $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد، داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, A^F$$

$$= A^T \times A = I \times A = A$$

گزینه ۱ - ۹۲۱ بنا به فرض $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ می‌باشد، داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$





گزینه ۱ - ۹۲۸

نکته اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^T = \bar{O}$ ، آن گاه $(I+A)^k = I + kA + \frac{k(k-1)}{2} A^2$ می باشد. (عدد طبیعی k)

بنابراین فرض $A^T = \bar{O}$ ؛ پس با توجه به نکته فوق داریم $(I+A)^6 = I + 6A$ در نتیجه:

$$A(I+A)^6 = A(I+6A) = A + 6A^2 = A + 6 \times \bar{O} = A + \bar{O} = A$$

گزینه ۲ - ۹۲۹ با توجه به فرض داریم:

$$BA = B \xrightarrow{\text{ضرب از راست}} BAB = B^2$$

$$\xrightarrow{(AB=A)} BA = B^2 \xrightarrow{BA=B} B = B^2$$

$$AB = A \xrightarrow{\text{ضرب از راست}} ABA = A^2$$

$$\xrightarrow{(BA=B)} AB = A^2 \xrightarrow{AB=A} A = A^2$$

$$A^2 = A \Rightarrow A^3 = A^2 A = AA = A^2 = A \dots, A^n = A$$

$$B^2 = B \Rightarrow B^3 = B^2 B = BB = B^2 = B \dots, B^n = B$$

A و I تعویض پذیرند؛ پس اتحاد زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} (I+A)^5 &= \binom{5}{0}I + \binom{5}{1}A + \binom{5}{2}A^2 + \binom{5}{3}A^3 + \binom{5}{4}A^4 + \binom{5}{5}A^5 \\ &= I + 5A + 10A^2 + 10A^3 + 5A^4 + A^5 \\ &= I + 5A + 10A + 10A + 5A + A = I + 31A \end{aligned}$$

گزینه ۲ - ۹۳۰ دو ماتریس A و B تعویض پذیرند، زیرا:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین اتحادهای جبری برای A و B برقرار است، داریم:

$$\begin{aligned} C &= A^2 - B^2 - 2A^2B + 2BA^2 = (A-B)^2 \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 \end{aligned}$$

درایه سطر اول و ستون سوم ماتریس C

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ - ۹۳۱

نکته تعیین درایه های قطر اصلی A^n وقتی که درایه های بالای قطر اصلی یا درایه های پایین قطر اصلی A صفر باشند:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ \text{cloud} & d^n \end{bmatrix}$$

الف

$$A^4 - A^3 + I \quad \text{می باشد، داریم:} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{بنا به فرض}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} (-1)^4 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{حاصل ضرب درایه های قطر اصلی} = 3 \times 3 \times 9 = 81$$

گزینه ۱ - ۹۲۵ ابتدا A^3 را به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$(A^3 + I)^4 = (\bar{O} + I)^4 = I^4 = I$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2M$$

$$\Rightarrow M^3 = M^2 M = 2MM = 2M^2 = 4M$$

$$M^4 = M^3 M = 4MM = 4M^2 = 16M, \dots, M^{16} = 2^{15}M$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

$$\Rightarrow N^{15} = (N^2)^7 N = (4I)^7 N = 2^{14}N$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{15} = \begin{bmatrix} 2^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

$$A = M^{16} - N^{15} - P^{15} = 2^{15}M - 2^{14}N - \begin{bmatrix} 2^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{15} & 2^{15} \\ 2^{15} & 2^{15} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2^{15} \\ 2^{15} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{12} + a_{21} = 0 + 0 = 0$$

گزینه ۲ - ۹۲۷ توان های ماتریس را تشکیل می دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} = -16I$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (-16I)^2 = 4^4 I, A^8 = (A^4)^2 = (4^4 I)^2 = 4^8 I$$

$$A^{12} = A^8 \times A^4 = 4^8 I \times 4^4 I = 4^{12} I, \dots, A^{2n} = 4^{2n} I$$

$$A^{2n} = 4^{2n} I \Rightarrow 4^{2n} = 4^{2n} \Rightarrow 2n = 2n \Rightarrow n = n$$

$$\Rightarrow 2 \times 2^{2n} = (2^2)^n \Rightarrow 2^{2n+1} = 2^{2n} \Rightarrow 2n+1 = 2n \Rightarrow n = -1$$

$$\Rightarrow 2n+1 = 2n \Rightarrow 2n = 2n \Rightarrow n = n$$

و حاصل کسر $\frac{2n+3}{n-2}$ برابر ۵ می شود.





$$(I + 2A)^T = I^T + 2AI + 2A^T = I + 2A + 2A^T = I + 2(A + A^T) = I$$

$$(I + 2A)^{10} = ((I + 2A)^T)^5 = I^5 = I$$

۹۳۵- گزینه ۴ فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -B$$

$$\Rightarrow A(AB) = A(-B) \Rightarrow A^T B = -AB$$

$$\xrightarrow{AB=-B} A^T B = -(-B) = B$$

$$\Rightarrow A(A^T B) = AB \Rightarrow A^T B = -B$$

$$\Rightarrow A(A^T B) = A(-B) = -AB \Rightarrow A^T B = -(-B) = B$$

$$A^n B = \begin{cases} B & \text{زوج } n \\ -B & \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow A^{1404} B = B$$

و در نتیجه:

۹۳۶- گزینه ۲ مقادیر نسبت‌های مثلثاتی را در درایه‌های A قرار می‌دهیم و A^T را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} \cos 12^\circ & -\sin 12^\circ \\ \sin 12^\circ & \cos 12^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow I + A + A^T = \bar{O} \quad (1)$$

$$B = A + A^T + A^T + \dots + A^{100} = A + (A^T + A^T + A^T + \dots + A^T)$$

$$+ (A^5 + A^6 + A^7 + \dots + (A^{98} + A^{99} + A^{100}))$$

$$= A + A^T(I + A + A^T) + A^5(I + A + A^T)$$

$$+ \dots + A^{98}(I + A + A^T)$$

$$\xrightarrow{(1)} B = A + A^T \times \bar{O} + A^5 \times \bar{O} + \dots + A^{98} \times \bar{O}$$

$$= A + \bar{O} = A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۹۳۷- گزینه ۲

دترمینان ماتریس‌های 2×2 : اگر A ماتریس مربعی مرتبه ۲ باشد، در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می‌دهیم

و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (\text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی}) - (\text{حاصل ضرب درایه‌های قطر فرعی})$$

$$= ad - bc$$

$|A|$ همواره یک عدد حقیقی مثبت، منفی یا صفر است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & \text{cloud} \\ c^n & d^n \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & c^n & e^n \\ \text{cloud} & \text{cloud} & \text{cloud} \end{bmatrix} \quad \text{پ}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & \text{cloud} & \text{cloud} \\ d^n & \text{cloud} & f^n \end{bmatrix} \quad \text{ت}$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} (-1)^4 & 0 & 0 \\ \text{cloud} & 2^4 & 0 \\ \text{cloud} & \text{cloud} & 3^4 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $(A^4 + I)$

$$= (-1)^4 + 2^4 + 3^4 + 1 + 1 + 1 = 1 + 16 + 81 + 3 = 101$$

$$A^T - A = -4I \quad \text{با توجه به فرض داریم:} \quad \text{۹۳۲- گزینه ۳}$$

$$\Rightarrow A^T = A - 4I, A^4 = A^T A^T = (A - 4I)(A - 4I)$$

$$\Rightarrow A^4 = A^T - 8AI + 16I^T = A^T - 8A + 16I$$

$$\xrightarrow{A^T = A - 4I} A^4 = A - 4I - 8A + 16I \Rightarrow A^4 = -7A + 12I$$

$$\Rightarrow A^5 = -7A^T + 12A = -7(A - 4I) + 12A = 5A + 28I$$

$$\Rightarrow A^5 - 5A = 28I$$

۹۳۳- گزینه ۳ درایه‌های ماتریس A را مشخص می‌کنیم و توان‌های آن را تشکیل می‌دهیم.

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2}, a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 2 & i = j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 6 = 2 \times 3^1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 18 = 2 \times 3^2$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 54 = 2 \times 3^3$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر 2×3^n است. بنا به فرض داریم:

$$2 \times 3^n = 1458 \Rightarrow 3^n = 729 = 3^6 \Rightarrow n = 6$$

۹۳۴- گزینه ۲ ابتدا A^T را تشکیل می‌دهیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -A$$

$$\Rightarrow A^T + A = \bar{O}$$





از معادله اول و چهارم $n = -3$ و از معادله دوم $m = 4$ به دست می آید که در معادله سوم صدق می کنند، داریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + B| = 6 \times 6 - 0 = 36$$

۹۳۸- گزینه ۴

برخی از ویژگی های دترمینان: (۱) اگر دو سطر یا دو ستون یک ماتریس 2×2 یا 3×3 برابر باشند، آن گاه دترمینان آن برابر صفر است، مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0, B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

برابری سطر اول و دوم

برابری ستون اول و دوم

$$\Rightarrow |B| = 0$$

(۲) اگر یک سطر یا ستون یک ماتریس 2×2 یا 3×3 ، k برابر شود، آن گاه دترمینان آن ماتریس k برابر می شود یا به عبارت دیگر اگر از یک سطر یا یک ستون ماتریس عدد k را فاکتور بگیریم، k در دترمینان ماتریس حاصل ضرب می شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = k|A|$$

(۳) برای هر دو ماتریس مربعی A و B از مرتبه n همواره داریم:

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| |B|$$

(۴) اگر A یک ماتریس مربعی و n عدد طبیعی باشد، آن گاه: $|A^n| = |A|^n$

(۵) اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه 2 و k یک عدد حقیقی باشد، آن گاه:

$$|kA| = k^2 |A|$$

(۶) اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه 3 و k یک عدد حقیقی باشد، آن گاه:

$$|kA| = k^3 |A|$$

(۷) اگر I ماتریس واحد 2×2 باشد، آن گاه $|kI| = k^2$ و اگر I ماتریس

واحد 3×3 باشد، آن گاه: $|kI| = k^3$

(۸) دترمینان هر ماتریس که درایه های بالای قطر اصلی یا پایین آن برابر صفر باشند، برابر حاصل ضرب درایه های قطر اصلی است.

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ y & t & 0 \\ z & u & w \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = xtw,$$

$$B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & t & u \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = xtw$$

ابتدا مقدار x را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\frac{1}{3}} + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{\frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{-1} + \log_{\frac{1}{5}} 5^{-1} \\ = -\log_{\frac{1}{3}} 3 + -\log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_3 3 + \log_5 5 = \log_3 3 \times 5 = \log_3 15$$

دترمینان ماتریس های 3×3 : دترمینان ماتریس های $A_{3 \times 3}$ را می توان برحسب سطر و ستون دلخواه نوشت که همه آن ها یک عدد ثابت یعنی همان $|A|$ می باشند. $|A|$ همواره سه جمله دارد و به صورت زیر به دست می آید. مثلاً محاسبه دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ برحسب سطر اول:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

محاسبه دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ برحسب سطر دوم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

یک محاسبه نیز برحسب ستون سوم می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

معمولاً بهتر است محاسبه دترمینان یک ماتریس روی سطر یا یک ستونی انجام شود که دارای درایه های صفر هستند.

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان های 3×3 : دو ستون اول و دوم ماتریس A را در کنارش می نویسیم. در این صورت دترمینان A برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی A و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی آن.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & x & y \\ m & n & p & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (xny + yp\alpha + zm\beta) - (\alpha n z + \beta p x + \gamma m y)$$

بنا به فرض، دو ماتریس A و B تعویض پذیرند؛ یعنی $AB = BA$ در نتیجه می توان نوشت:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m - n & -3 \\ 3m + n & 8 \end{bmatrix},$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m + 3 & 1 - m \\ 2n + 15 & 5 - n \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 2m - n & -3 \\ 3m + n & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m + 3 & 1 - m \\ 2n + 15 & 5 - n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m - n = 2m + 3 \\ -3 = 1 - m \\ 3m + n = 2n + 15 \\ 8 = 5 - n \end{cases}$$





$$A^{2^4} - 2A^4 + I = -A - 2(-I) + I = -A + 2I$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^{2^4} - 2A^4 + I| = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 6 + 1 = 7$$

۹۴۲- گزینه ۲: توان‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I, A^3 = A^2 A = -IA = -A,$$

$$A^4 = A^3 A = (-A)A = -A^2 = I, A^5 = A^4 A = IA = A$$

پس به صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^{2n} = (-1)^n I$ و $A^{2n+1} = (-1)^n A$ داریم:

$$|A^{2n} + A^{2n+1}| = |(-1)^n I + (-1)^n A| = (-1)^{2n} |A + I|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1 + 1 = 2$$

۹۴۳- گزینه ۳: ماتریس $A_{2 \times 2}$ را به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض داریم:

$$|A| = 4 \Rightarrow ad - bc = 4, a + d = \lambda + (b + c)$$

$$\Rightarrow (a + d) - (b + c) = \lambda$$

$$B = \begin{bmatrix} x + a & x + b \\ x + c & x + d \end{bmatrix}, |B| = -4$$

$$\Rightarrow (x + a)(x + d) - (x + c)(x + b) = -4$$

$$\Rightarrow x^2 + (a + d)x + ad - x^2 - (b + c)x - bc = -4$$

$$\Rightarrow \underbrace{((a + d) - (b + c))x}_{\lambda} + \underbrace{ad - bc}_{4} = -4$$

$$\Rightarrow \lambda x + 4 = -4 \Rightarrow \lambda x = -8 \Rightarrow x = -1$$

۹۴۴- گزینه ۱

نکته اگر $A_{m \times n} \times B_{n \times m} = C_{m \times m}$ به طوری که $m > n$ باشد، آنگاه دترمینان C برابر صفر است، زیرا با اضافه کردن ستون و سطر با درایه‌های صفر به همان ماتریس C می‌رسیم. مثال زیر:

$$A_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, B_{1 \times 3} = [d \ e \ f] \Rightarrow C_{3 \times 3} = A_{3 \times 1} \times B_{1 \times 3}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{3 \times 3} = A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 3}$$

$$\Rightarrow |C_{3 \times 3}| = |A_{3 \times 3}| |B_{3 \times 3}| = 0 \times 0 = 0$$

بنا به فرض $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

توجه به نکته فوق نتیجه می‌شود $|BC| = 0$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$D = A^1 BC \Rightarrow |D| = |A^1| \underbrace{|BC|}_{\text{صفر}} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3^x & 27^x \\ 3^{-x} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{\log_3 10} & 27^{\log_3 10} \\ 3^{-\log_3 10} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3^{\log_3 10} \\ \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 1000 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 10 - 1000 = -990$$

و نهایتاً داریم: $|\frac{1}{5}A| = (\frac{1}{5})^2 |A| = \frac{1}{25} \times (-990) = \frac{-118}{5} = -3\frac{1}{5}$

۹۳۹- گزینه ۳: درایه‌های ماتریس A را مشخص می‌کنیم:

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2}; ia_{ij} + ja_{ji} = i^2 + j^2 \Rightarrow a_{11} + a_{11} = 1 + 1 \Rightarrow a_{11} = 1$$

$$2a_{22} + 2a_{22} = 2^2 + 2^2 \Rightarrow 4a_{22} = 8 \Rightarrow a_{22} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \times a_{12} + 2a_{21} &= 1^2 + 2^2 \\ 2a_{11} + a_{12} &= 2^2 + 1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{12} + 2a_{21} = 5 \xrightarrow{a_{21}=x} a_{12} = 5 - 2x$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 - 2x \\ x & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \times 2 - x(5 - 2x) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$|2A| = 2^2 |A| = 4(2x^2 - 5x + 2) = 8((x - \frac{5}{4})^2 - \frac{9}{16})$$

به ازای $|2A|$ ، کم‌ترین مقدار را دارد:

$$\min(|2A|) = 8 \times (-\frac{9}{16}) = -\frac{9}{2}$$

۹۴۰- گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \\ d & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + 12 & 29 \\ 7d + 4 & d + 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + 3 + d & 2a + 3b + 2 \\ a + c + bd & 2 + bc + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + 12 & 29 \\ 7d + 4 & d + 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3 + d = d + 12 \\ 2a + 3b + 2 = 29 \\ a + c + bd = 7d + 4 \\ 2 + bc + 2b = d + 21 \end{cases} \xrightarrow{\text{از معادله اول}} a^2 = 9$$

$$\Rightarrow a = \pm 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

$a = 3$ را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$2 \times 3 + 3b + 2 = 29 \Rightarrow 3b = 29 - 6 - 2 = 21 \Rightarrow b = 7$$

$$\text{معادله سوم: } 3 + c + 7d = 7d + 4 \Rightarrow c = 1$$

$$\text{معادله چهارم: } 2 + 7 \times 1 + 2 \times 7 = d + 21 \Rightarrow d = 2$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 3 \times 2 - 7 \times 1 = -1$$

پس:

۹۴۱- گزینه ۳: توان‌های $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^4 = (A^3)^T = (-I)^T = -I,$$

$$A^{2^4} = (A^4)^{11} A = (-I)^{11} A = -A$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{9}+k & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2k}{3} & k+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k \\ k^2 & -2k \end{bmatrix} \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (1-2) + \frac{2}{3} \times (0+6) - (0+3) = -1+4-3=0$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ بنا به فرض ۳ گزیده ۹۴۹}$$

می باشد. عبارت داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$ACA + BCB = ACB + BCA + I$$

$$\Rightarrow ACA - ACB + BCB - BCA = I$$

$$\Rightarrow AC(A-B) - BC(A-B) = I$$

$$\Rightarrow (AC-BC)(A-B) = I \Rightarrow (A-B)C(A-B) = I$$

$$\Rightarrow |(A-B)C(A-B)| = |I|$$

$$\Rightarrow |A-B||C||A-B| = 1 \quad (۱)$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-B| = -2 \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (-2)|C|(-2) = 1 \Rightarrow |C| = \frac{1}{4}$$

۹۵۰- گزیده ۳ درمیان A را به شرح زیر محاسبه می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} |A| & -13 & 8 \\ 1 & |A| & 1 \\ 1 & 2 & |A| \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = |A| \begin{vmatrix} |A| & 1 & 1 \\ 2 & |A| & 1 \\ 1 & |A| & 2 \end{vmatrix} + 13 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & |A| & 1 \\ 1 & 2 & |A| \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & |A| & 1 \\ 1 & 2 & |A| \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = |A|^3 - 2|A| + 13|A| - 13 + 16 - 8|A|$$

$$\Rightarrow |A|^3 + 2|A| + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (|A|+1)(|A|^2 - |A| + 3) = 0 \Rightarrow |A| = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -13 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I = \begin{bmatrix} 0 & -13 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I| = -13+16=3$$

۹۵۱- گزیده ۴ ابتدا |A| را محاسبه می کنیم:

$$|A|A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & |A|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A|A\| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & |A|^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|^3|A| = 2|A|^3 - 4 + 4 + 8$$

$$\Rightarrow |A|^4 - 2|A|^2 - 8 = 0 \Rightarrow (|A|^2 - 4)(|A|^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 4 \Rightarrow |A| = \pm 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \text{ بنا به فرض ۳ گزیده ۹۴۵}$$

بیابیم که $|A+XI| = 0$ داریم:

$$A+XI = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+X & 2 & 1 \\ 0 & X-1 & -2 \\ -3 & -4 & -5+X \end{bmatrix}$$

$$|A+XI| = 0$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط روی}} (X-1)(X^2-2X-15+3) + 2(-12-4X+6) = 0$$

$$\Rightarrow X^3 - 2X^2 - 12X - X^2 + 2X + 12 - 12 - 8X = 0$$

$$\Rightarrow X^3 - 3X^2 - 18X = 0 \Rightarrow X(X^2 - 3X - 18) = 0$$

$$\Rightarrow X(X-6)(X+3) = 0 \Rightarrow X = -3 \text{ یا } X = 0 \text{ یا } X = 6$$

پس بیشترین مقدار X برابر ۶ است.

۹۴۶- گزیده ۲ ابتدا درایه های ماتریس داده شده را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1-2b \end{bmatrix}$$

$$\text{فرض } |A| = 0 \Rightarrow 2(-1-2b) + 4 = 0 \Rightarrow -2-4b+4 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -2(2-\frac{1}{2}) = -4+1 = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ b+1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ برای این که ۴ گزیده ۹۴۷}$$

اسکالر باشد، باید داشته باشیم:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1, b+1=0 \Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & -a \\ b & 2 & -b \\ a & 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = 1 - (-1-1) - (-1-2) = 6$$

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}AB^T| = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \|A\| \|B^T\| = \frac{1}{2} \times 1 \times \|B\| = \frac{-36}{2} = -\frac{9}{2}$$

۹۴۸- گزیده ۲ از تساوی ماتریسی داده شده مقدار k را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ k & -1 \end{bmatrix}, A(A-I) = k(A-I)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ k & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ k & -2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ k & -2 \end{bmatrix}$$





$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -9 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$|AB + I| = 1 \times (64 - 45) = 19$$

گزینه ۴ - ۹۵۵ مقدار a را از معادلهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4 + (-2a - 2 + 4) + 3(-2 - 0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی} = (1+2+3) + (2+0-4) + (3-4+1) = 6-2+0 = 4$$

گزینه ۱ - ۹۵۶ روش اول: اگر در دترمینان داده‌شده قرار دهیم $a = b = c = 1$ ، دترمینان صفر می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc - a^2 \\ 1 & b & ac - b^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

به ازای این مقادیر a, b و c مقدار گزینه‌های ۲ و ۳ برابر عدد ۱ و ۳ می‌شود؛ پس این دو گزینه قابل قبول نیستند. حال قرار می‌دهیم $a = 1, b = 0$ و $c = -1$ و مجدداً مقدار دترمینان صفر می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc - a^2 \\ 1 & b & ac - b^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 + 1 = 0$$

اما مقدار $(a-b)(b-c)(c-a)$ به ازای این مقادیر برابر -2 می‌شود؛ پس قابل قبول نیست و ۱ درست است.

روش دوم: دترمینان را روی ستون اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc - a^2 \\ 1 & b & ac - b^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix} = ab^2 - bc^2 - ac^2$$

$$+ b^2c - a^2b + ac^2 + bc^2 - ca^2 + a^2c - ab^2 - b^2c + ba^2$$

$$= (ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + a^2c + ba^2)$$

$$-(ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + a^2c + ba^2) = 0$$

گزینه ۲ - ۹۵۷

وارون ماتریس‌های 2×2 : ماتریس B را وارون ماتریس A گویند، هرگاه:

$$AB = BA = I$$

ماتریس B را با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم.

نتیجهٔ ۱: اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد، همواره داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

الف $|A| = 2 \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع درایه‌های}} \frac{7}{2}$$

ب $|A| = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع درایه‌های}} -\frac{7}{2}$

گزینه ۱ - ۹۵۲ ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 18 \\ -60 & 9 & -12 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 6 & 18 \\ -60 & 9 & -12 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 18|A|(-4) = -12 \times 60 - 6(-144) + 18(-192)$$

$$\Rightarrow |A| = 10 - 12 + 48 = 46$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 18 \\ -60 & 9 & -12 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ a_{33} ، درایهٔ سطر اول و ستون سوم طرف اول تساوی فوق را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 18 \\ -60 & 9 & -12 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 3a_{33} = 18$$

پس $3a_{33} = 18$ و در نتیجه $a_{33} = 6$ و $a_{33} = 6 = 46 - 6 = 40$.

گزینه ۳ - ۹۵۳ با نوشتن بسط دترمینان، معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} -x & 2 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ x & -x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -x(2\sqrt{3} + 2x) - 2(-2 - 2x) + \sqrt{3}(x - \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{3}x - 2x^2 + 4 + 4x + \sqrt{3}x - 3x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - 4 = 0$$

معادلهٔ فوق دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است و حاصل ضرب آن‌ها برابر است با:

$$x_1 x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

گزینه ۲ - ۹۵۴ درایه‌های دو ماتریس را مشخص می‌کنیم:

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}; a_{ij} = \begin{cases} i & i > j \\ 1 & i = j \\ -1 & i < j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = [a_{ij} - i]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} - 1 & a_{13} - 1 \\ a_{21} - 2 & a_{22} - 2 & a_{23} - 2 \\ a_{31} - 3 & a_{32} - 3 & a_{33} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$





$$\Rightarrow A - I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$|A - I| = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۹۶۰- گزینه ۴

ویژگی‌های ماتریس‌های وارون‌پذیر:

(۱) وارون وارون یک ماتریس، خود آن ماتریس است؛ یعنی:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(۲) اگر k یک عدد حقیقی مخالف صفر و A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

(۳) اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(۴) اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(۵) اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر و n عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

(۶) اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$|A^{-1} + B^{-1}| = \frac{|A + B|}{|A||B|}$$

(۷) اگر P یک ماتریس وارون‌پذیر 2×2 و A یک ماتریس 2×2 باشد، آن‌گاه:

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP \quad (n \text{ عدد طبیعی})$$

(۸) اگر ماتریس مربع A چنان باشد که $A^{n-1} \neq \bar{O}$ و $A^n = \bar{O}$ (عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک)، آن‌گاه داریم:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$$

ابتدا دترمینان ماتریس $A_{2 \times 2}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{3}A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ |A|+3 & -|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |\sqrt{3}A| = \begin{vmatrix} |A| & 3 \\ |A|+3 & -|A| \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^2 |A| = -|A|^2 - 3(|A| + 3)$$

$$\Rightarrow 3|A| = -|A|^2 - 3|A| - 9$$

$$\Rightarrow |A|^2 + 6|A| + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (|A| + 3)^2 = 0 \Rightarrow |A| = -3$$

$$|A|(3A)^{-1} = |A|^2 \left| \frac{1}{3} A^{-1} \right| = \frac{|A|^2}{9} |A^{-1}|$$

$$= \frac{|A|^2}{9} \times \frac{1}{|A|} = \frac{|A|}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

۹۶۱- گزینه ۲ ماتریس $A_{2 \times 2}$ را از تساوی ماتریس داده‌شده به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_B A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_D \Rightarrow BAC = D$$

$$\Rightarrow A^{-1}B^{-1}(BAC) = A^{-1}B^{-1}D$$

نتیجه ۲: اگر ماتریس‌های مربعی A و B چنان باشند که $AB = I$ (یا $BA = I$)، آن‌گاه A و B وارون یکدیگرند.دستور محاسبه A^{-1} برای $A_{2 \times 2}$: با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برای A به دست آوردن A^{-1} ابتدا جای درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را عوض می‌کنیم. سپس درایه‌های قطر فرعی آن را قرینه می‌کنیم و نهایتاً ماتریس اخیر را در عدد $\frac{1}{|A|}$ ضرب می‌کنیم؛ یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته ماتریس وارون $A_{2 \times 2}$ در صورت وجود منحصر به فرد است و وارون ماتریس A^{-1} برابر A است $((A^{-1})^{-1} = A)$.
 شرط وجود A^{-1} برای $A_{2 \times 2}$: ماتریس A وارون‌پذیر است، هرگاه دترمینان A مخالف صفر باشد ($|A| \neq 0$)

با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ می‌خواهیم وارون ماتریس A^{-1} را به دست آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow A^{1404} = (A^2)^{702} = I^{702} = I$$

$$2A + A^{1404} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (2A + A^{1404})^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

۹۵۸- گزینه ۴ بنا به فرض $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، می‌خواهیم ماتریس X را از تساوی ماتریسی زیر به دست آوریم:

$$AX = A - I \xrightarrow{\text{ضرب از چپ } A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1}(A - I)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}A - A^{-1}I \Rightarrow IX = I - A^{-1}$$

$$\Rightarrow X = I - A^{-1} = I - \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \text{ مجموع درایه‌های ماتریس } X = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} + 0 = 2$$

۹۵۹- گزینه ۲ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A^{-1} + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-1-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

