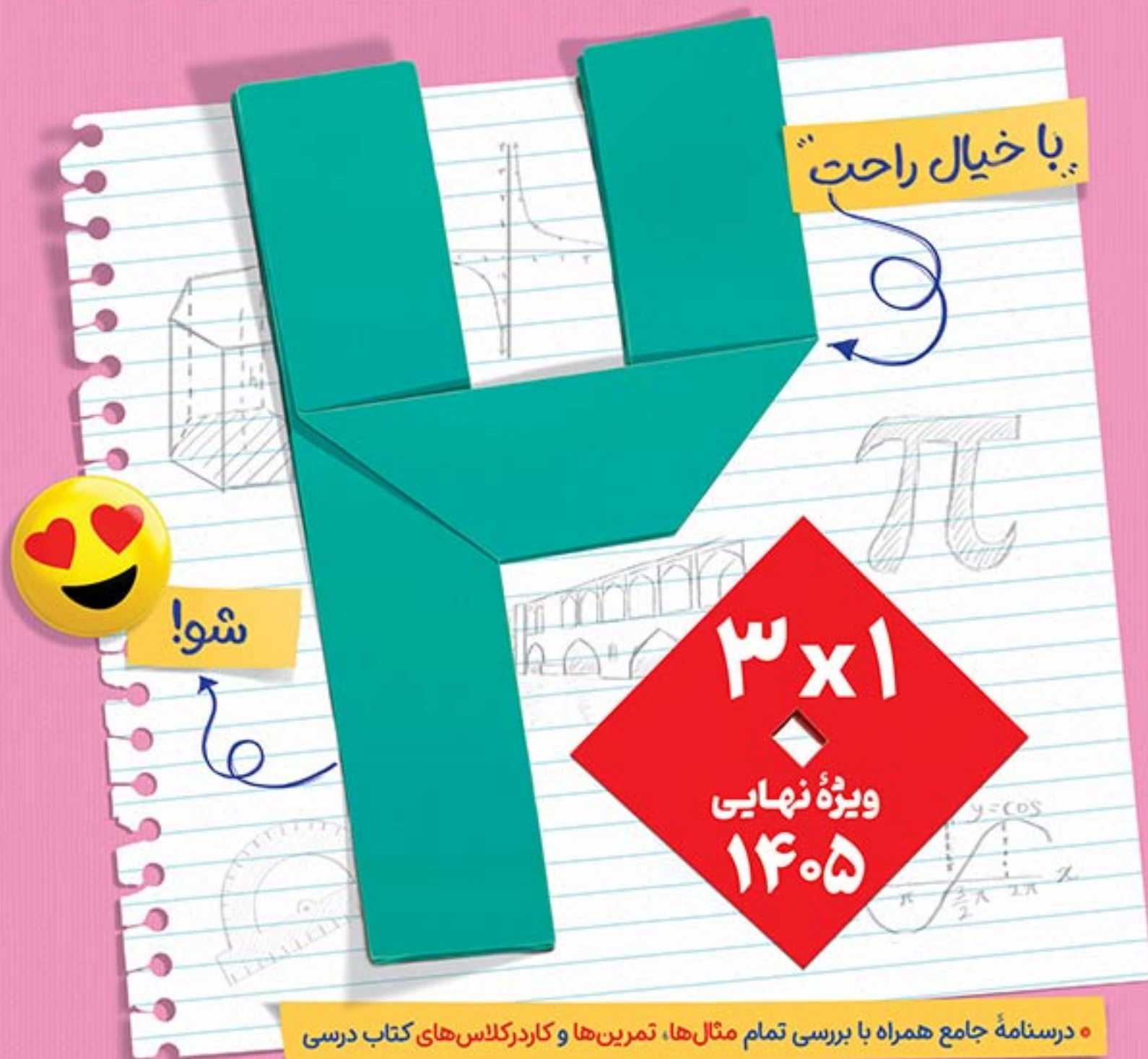




• درسنامه جامع همراه با بررسی تمام مثال‌ها، تمرین‌ها و کاردرکلاس‌های کتاب درسی

• بیش از ۱۰۳۰ سؤال متنوع امتحانی شامل سؤالات +۲۰ ویژه دانش‌آموزان سخت‌کوش

خلاصه کپسولی



+ ۱۳ کاربرگ امتحانی



مقدمه

دوستان خوب یازدهمی من، سلام!

من با مشورت بهترین دبیران ریاضی کشور و تجربه بیش از ۲۵ سال توی تدریس درس ریاضی، تصمیم گرفتم مجموعه‌ای رو براتون گردآوری کنم که با مطالعه اون در امتحانات تشریحی، همه سؤالا براتون تکراری باشه؛ پس با خیال راحت شروع به مطالعه این اثر کنید تا با زحمت شما و توکل به خدای مهربون، نمره ۲۰ رو کنار درس ریاضی ۲ در کارنامتون ثبت کنید.

ساختار بیست‌یک

این مجموعه شامل: ۱ کتاب پرسؤال ۲ کاربرگ امتحانی و ۳ خلاصه‌کپسولی هست.

۱ کتاب پرسؤال

در کتاب پرسؤال، فصل‌به‌فصل و بسته‌به‌بسته مطابق ساختار کتاب درسی، درسنامه و سؤالای مربوط به اون آورده شده. اول هر فصل یک کادر مشاوره براتون آوردم تا با ساختار کلی فصل و مباحثی که قراره بخونید، آشنا بشید. درسنامه‌ها، بهتون کمک می‌کنن تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی رو خیلی شیک و مجلسی یاد بگیرین، چون مطالب درسی رو در قالب جدول و متن‌های ساده چیدمان کردم تا با آرامش، روی مطالب تمرکز کنید و از مطالعه اون‌ها لذت کافی رو ببرین. حفظیات: در پایان هر فصل، همه مطالبی که باید بلد باشین رو به جا براتون آوردم؛ در واقع کل فصل تو یه صفحه جمع شده، بخونید و حالشو ببرید. سؤالای کتابتون کارکشته و حرفه‌ای هستن؛ این قسمت از کتاب رو متنوع و باب‌میل تمام بچه‌ها نوشته‌ام، طوری که مطمئن باشین از این همه تنوع در سؤالا حظ می‌کنین.

باورتون نمیشه نه؟ خب بفرمایین، این شما و این هم تنوع تیپ‌های پرسشی این کتاب!

سؤالات جای خالی: این تیپ از سؤالا بهتون کمک می‌کنن که با متن کتاب درسی و تمام زیروبمش آشنا بشین.

سؤالات درست و نادرست: جملاتی در امتحان به شما داده میشه و فقط باید بگین تک تک جمله‌ها درست هستن یا نه؛ به همین سادگی!

سؤالات چهارگزینه‌ای: این تیپ از سؤالا بوی کنکور رو میدن، از همین الان می‌تونید میخ کنکورتون رو بکوبید! البته پای این نوع سؤالا هم به امتحانای تشریحی باز شده، پس خوب حواستون رو جمع کنید.

در آخر هم باید بهتون یادآوری کنم، این‌که بتونید برای هر سؤال پاسخ تشریحی درست بنویسید، توی امتحانتون خیلی مهمه، ولی حواستون باشه باید پاسخ سؤالا رو تو پاسخ‌برگ امتحانی، تمیز بنویسید.

۲ کاربرگ امتحانی

در کاربرگ امتحانی، با چند سری امتحان روبه‌رو هستین که شامل امتحانات فصل‌به‌فصل، دو امتحان نوبت اول و امتحانات نهایی اخیر هست. تمام تلاشم رو کردم که محتوا و ظاهر همه امتحان‌ها بیشترین شباهت رو به امتحان نهایی داشته باشه.

۳ خلاصه‌کپسولی

یک محتوای فوق‌العاده مفید برای مرور و جمع‌بندی! انگار یه فرمول‌نامه و خلاصه کامل از همه مطالب مهمی که باید بلد باشین، یه جا جمع شده! با این خلاصه‌کپسولی می‌ترکونین! 😊

سخن پایانی

در پایان، وظیفه خود می‌دانم از همه همکاران محترم، زحمت‌کش و خلاق مهروماه، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم که در گردآوری این مجموعه، سنگ‌تمام گذاشتند؛ بهترین‌ها را برای این عزیزان و نیز برای شما آرزومندم.

با احترام، میرجلیلی

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۴۲۹. اگر $f = \{(1, 2)\}$ و $g = \{(1, 4)\}$ ، آن‌گاه $f + g = \{(2, 6)\}$.

۴۳۰. اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ، آن‌گاه $D_{f+g} = \mathbb{R}$ است.

۴۳۱. اگر f و g دو تابع حقیقی باشند، آن‌گاه همواره $D_{f+g} = D_{f-g}$ است.

۴۳۲. برد تابع‌های $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ یکسان است.

۴۳۳. مجموع دو تابع خطی، یک تابع خطی است.

سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۴۳۴. اگر دامنه تابع f ، برابر $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $y = 3f(x-1)$ ، برابر است.

۴۳۵. اگر برد تابع f ، برابر $[-1, 2]$ باشد، برد تابع $y = -2f(x)$ به صورت است.

۴۳۶. اگر f و g دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x+1$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ باشند، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ ، برابر است.

۴۳۷. اگر $f(x) = 2^{x+1}$ و $g(x) = 3-x$ باشد، آن‌گاه مقدار $(2f+g)(-1)$ ، برابر است با

۴۳۸. برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار تابع f را نسبت به قرینه کنیم.

سؤالات چهارگزینه‌ای

گزینه درست را انتخاب کنید.

۴۳۹. اگر $f = \{(1, 3), (2, -4), (3, 6)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ باشد، حاصل $(\frac{2f}{g})(2)$ کدام است؟

- ۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۸ ۴) ۸

۴۴۰. اگر $f = \{(0, -2), (-1, 3), (4, 0), (1, 4), (-2, 0)\}$ و $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ باشد، در این صورت تابع $\frac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۴۱. هرگاه $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = 3x + 1$ باشد، مقدار $(\frac{f-g}{f+g})(-1)$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

مسائل

۴۴۲. در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع داده شده را بیابید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)
الف) $g(x) = \frac{1}{x-2}$ ، $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = x^2 - x$ ، $f(x) = x^2 - 4$

پ) $g(x) = \frac{x-4}{x+6}$ ، $f(x) = x^2 + 3x$

ت) $g(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+3}}$ ، $f(x) = x^2 - 2x$

۴۴۳. اگر دو تابع f و g به صورت $f = \{(0, 1), (1, -2), (2, 3)\}$ و $g = \{(0, 3), (2, 0), (3, 2)\}$ تعریف شده باشند، دامنه و رابطه‌های $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ را بیابید.

۴۴۴. اگر $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ و $g = \{(-2, 1), (0, 3), (-3, 0), (4, 7)\}$ باشد، دامنه و رابطه‌های $\frac{f}{g}$ ، $\frac{g}{f}$ ، $f+g$ را بیابید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)
۴۴۵. با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2 - \sqrt{x}$

ب) $y = 1 + 2\sqrt{x-1}$

پ) $y = 3 - 2\sqrt{x+1}$

ت) $y = -\sqrt{-x}$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۴۶. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 1 - \frac{2}{x}$

ب) $y = 1 + \frac{2}{x-3}$

پ) $y = -2|x-1|$

ت) $y = 3 + 2|x+1|$

۴۴۷. اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$ ، مطلوب است:

الف) $(2f-g)(7)$

ب) محاسبه دامنه تابع $\frac{f}{g}$

فصل ششم

حد و پیوستگی



مشاوره: توی این فصل می‌خوایم با یکی از مفاهیم اساسی ریاضی، یعنی حد و پیوستگی آشنا بشیم. این مبحث شروعی برای فصل‌های مهم کتاب دوازدهمه. در زبان لاتین، حد رو با "limit" که به معنای محدود کردن است، نمایش میدن. شاید بتونیم حد و پیوستگی رو شروع ریاضیات عالی بدونیم.

از این فصل تو امتحانای نهایی ۳/۵ نمره و در امتحانای جبرانی شهریور و دی‌ماه، ۳ نمره سؤال مطرح میشه. این فصل کتاب درسی رو به ۴ بسته مجزا تقسیم‌بندی کردیم تا با تموم جزئیات این فصل به‌طور کامل و واضح آشنا بشید.

بسته	مباحثی که می‌خوانید	تعداد سؤالات در خرداد ۱۴۰۲	تعداد سؤالات در خرداد ۱۴۰۳
۱	فرایندهای حدی و مفهوم حد (صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۷ کتاب درسی)	-	۱
۲	قضایای حد و محاسبه حد توابع (صفحه ۱۲۸ تا ۱۳۱ کتاب درسی)	۱	۱
۳	محاسبه حد توابع گویا در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ (صفحه ۱۳۲ تا ۱۳۶ کتاب درسی)	۲	۱
۴	پیوستگی (صفحه ۱۳۷ تا ۱۴۲ کتاب درسی)	۱	۲

درس اول

فرایندهای حدی

فرایندهای حدی و مفهوم حد

بسته ۱

مفهوم میل کردن

تابع $f(x) = 3x$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مقادیر مختلف تابع f را در نزدیکی $x = 4$ بررسی کنیم. برای بررسی رفتار تابع f در اطراف نقطه $x = 4$ ، تعدادی نقطه را در دو طرف $x = 4$ انتخاب کرده و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود.										از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود.									
۵	۴/۵	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	...	$\rightarrow 4 \leftarrow$	...	۴/۹۹۹	۳/۹۹۹	۳/۹۹	۳/۹	۳/۵	۳	x					
۱۵	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۰۳	۱۲/۰۰۳	...	$\rightarrow 12 \leftarrow$	...	۱۱/۹۹۹۷	۱۱/۹۹۷	۱۱/۹۹	۱۱/۹	۱۱/۵	۹	f(x)					

$f(x)$ با مقادیر بیشتر از ۱۲ به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود. $f(x)$ با مقادیر کمتر از ۱۲ به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

در نمودار بالا در حالت اول، x با مقادیر بیشتر از ۴، به عدد ۴ نزدیک می‌شود. این وضعیت را با نماد $x \rightarrow 4^+$ نمایش می‌دهیم. در حالت دوم، x با مقادیر کمتر از ۴، به عدد ۴ نزدیک می‌شود. این وضعیت را با نماد $x \rightarrow 4^-$ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، وقتی x خیلی به عدد ۴ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f به عدد ۱۲ نزدیک می‌شوند. این وضعیت را به صورت $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 12$ نمایش می‌دهیم؛ پس در حقیقت، مفهوم حد به معنی نزدیک شدن است.

میل کردن از راست و چپ

الف) اگر x با مقادیر بیشتر از a به عدد a نزدیک شود، در این حالت می‌گوییم x از سمت راست به عدد a میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \rightarrow a^+$

ب) اگر x با مقادیر کمتر از a به عدد a نزدیک شود، در این حالت می‌گوییم x از سمت چپ به عدد a میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \rightarrow a^-$

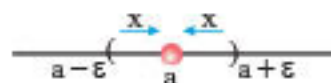
تذکره: علامت مثبت و منفی بالای عدد a به معنی مثبت یا منفی بودن عدد نیست؛ بلکه به معنای مقادیر بیشتر و کمتر از عدد a است.

تعریف: اگر x بتواند هم با مقادیر بیشتر از a و هم با مقادیر کمتر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این حالت می‌گوییم x به سمت عدد a میل می‌کند و

می‌نویسیم: $x \rightarrow a$

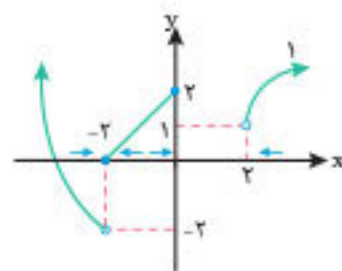
تذکره: وقتی می‌گوییم x به سمت عدد a میل کرده است، به این معنی است که x بسیار بسیار به عدد a نزدیک شده است؛ ولی خود عدد a نیست.

شکل مقابل را ببینید:



در نمودار بالا، ε (اپسیلن) عدد حقیقی و مثبت و بسیار بسیار کوچک است. ($0 < \varepsilon < 1$)

مثال: در شکل مقابل، x با مقادیر بیشتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود و در نتیجه $x \rightarrow 2^+$ ؛

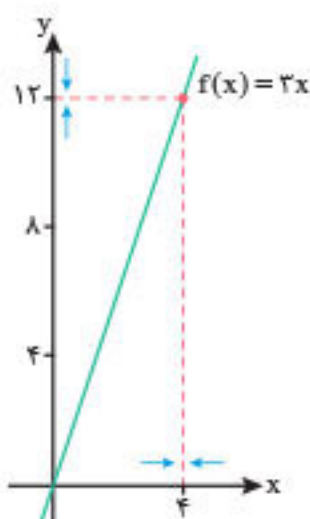


همچنین x با مقادیر کمتر از صفر به عدد صفر نزدیک می‌شود و در نتیجه $x \rightarrow 0^-$ ؛ ولی برای $x = -2$ ، هم با مقادیر بیشتر از -۲ و هم با مقادیر کمتر از -۲

به عدد -۲ نزدیک می‌شود و در نتیجه $x \rightarrow -2$.



مفهوم حد راست و حد چپ



در قسمت «مفهوم میل کردن»، رفتار تابع $f(x) = 3x$ را در اطراف نقطه $x = 4$ بررسی کردیم. حالا با رسم نمودار تابع f داریم:

۱ وقتی $x \rightarrow 4^-$ ، مقادیر تابع f به مقدار دلخواه به عدد ۱۲ نزدیک می‌شوند؛ در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی x از سمت چپ به عدد ۴ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 12$$

۲ به طور مشابه وقتی $x \rightarrow 4^+$ ، باز هم مقادیر تابع f به مقدار دلخواه به عدد ۱۲ نزدیک می‌شوند؛ در این حالت هم می‌گوییم حد تابع f وقتی x از سمت راست به عدد ۴ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 12$$

۳ اگر حد راست و حد چپ تابع در یک نقطه، موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد. در این مثال، حد راست و حد چپ تابع وقتی x به سمت عدد ۴ نزدیک می‌شود، موجود و برابر ۱۲ است. به طور خلاصه می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 12$$

حد راست: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (x_0, b) تعریف شده باشد. حد راست تابع f در x_0 برابر عدد L_1 است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آن که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود؛ در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$$

حد چپ: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) تعریف شده باشد. حد چپ تابع f در x_0 برابر L_2 است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آن که x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود؛ در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$$

❗ **قضیه:** وجود حد در نقطه x_0 : شرط لازم و کافی برای این که تابع f در نقطه x_0 دارای حد باشد، آن است که حد راست و حد چپ در این نقطه موجود و با هم برابر باشند؛ یعنی:

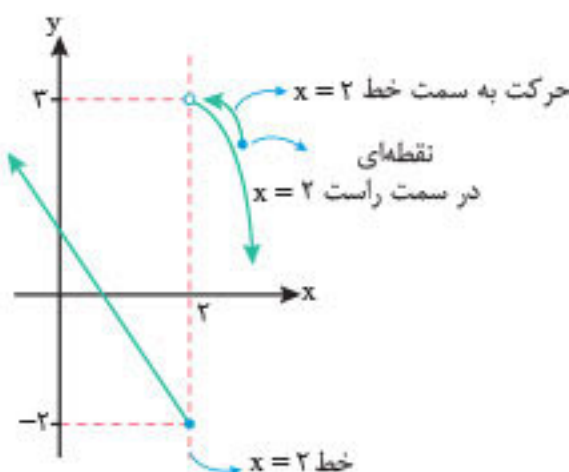
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2, L_1 = L_2 \Leftrightarrow \text{تابع } f \text{ در نقطه } x_0 \text{ حد دارد.}$$

حد: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a, b) شامل نقطه x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در نقطه x_0 برابر عدد L است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن که x (از هر دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود؛ در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

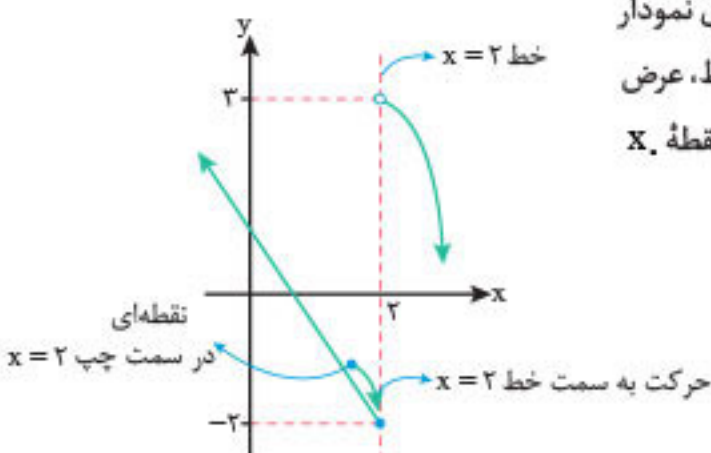
❏ **نتیجه:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ است، اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ باشد.

محاسبه حد از روی نمودار



برای محاسبه حد راست تابع f در نقطه x_0 ، کافی است در سمت راست x_0 نقطه‌ای را روی نمودار تابع f در نظر گرفته و از آن جا به سمت خط $x = x_0$ حرکت کنید و به محض رسیدن به این خط، عرض آن نقطه را چه تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، چه تعریف نشده باشد؛ یعنی به لحاظ ظاهری چه آن نقطه توپر باشد و چه توخالی، به عنوان حد راست تابع f در نقطه x_0 انتخاب کنید. ببینید:

وقتی از سمت راست به خط $x = 2$ رسیدیم، عرض نقطه ۳ است؛ پس $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$.



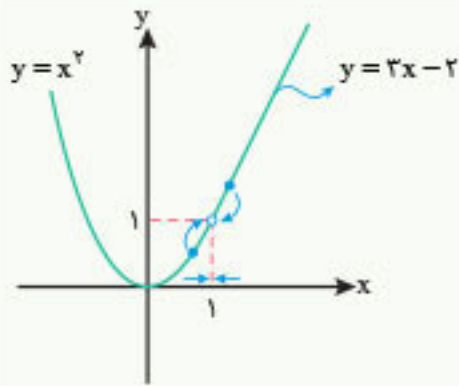
برای محاسبه حد چپ تابع f در نقطه x_0 هم کافی است در سمت چپ x_0 نقطه‌ای را روی نمودار تابع f در نظر گرفته و از آن جا به سمت خط $x = x_0$ حرکت کنید و به محض رسیدن به این خط، عرض آن نقطه را (از نظر ظاهری روی نمودار چه توپر و چه توخالی) به عنوان حد چپ تابع f در نقطه x_0 انتخاب کنید. ببینید:

وقتی از سمت چپ به طرف خط $x = 2$ حرکت کنیم، به نقطه‌ای با عرض -۲ می‌رسیم؛ پس $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$.

❗ **تذکر:** مقدار حد راست و حد چپ تابع و در نقطه x_0 به معین بودن یا معین نبودن تابع در آن نقطه بستگی ندارد؛ یعنی ممکن است مقدار تابع در یک نقطه وجود نداشته باشد، ولی تابع در آن نقطه دارای حد باشد.

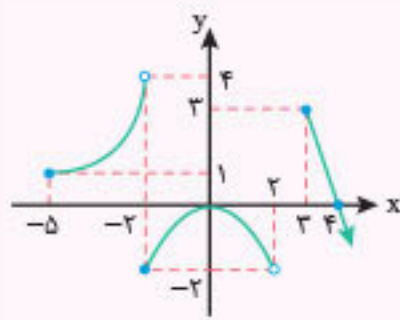
سؤال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ 3x - 2 & ; x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و وجود حد تابع f در نقطه $x = 1$ را بررسی کنید.

جواب با توجه به شکل داریم:



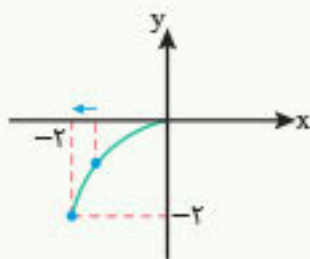
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

توجه: در این سؤال، مقدار تابع در $x = 1$ وجود ندارد؛ ولی تابع f در نقطه $x = 1$ دارای حد است.



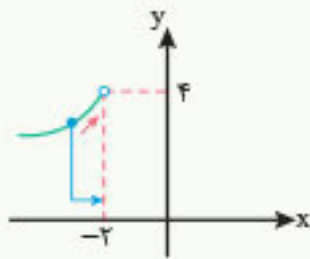
سؤال شکل مقابل، نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. مطلوب است محاسبه هر یک از حدود زیر:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| الف) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ | ب) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | پ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ |
| ت) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | ث) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |
| چ) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$ | ح) $\lim_{x \rightarrow 4^+} [f(x)]$ | خ) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ |



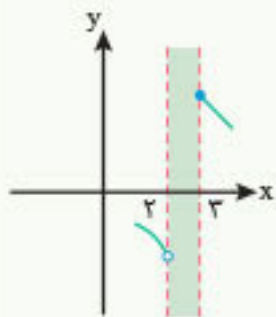
جواب برای محاسبه هر یک از حدها، نمودار تابع f را در حوالی نقطه خواسته شده در نظر می‌گیریم:
الف) برای محاسبه حد راست تابع f در نقطه $x = -2$ ، نقطه‌ای را روی نمودار تابع و سمت راست $x = -2$ در نظر می‌گیریم و از آن جا به سمت خط $x = -2$ حرکت کرده و عرض نقطه روی خط $x = -2$ می‌خوانیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$$

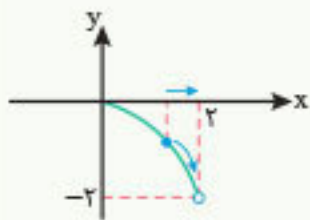


ب) برای محاسبه حد چپ تابع f در نقطه $x = -2$ ، نقطه‌ای را سمت چپ $x = -2$ روی نمودار در نظر می‌گیریم و به سمت خط $x = -2$ حرکت می‌کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4$$



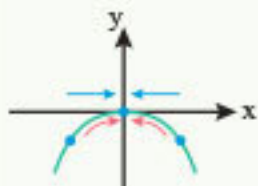
پ) چون حد راست و حد چپ تابع f در نقطه $x = -2$ با هم برابر نیست، پس حد تابع f در $x = -2$ وجود ندارد.
ت) نمودار تابع f در بازه $[2, 3)$ تعریف نشده است و x نمی‌تواند از سمت راست به عدد ۲ نزدیک شود؛ پس حد راست تابع f در $x = 2$ وجود ندارد.



$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$$

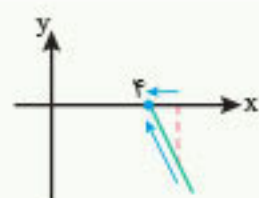


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = [0^-] = -1$$

(ث)

(ج)

چ) وقتی x از سمت راست و چپ و به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع با مقادیر کمتر از صفر به عدد صفر نزدیک می‌شوند (از پایین به صفر می‌رسند)؛ پس:



ح) وقتی x از سمت راست به عدد ۴ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع با مقادیری کمتر از صفر به عدد صفر نزدیک می‌شوند؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} [f(x)] = [0^-] = -1$$

خ) تابع f در سمت چپ $x = -5$ تعریف نشده است؛ پس حد چپ تابع در این نقطه وجود ندارد، ولی حد راست تابع f در نقطه $x = -5$ برابر ۱ است؛ یعنی:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

سوالات امتحانی

سوالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۶۷۰. تابع $f(x) = \sqrt{2x-4}$ در نقطه $x=2$ حد ندارد.

۶۷۱. اگر تابع f در $x=a$ دارای حد باشد و مقدار تابع در نقطه a تعریف شده باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

۶۷۲. اگر تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، آنگاه دارای حد راست و چپ هم هست.

۶۷۳. اگر تابع f در $x=a$ تعریف نشده باشد، در نقطه a حد ندارد.

سوالات جای خالی

جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

۶۷۴. حاصل حد تابع $y = \sqrt{1+x}$ وقتی $x \rightarrow -1^+$ ، برابر است.

۶۷۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [\sin x]$ برابر است.

۶۷۶. اگر دامنه تابع f به صورت بازه $\{2\} - (-1, 4)$ باشد، تابع f قطعاً در نقطه حد ندارد.

۶۷۷. اگر حد راست تابع f در $x=a$ برابر ۲- و حد چپ تابع f در همین نقطه برابر ۲ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ است.

سوالات چهارگزینه‌ای

گزینه درست را انتخاب کنید.

۶۷۸. شکل مقابل، نمودار تابع f است. کدام گزینه درباره $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|f(x)|}$ درست است؟

(۱) حد ندارد.

(۲) حد تابع برابر ۱- است.

(۳) حد تابع برابر ۱ است.

(۴) حد تابع برابر $\frac{L_1}{L_2}$ است.

۶۷۹. شکل مقابل، نمودار تابع f است. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۵

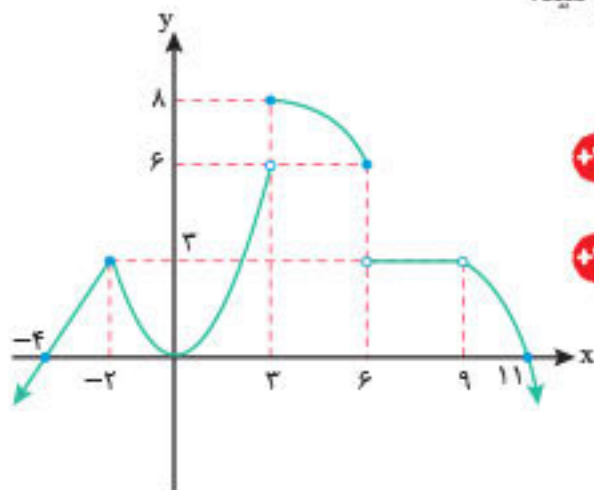
مسائل

۶۸۰. هر یک از جدول‌های زیر را کامل کنید و سپس حاصل‌حدها را بنویسید.

الف)	x	۰	۰/۱	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۲	$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = ?$
	$f(x) = x^2 - 1$	...	...	...	...	...	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	...	...	...	...	

ب)	x	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow 2 \leftarrow$	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$
	$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x < 2 \\ 2x & ; x > 2 \end{cases}$	...	...	...	...	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	...	...	...	

۶۸۱. شکل مقابل، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 8$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$

ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} [f(x)] = 0$ +۲۰

ث) $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x)] = 3$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$

چ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{24}{f(x)} \right] = 3$ +۲۰

ح) $\lim_{x \rightarrow 11^+} [f(x)] = 0$ +۲۰

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۸۲. الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ را رسم کنید.

ب) حاصل هریک از عبارت‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

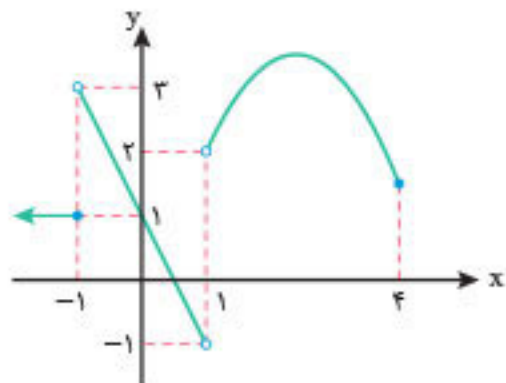
۲) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

۳) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

۴) $f(-1)$

(خرداد ۱۴۰۲)

۶۸۳. با توجه به نمودار تابع f در شکل زیر، حاصل عبارت داده‌شده را بیابید.



$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3f(-1)$

۶۸۴. نموداری از یک تابع رسم کنید که در نقطه $x = 3$ ، حد راست آن تابع برابر ۲، ولی حد چپ و مقدار تابع هر دو در $x = 3$ باشد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۸۵. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & ; x > 1 \\ -2x + 3 & ; x \leq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع f را در صورت وجود در نقطه $x = 1$ بیابید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۸۶. تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۸۷. آیا حد تابع $f(x) = \begin{cases} 3-x & ; x < 2 \\ -1 & ; x = 2 \\ x^2 - 4 & ; x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ وجود دارد؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۸۸. +۲۰ در هر مورد با رسم نمودار، حد تابع f را در نقطه خواسته شده (در صورت وجود) بیابید.

الف) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x > 0 \\ x - 2 & ; x < 0 \end{cases} ; x = 0$

ب) $f(x) = |x - 1| + 2 ; x = 1$

پ) $f(x) = x + \frac{|x|}{x} ; x = 0$

ت) $f(x) = \frac{x+1}{[x]} ; x = 2$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۸۹. +۲۰ برای هریک از حالت‌های زیر، ضابطه‌ای برای تابع f مثال بزنید.

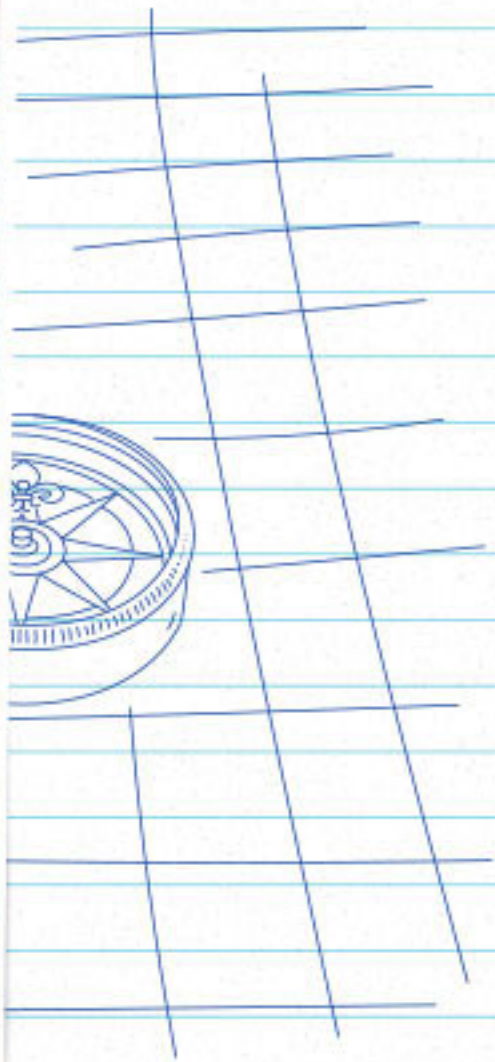
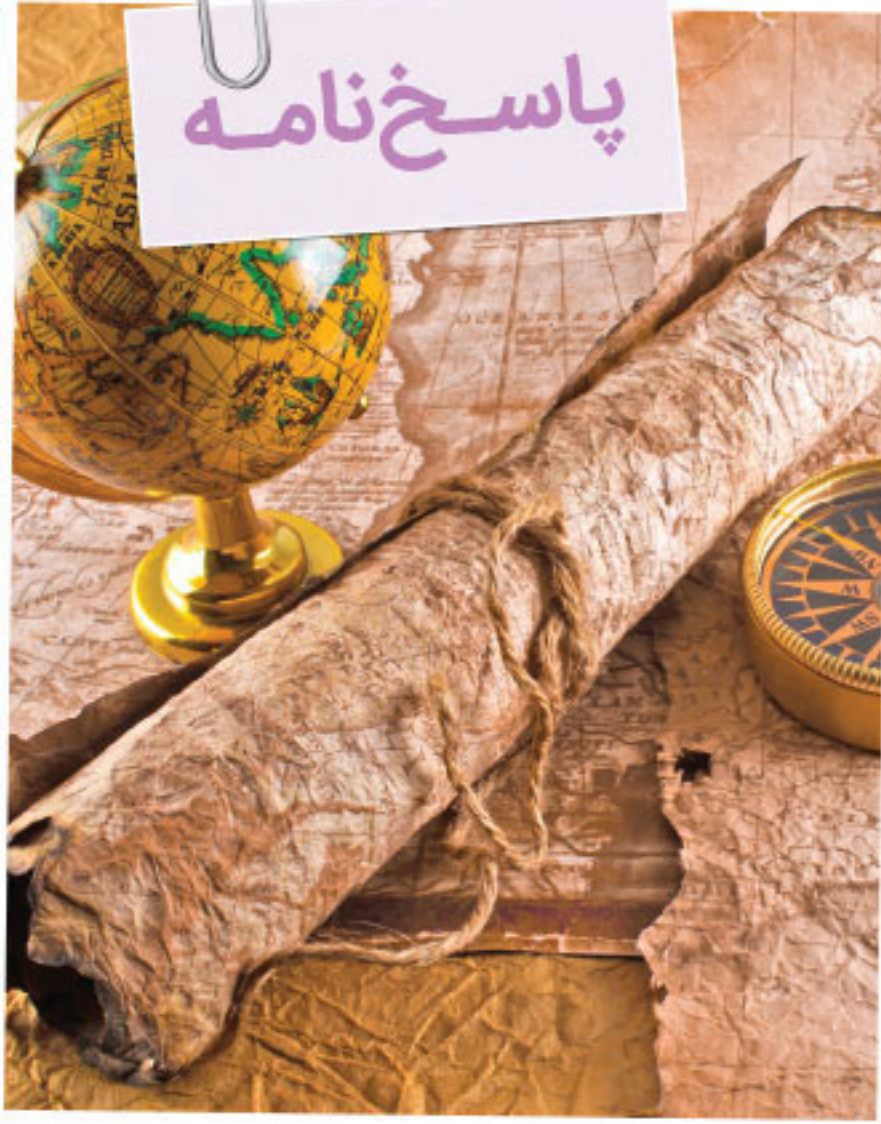
الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$

ب) در $x = -1$ حد نداشته باشد؛ ولی $f(-1)$ موجود باشد.

پ) در $x = -2$ تعریف نشده باشد؛ ولی $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

ت) $f(-4) = 0, \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 2$

پاسخ نامہ

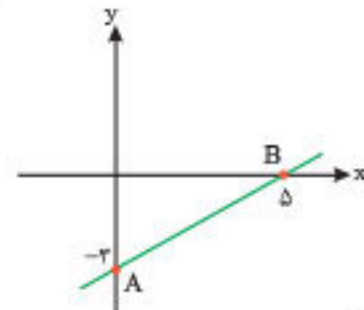


پاسخ فصل اول

۱. نادرست زیرا برای خطوط قائم، شیب تعریف نمی شود.

۲. درست کافی است خط را رسم کنیم ببینید:

$$3x - 5y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow -5y=15 \Rightarrow y=-3 \xrightarrow{\text{نقطه اول}} A(0, -3) \\ y=0 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5 \xrightarrow{\text{نقطه دوم}} B(5, 0) \end{cases}$$



۳. نادرست طول از مبدأ خط، محل تلاقی خط با محور X هاست؛ پس:

$$2x + 4y = 5 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور X ها}} 2x + 0 = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{طول از مبدأ خط}$$

۴. درست معادله خط را می نویسیم:

$$\begin{cases} (-1, 2) \\ (1, 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{1 - (-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{با نقطه (1,1) بنویس}} y - 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با محور X ها}} 0 - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$$

۵. درست شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \Rightarrow 2y = -x + 1 \xrightarrow{+2} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \\ y = 2x + 3 \xrightarrow{\text{شیب}} m_2 = 2 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \checkmark \end{cases}$$

۶. صفر

$$7y = 3x - 5 \Rightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{5}{7} \quad \text{۷. زیرا با تنها کردن } y \text{ داریم:}$$

۸. ۲ یا -۳ زیرا در دو خط موازی، شیب ها با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} my = -3x + 5 \xrightarrow{+m} y = -\frac{3}{m}x + \frac{5}{m} \Rightarrow \text{شیب خط اول} = -\frac{3}{m} \\ (1+m)x + 2y - 3 = 0 \xrightarrow{+m} 2y = -(1+m)x + 3 \xrightarrow{+2} y = \frac{-(1+m)}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب خط دوم} = \frac{-(1+m)}{2} \end{cases}$$

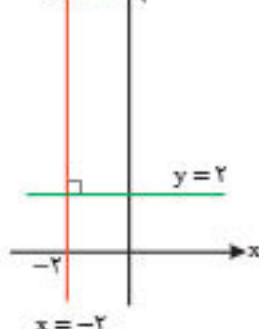
$$\xrightarrow{\text{شرط موازی بودن}} \frac{3}{m} = \frac{-(1+m)}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m^2 + m = 6 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

۹. $x = -2$ زیرا خط مورد نظر قائم بوده و از

نقطه $(-2, 9)$ می گذرد. شکل مقابل را ببینید:



۱۰. $x = 3$ همانند سؤال قبل خط قائم است، پس x آن مقدار ثابتی است و

چون از نقطه $B(3, -7)$ عبور می کند، معادله آن $x = 3$ است.

۱۱. گزینه ۲ طبق تعریف شیب خط، $m = \tan 60^\circ$ ، یعنی $m = \sqrt{3}$. از طرفی

طبق رابطه شیب خط گذرنده از دو نقطه داریم:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}, a) \\ (a-4, 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m = \frac{1-a}{a-4-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1-a = \sqrt{3}a - 4\sqrt{3} - 3$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 1 + 4\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3}a + a$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور 4 و a}} 4(1 + \sqrt{3}) = a(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow a = 4$$

۱۲. گزینه ۱

$$\begin{cases} (-4, 3) \\ (6, 2k) \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m = \frac{2k-3}{6-(-4)} = \frac{2k-3}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض } m = \frac{k}{2}} \frac{2k-3}{10} = \frac{k}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4k - 6 = 10k$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} -6 = 6k \Rightarrow k = -1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله خط}} -x + y + 12 = 0$$

$$\Rightarrow y = x - 12 \Rightarrow \text{شیب خط} = 1$$

۱۳. گزینه ۳ معادله نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است. با جای گذاری مختصات نقطه A در معادله خط داریم:

$$1 - 2m = -(3m + 5) \Rightarrow 1 - 2m = -3m - 5$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 3m - 2m = -1 - 5 \Rightarrow m = -6$$

نقطه ای که روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد (یعنی روی خط $y = x$)، دارای

x و y برابر است و چون طبق فرض، نقطه مورد نظر در ربع سوم قرار دارد، باید x

و y هر دو منفی باشند. پاسخ درست گزینه ۳ است. $(m, -6) \xrightarrow{m=-6} (-6, -6)$

۱۴. گزینه ۴ هر نقطه ای که روی محور x ها باشد، عرض آن برابر صفر است؛ پس:

$$A(m-n, 2m+n) \xrightarrow{\text{روی محور X ها است}} \begin{cases} m-n=6 \\ 2m+n=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \xrightarrow{\text{در دومی}} 2 \times 2 + n = 0 \Rightarrow n = -4$$

۱۵. گزینه ۲ وقتی دو خط متقاطع نیستند، حتماً موازی و غیر منطبق اند؛ پس

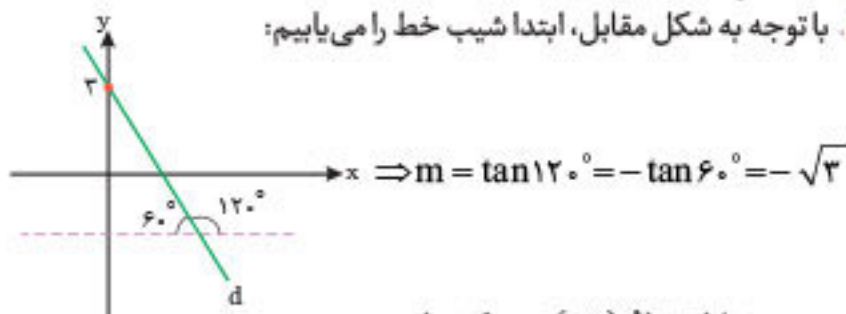
باید شیب دو خط با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} y = mx + 15 \Rightarrow \text{شیب خط اول} = m \\ 6y = 12x - m \xrightarrow{+6} y = 2x - \frac{m}{6} \Rightarrow \text{شیب خط دوم} = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 2$$

و با توجه به این که به ازای $m = 2$ معادله های دو خط یکسان نیستند، پس دو

خط متقاطع نیستند.

۱۶. با توجه به شکل مقابل، ابتدا شیب خط را می یابیم:



همچنین خط از نقطه $(0, 3)$ عبور کرده است؛ پس:

$$\begin{cases} m = -\sqrt{3} \\ A(0, 3) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله خط را بنویس}} y - 3 = -\sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 3$$

۱۷. خط d_1 از مبدأ مختصات و نقطه $(2, 4)$ گذشته است؛ پس معادله آن

به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} O(0, 0) \\ (2, 4) \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m_1 = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط}} y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow d_1: y = 2x$$



$$\left\{ \begin{array}{l} d': 8y = 4x + 11 \xrightarrow{+8} y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{8} \\ \Rightarrow m_{d'} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow m_d \times m_{d'} = -1$$

$$d: y = -2x + 10 \Rightarrow m_d = -2$$

پس دو خط d' و d بر هم عمودند.

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1: 4x + my = 12 \Rightarrow my = -4x + 12 \xrightarrow{+m} y = \frac{-4}{m}x + \frac{12}{m} \\ \Rightarrow m_{d_1} = \frac{-4}{m} \\ d_2: (m+1)y - 3x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (m+1)y = 3x - \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{+(m+1)} y = \frac{3}{m+1}x - \frac{1}{2(m+1)} \Rightarrow m_{d_2} = \frac{3}{m+1} \end{array} \right.$$

$$d_2 \parallel d_1 \Rightarrow m_{d_2} = m_{d_1} \Rightarrow \frac{3}{m+1} = \frac{-4}{m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3m = -4m - 4 \Rightarrow 7m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{7}$$

$$d_2 \perp d_1 \Rightarrow m_{d_2} = -\frac{1}{m_{d_1}} \Rightarrow \frac{3}{m+1} = \frac{m}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m^2 + m = 12 \Rightarrow m^2 + m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ \text{یا} \\ m = -4 \end{cases}$$

$$m = -4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_1: 4x - 4y = 12 \xrightarrow{-4} 12x - 9y = 36 \\ d_2: -3x - 2y = -\frac{1}{2} \xrightarrow{-2} -12x - 8y = -2 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{جمع کن}} -17y = 34$$

$$\Rightarrow y = -2 \xrightarrow{\text{در معادله } d_1} 4x - 2(-2) = 12 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تلاقی دو خط}} A\left(\frac{3}{2}, -2\right)$$

۲۱. ابتدا شیب خط داده شده را می یابیم:

$$6y = 3x - 5 \xrightarrow{+6} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

الف) با توجه به عمودبودن دو خط، شیب خط مورد نظر، قرینه و معکوس شیب خط داده شده است؛ پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} m' = -2 \\ \text{معادله خط را بنویس} \end{array} \right. \Rightarrow y - 3 = -2(x - (-1)) \Rightarrow y = -2x + 1$$

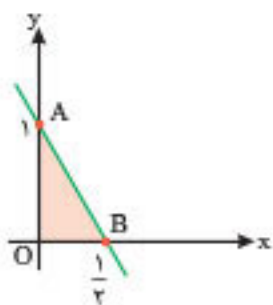
ب) حالا نقطه تلاقی این خط را با محورهای مختصات می یابیم:

$$y = -2x + 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{تلاقی با محور } x \text{ ها} \\ y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 0 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تلاقی با محور } y \text{ ها} \\ x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow y = 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

حالا خط را رسم می کنیم تا مثلث مورد نظر را ببینیم:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



۲۲. هر نقطه روی محور y هابه صورت $(0, b)$ نشان داده می شود؛ پس طبق فرض سؤال، خط مورد نظر از نقطه $A(0, -2)$ می گذرد. نقطه دوم خط هم محل تلاقی دو خط داده شده است که با حل دستگاه شامل معادله آن دو خط به دست می آید.

خط d محور x ها را در نقطه ای به طول ۲ و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۴ قطع کرده است؛ پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 0) \\ (0, 4) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m = \frac{4-0}{0-2} = -2$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط } d} y - 0 = -2(x - 2) \Rightarrow d: y = -2x + 4$$

d یک خط افقی است که محور y ها را در نقطه ای به عرض ۵ قطع کرده؛ پس معادله آن به صورت $y = 5$ است.

d هم یک خط قائم بوده که محور x ها را در نقطه ای به طول ۱۰ قطع کرده؛ پس معادله آن به صورت $x = 10$ است.

$$18. \text{ الف} \left\{ \begin{array}{l} (3, -2) \\ (-2, 0) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m = \frac{0 - (-2)}{-2 - 3} = -\frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط را بنویس}} y - 0 = -\frac{2}{5}(x - (-2)) \xrightarrow{\text{ساده کن}} y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{2}{3} \\ h = -3 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فرم معادله خط}} y = \frac{2}{3}x - 3$$

ب) طول از مبدأ -4 ، یعنی خط از نقطه $(-4, 0)$ می گذرد و عرض از مبدأ ۳.

یعنی خط از نقطه $(0, 3)$ هم می گذرد؛ پس با معلوم بودن این دو نقطه، معادله

$$\left\{ \begin{array}{l} (-4, 0) \\ (0, 3) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m = \frac{3-0}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط را بنویس}} y - 3 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 3$$

ت) مختصات هر نقطه روی محور x هابه صورت $(a, 0)$ است؛ پس نقطه $(-2, 0)$ روی خط قرار دارد، همچنین دو خط موازی دارای شیب های برابرند؛ پس:

$$2x - 4y = 15 \Rightarrow 4y = 2x - 15 \xrightarrow{+4} y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-2, 0) \\ m = \frac{1}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{معادله خط را بنویس}} y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-2)) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

ث) ابتدا شیب خط داده شده را می یابیم:

$$2x - 4y = 10 \Rightarrow 4y = 2x - 10 \xrightarrow{+4} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط عمودبودن}} m' = -\frac{1}{m} = -\frac{4}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m' = -\frac{4}{3} \\ (-2, 2) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - 2 = -\frac{4}{3}(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 2 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

۱۹.

$$\left\{ \begin{array}{l} d': y = -3x + 5 \Rightarrow m_{d'} = -3 \\ \text{الف} \quad d: 4y = -x + 2 \xrightarrow{+4} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_{d'} \neq m_d \\ m_{d'} \cdot m_d \neq -1 \end{array} \right.$$

چون شیب دو خط برابر نیست، پس دو خط متقاطع و غیر عمود هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} d': 3y = 10 - 2x \xrightarrow{+3} y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x \\ \Rightarrow m_{d'} = -\frac{2}{3} \\ \text{ب} \quad d: 6y = 11 - 4x \xrightarrow{+6} y = \frac{11}{6} - \frac{4}{6}x \\ \Rightarrow m_d = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \end{array} \right. \Rightarrow m_{d'} = m_d$$

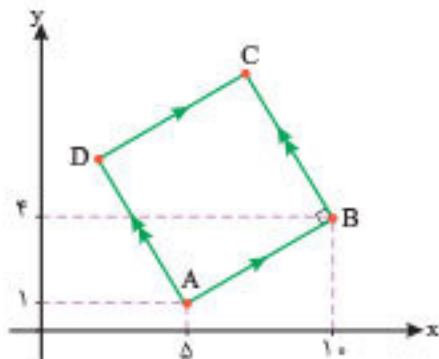
پس دو خط d' و d با هم موازی هستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{AB} = \frac{0-2}{1-4} = \frac{2}{3} \\ m_{BC} = \frac{-a-0}{a-1} = \frac{-a}{a-1} \end{cases} \xrightarrow{AB \perp BC} m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{a-1} = \frac{-3}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a = 3a - 3$$

$$\Rightarrow 2a - 3a = -3 \Rightarrow -a = -3 \Rightarrow a = 3$$

۲۶. با توجه به فرضیات داده شده، شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



ضلع BC بر ضلع AB عمود است؛ پس شیب این دو پاره خط باید قرینه و معکوس یکدیگر باشند:

$$\begin{cases} A(1, 1) \\ B(4, 4) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{4-1}{4-1} = \frac{3}{3}$$

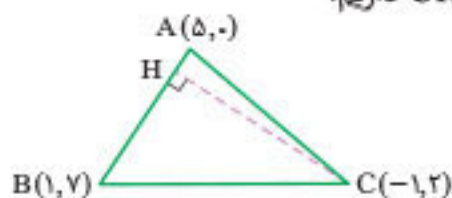
$$\begin{cases} B(4, 4) \\ C(7, m+1) \end{cases} \Rightarrow m_{BC} = \frac{m+1-4}{7-4} = \frac{m-3}{3}$$

$$\xrightarrow{BC \perp AB} \frac{m-3}{3} = -\frac{3}{3} \Rightarrow m-3 = -9 \Rightarrow m = -6 \Rightarrow C(7, -6)$$

با توجه به رابطه بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+7 = 4+x_D \Rightarrow x_D = 4 \\ 1-6 = 4+y_D \Rightarrow y_D = -9 \end{cases} \Rightarrow D(4, -9)$$

۲۷. شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم. برای نوشتن معادله ارتفاع CH، نیاز به یک نقطه و شیب CH داریم:



CH بر AB عمود است؛ پس می‌توانیم شیب پاره خط AB را محاسبه کرده و سپس قرینه و معکوس کنیم تا شیب CH به دست آید:

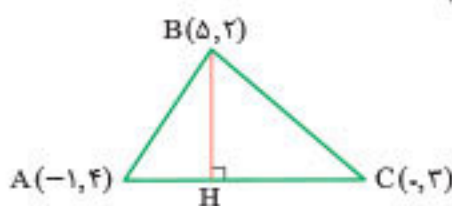
$$\begin{cases} A(1, 0) \\ B(1, 7) \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه شیب}} m_{AB} = \frac{7-0}{1-1} = \frac{7}{0}$$

$$\xrightarrow{CH \perp AB} m_{CH} = +\frac{4}{7}$$

حالا با نقطه C، معادله ارتفاع CH را می‌نویسیم:

$$y - 2 = \frac{4}{7}(x - (-1)) \xrightarrow{xy} 7y - 14 = 4x + 4 \Rightarrow 4x - 7y + 18 = 0$$

۲۸. شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



نقطه H محل برخورد خطوط گذرنده بر BH و AC است؛ پس معادله این دو خط را باید بنویسیم. مانند سؤال قبل، معادله BH را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A(-1, 4) \\ C(2, 2) \end{cases} \Rightarrow m_{AC} = \frac{2-4}{2-(-1)} = -\frac{2}{3} \xrightarrow{BH \perp AC} m_{BH} = +\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی دو خط}} \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کن}} -y = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله خط اول}} 3x - 5(1) = 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تلاقی دو خط}} B(2, 1)$$

$$\begin{cases} A(0, -3) \\ B(2, 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه شیب خط}} m = \frac{1+3}{2-0} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط رابنویس}} y + 3 = (2)(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 3$$

۲۳. الف) عرض از مبدأ هر خط محل تلاقی خط با محور y هاست؛ پس کافی است در معادله خط d_1 به جای x، عدد صفر را جایگزین کنیم:

$$d_1: (2 + \frac{a}{3})x + ay = 12 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور y ها}} \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2 + \frac{a}{3}) \times 0 + a \times 6 = 12 \Rightarrow a = 2$$

ب) دو خط زمانی موازی هستند که شیب هایشان با هم برابر باشند؛ بنابراین:

$$d_1: \frac{1}{3}x + 2y = 12 \Rightarrow 2y = -\frac{1}{3}x + 12 \xrightarrow{\div 2} y = -\frac{1}{6}x + 6$$

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{6}$$

شیب خط d_2 را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$d_2: \frac{y+2}{b-3} - \frac{2x}{2b} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در (b-3)(2b)}} 2by + 4b - 2(b-3)x = 2b(b-3)$$

$$\Rightarrow 2by = 2(b-3)x + 2b(b-3) - 4b$$

$$\xrightarrow{\div (2b)} y = \frac{2(b-3)}{2b}x + b - 3 - 2 \Rightarrow y = \frac{b-9}{b}x + b - 5$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{b-9}{b}$$

حالا شیب‌های به دست آمده را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{1}{6} = \frac{b-9}{b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -b = 6b - 54 \Rightarrow -7b = -54 \Rightarrow b = \frac{54}{7}$$

$$\Rightarrow -7b = -54 \Rightarrow b = \frac{54}{7}$$

۲۴. برای این که هر سه نقطه روی یک خط باشند، باید شیب خط گذرنده از هر دو نقطه یکسان باشد؛ ببینید:

$$A, B, C \in d \Rightarrow m_{AB} = m_{AC}$$

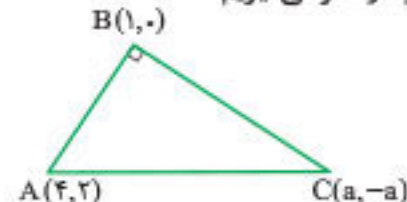
$$\begin{cases} A(4, 2) \\ B(6, -2) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-2-2}{6-4} = -2$$

$$\begin{cases} B(6, -2) \\ C(2k, k+1) \end{cases} \Rightarrow m_{AC} = \frac{k+1-2}{2k-4} = \frac{k-1}{2k-4} \Rightarrow -2 = \frac{k-1}{2k-4}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -4k + 8 = k - 1 \Rightarrow -5k = -9 \Rightarrow k = \frac{9}{5}$$

تذکره: می‌توانید معادله خط گذرا بر نقاط A و B را بنویسید و سپس مختصات نقطه C را در آن صدق دهید.

۲۵. شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



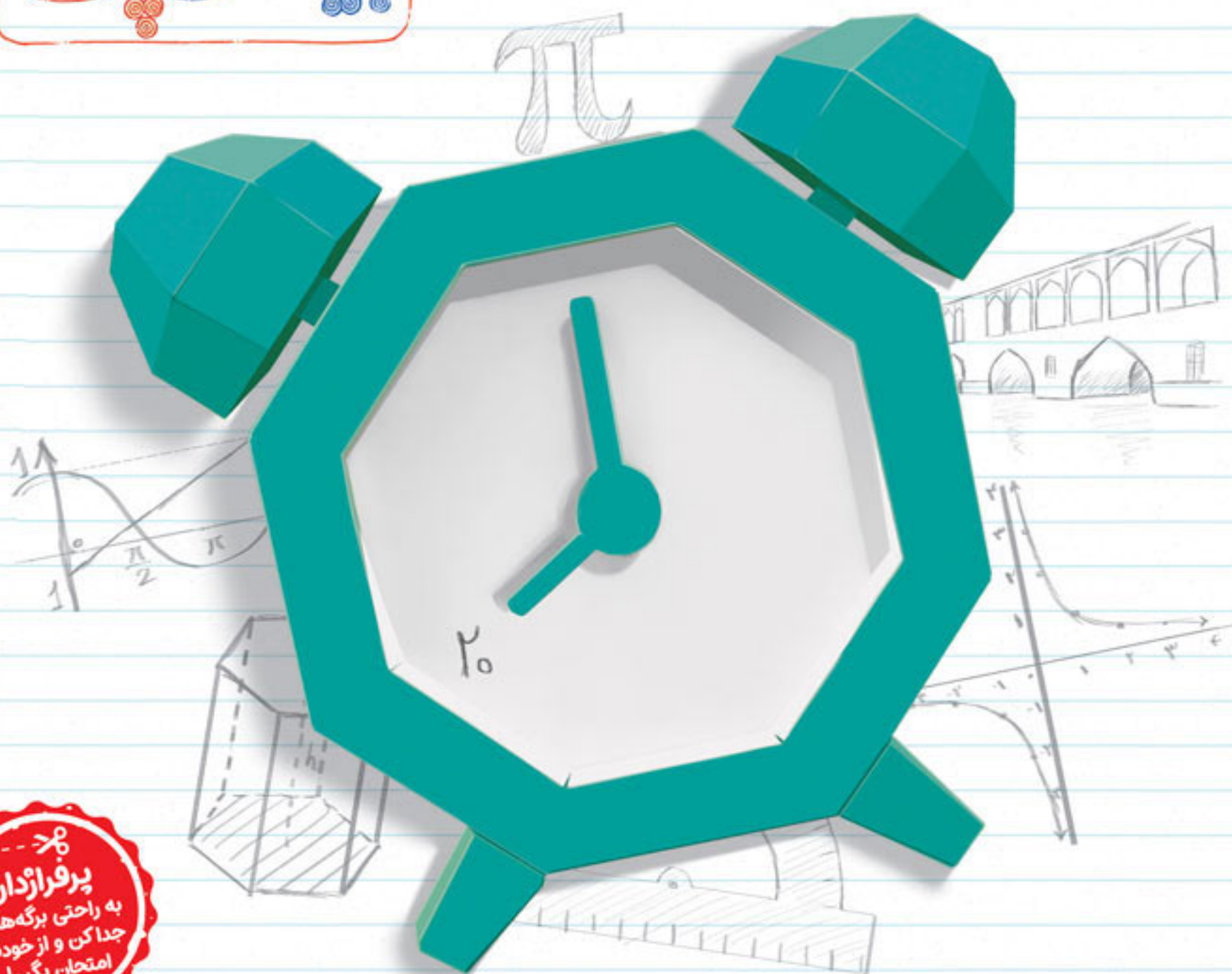
رشته تجربی

ریاضی ۲

کاربرگی امتحانی

از خودت امتحان بگیر!

مجموعه کتاب‌های
بیست‌پیک



پرفراژدار
به راحتی برگه‌ها را
جدا کن و از خودت
امتحان بگیر!

۱۳ امتحان شامل:

۷ امتحان فصل به فصل

۴ امتحان شبیه‌ساز نوبت اول و دوم

۲ امتحان نهایی اخیر

+ پاسخ‌نامه تشریحی به همراه ریزبارم و نکات آموزشی و مشاوره‌ای

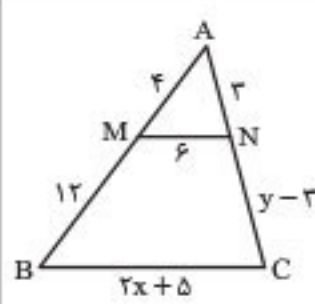


مهروماه

قیمت بسته بیست‌پیک:
۳۴۵۰۰۰ تومان



باسمه تعالی

امتحان ۱۱: نوبت دوم		سؤالات شبیه‌ساز امتحانی		مهر و ماه	
رشته: علوم تجربی		پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
سؤالات امتحانی درس: ریاضی (۲)		نام و نام خانوادگی:		تاریخ امتحان:	
				تعداد صفحه: ۲	
ردیف		سؤالات		نمره	
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) نمودار تابع $y = \log_p(x-3)$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع می‌کند. ب) اگر a یک عدد صحیح باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a+1$ است. پ) حاصل $\tan 3$ ، مقداری منفی است. ت) اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، یک قضیه دوشروطی به دست می‌آید.		۱		
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) مرکز دایره‌ای که هر سه ضلع یک مثلث بر آن مماس باشند، محل برخورد آن مثلث است. ب) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = 2P(B) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه $P(A \cap B')$ برابر است. پ) اگر تمام داده‌های آماری در ۲ ضرب شوند، انحراف معیار داده‌ها برابر می‌شود. ت) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \frac{4x}{x-3}$ باشد، در این صورت $(f-2g)(4)$ برابر است.		۱		
۳	اگر $A(3, -4)$ و $B(5, 8)$ مختصات دو سر پاره خط AB باشد، معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.		۱		
۴	ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین با هم این کار را در ۴ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن را به تنهایی انجام دهند؟		۱		
۵	در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ است. مقادیر x و y را بیابید. 		۱		
۶	در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، هرگاه AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، نشان دهید $AH^2 = BH \times CH$.		۱		
۷	نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{x-2}$ را رسم کنید و برد آن را بنویسید.		۱		
۸	در تابع $f(x) = x^2 - 6x + 3$ با شرط $x \leq 3$ ، مقدار $f^{-1}(-2)$ را بیابید.		۱		
۹	مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید. $2 \sin\left(\frac{-25\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{27\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$		۱/۲۵		
۱۰	نمودار تابع $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.		۱/۵		
۱۱	معادلات زیر را حل کنید. الف) $4^{2x+2} = \left(\frac{1}{128}\right)^2$ ب) $\log_2(x+1) + \log_2(x+4) = 2$		۱/۵		
صفحه ۱ از ۲					

امتحان ۱۱: نوبت دوم		سؤالات شبیه ساز امتحانی		مهر و ماه	
رشته: علوم تجربی		پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
سؤالات امتحانی درس: ریاضی (۲)		نام و نام خانوادگی:		تاریخ امتحان:	
		تعداد صفحات: ۲		ساعت شروع:	
ردیف	سؤالات				نمره
۱۲	الف) اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ فرض شوند، حاصل عبارت $\log \frac{\sqrt[3]{25}}{27}$ را بر حسب a و b به دست آورید. ب) نمودار تابع $y = \log_2(x + 2)$ را رسم کنید.				۱/۵
۱۳	نمودار تابع $f(x) = \frac{ x - 2 }{x - 2}$ را رسم کنید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را به دست آورید.				۱
۱۴	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 27}{x^2 + x - 6}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[-x] + 2}{\cos(\pi x)}$				۱/۲۵
۱۵	مقادیر a و b را به گونه ای بیابید که تابع f در $x = 2$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{ax - 2a}{ x^2 - 4 } & ; x < 2 \\ b - 1 & ; x = 2 \\ 2 \tan\left(\frac{\pi}{8}x\right) & ; x > 2 \end{cases}$				۱
۱۶	احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار، $0/6$ و روی بیمار دیگر، $0/8$ است. با چه احتمالی این پیوند: الف) روی هر دو موفق خواهد بود. ب) روی دومی موفق، ولی روی اولی ناموفق است.				۱/۵
۱۷	داده های مقابل را در نظر بگیرید: الف) ضریب تغییرات این داده ها را به دست آورید. ب) میانگین داده های بین چارک اول و سوم را بیابید.				۱/۵
	جمع نمره				۲۰
صفحه ۲ از ۲					

پاسخ امتحان شماره ۳ - فصل سوم

۱. الف) نادرست (۰/۲۵)؛ زیرا دامنه دو تابع باهم برابر نیست. ب) نادرست (۰/۲۵)؛
برای مثال $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک نیست. پ) نادرست (۰/۲۵)؛ زیرا:

$$y = \frac{x}{2} + 3 \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ با } y} x = \frac{y}{2} + 3$$

$$\xrightarrow{y \text{ تنها شود}} \frac{y}{2} = x - 3 \Rightarrow y = 2x - 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow a + b = -4$$

ت) درست (۰/۲۵)؛ زیرا:

$$\begin{cases} f(2) = \sqrt{2-2} = 0 \\ g(2) = \frac{2 \times 2 + 2}{2-1} = 4 \end{cases} \Rightarrow (f \cdot g)(2) = f(2) \times g(2) = 0 \times 4 = 0$$

۲. الف) ۳ (۰/۲۵)؛ زیرا:

$$f(2 - \sqrt{2}) = [2 - \sqrt{2} + 3] = [-\sqrt{2}] + 5 = -2 + 5 = 3$$

ب) ۶ (۰/۲۵)؛ زیرا:

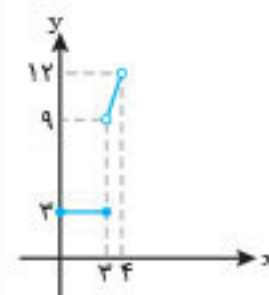
$$(2f + g)(-1) = 2f(-1) + g(-1) = 2 \times 1 + 4 = 6$$

پ) ۱ (۰/۲۵)؛ زیرا:

$$\begin{cases} a + b = -7 \\ a - 2 = -5 \Rightarrow a = -3 \end{cases} \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a - b = -3 + 4 = 1$$

ت) خط $y = x$ (۰/۲۵)

۳.



$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 3x & ; 2 < x < 4 \end{cases}$$

برای تابع f بی شمار مثال می توان آورد؛ برای مثال، تابع زیر نیز در هر سه شرط «الف»، «ب» و «پ» صدق می کند:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 3x & ; 2 < x < 4 \end{cases}$$

۴. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} f(1) = \alpha \Rightarrow f(1) = \sqrt{2+7} = \alpha \Rightarrow \alpha = 3 \\ g(\beta) = 7 \Rightarrow g(\beta) = \frac{2\beta+1}{\beta-2} = 7 \Rightarrow 2\beta+1 = 7\beta-14 \\ \Rightarrow 5\beta = 15 \Rightarrow \beta = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1, 3) \\ B(3, 7) \end{cases} \xrightarrow{\text{مختصات وسط } AB} \begin{cases} M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M(2, 5) \\ m_{AB} = \frac{7-3}{3-1} = 2 \end{cases}$$

پس شیب عمود منصف AB برابر $-\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

۵. تابع g همان وارون تابع f است (۰/۲۵):

$$y = \sqrt{x+4} - 3 \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ با } y} x = \sqrt{y+4} - 3$$

$$\xrightarrow{y \text{ را تنها کنید}} x+3 = \sqrt{y+4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x+3)^2 = y+4$$

$$\Rightarrow y = (x+3)^2 - 4 = f^{-1}(x) \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow g(x) = (x+3)^2 - 4 \Rightarrow g(0) = 9 - 4 = 5 \quad (۰/۵)$$

۶. الف)

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{3 \text{ واحد به سمت چپ}} y = \sqrt{x+3} = f(x) \quad (۰/۵)$$

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y_1 = -\frac{1}{x} \xrightarrow{2 \text{ واحد به سمت راست}} y_2 = -\frac{1}{x-2} = g(x) \quad (۰/۵)$$

ب)

$$f(g(-2)) = f\left(\frac{1}{-2}\right) = \sqrt{\frac{1}{-2} + 3} = \sqrt{\frac{13}{-2}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (۰/۵)$$

پ)

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{-1}{\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2} \quad (۰/۵)$$

۷. خیر؛ زیرا با وجود این که $D_f = D_g = \mathbb{R}$ (۰/۲۵)، اما برای $x=2$ داریم:

$$\begin{cases} f(2) = 6 \\ g(2) = 4 + 4 + 4 = 12 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

پس دو تابع f و g با هم برابر نیستند؛ زیرا برای مساوی بودن f و g باید به ازای هر x از دامنه دو تابع، مقدار هر دو تابع باهم برابر باشد. (۰/۲۵)

۸.

$$[2x+3] = 5 \Rightarrow 5 \leq 2x+3 < 6 \quad (۰/۵)$$

$$\xrightarrow{-3} 2 \leq 2x < 3 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\div 2} 1 \leq x < \frac{3}{2} \quad (۰/۲۵)$$

۹. تابع اصلی به صورت $y = \sqrt{x}$ است که انتقال های زیر بر روی آن انجام شده است:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{3 \text{ واحد به سمت راست}} y_1 = \sqrt{x-3} \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{2 \text{ واحد به سمت بالا}} y_2 = \sqrt{x-3} + 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} y = a + \sqrt{x+b} \\ y = 2 + \sqrt{x-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{مقایسه دو تابع}} \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + \sqrt{x-3} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow f(12) = 2 + \sqrt{12-3} = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \quad (۰/۲۵)$$

۱۰.

$$f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-3}}$$

$$\xrightarrow{\text{دامنه } f} \begin{cases} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad ① \\ 2-\sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{x-3} \Rightarrow 4 \geq x-3 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7 \quad ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{① \cap ②} D_f = [3, 7] \quad (۰/۲۵)$$

$$g(x) = \frac{5x+3}{x-4} \xrightarrow{\text{دامنه } g} x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{4\} \quad (۰/۲۵)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x+3}{x-4} = 0 \Rightarrow 5x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5} \quad (۰/۲۵)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$= ([3, 7] - \{4\}) - \{-\frac{3}{5}\} = [3, 7] - \{4\} \quad (۰/۵)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{x-3}}}{\frac{5x+3}{x-4}} \quad (۰/۲۵)$$

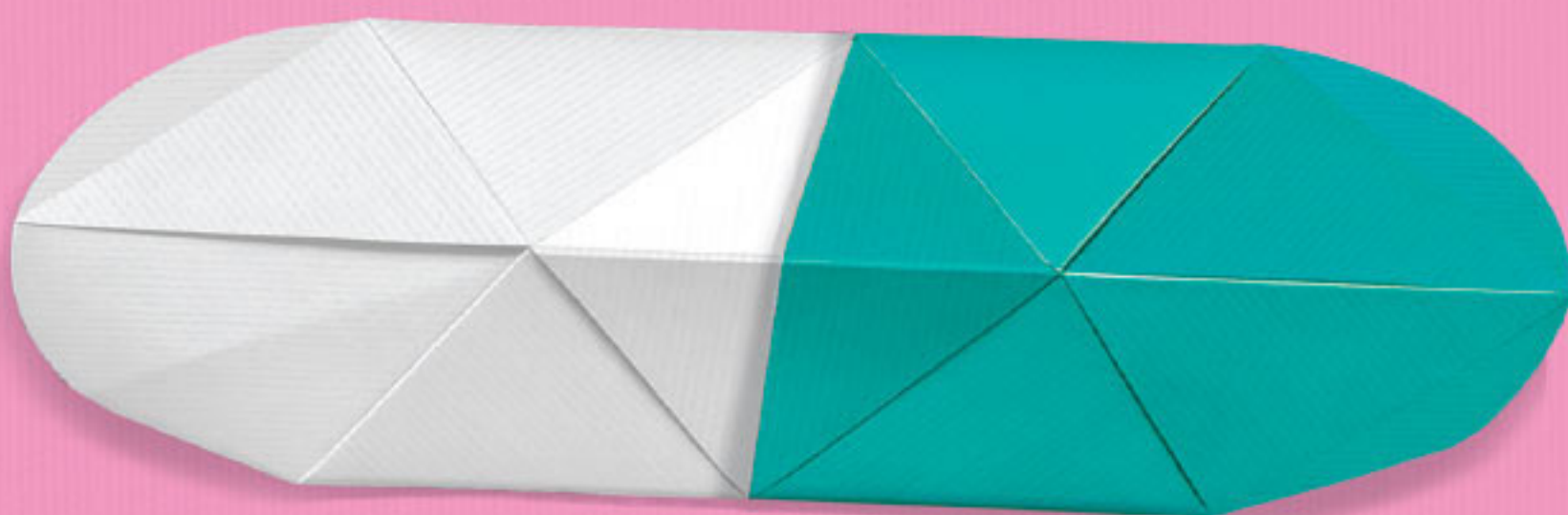


رشته تجربی

خلاصه کيسولى

ریاضی ۲

مرور سریع مطالب درسی
به صورت نموداری
• نکات حفظی • فرمول‌های مهم
• روش حل سؤالات



فصل چهارم: مثلثات

زاویه

- طول کمان: $L = r\alpha$ ، حاصل ضرب شعاع دایره (r) در زاویه مرکزی روبه روبه آن بر حسب رادیان (α)
- تبدیل واحدهای زاویه به یکدیگر
- تبدیل درجه به رادیان: در $\frac{\pi(\text{rad})}{180^\circ}$ ضرب می‌کنیم.
- تبدیل رادیان به درجه: در $\frac{180^\circ}{\pi(\text{rad})}$ ضرب می‌کنیم.

کمان‌های $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

منفی در کمان

- کسینوس: منفی را می‌خورد: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- نسبت‌های دیگر، غیر از کسینوس: منفی را بیرون می‌دهند.
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

- $2k\pi$ در کمان ($2k\pi$ را خط بزن)
- $\sin(2k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha)$
- $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$
- $\tan(2k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha)$
- $\cot(2k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$

π در کمان: (در مضارب π اسم عوض نمی‌شود.)

- $\pi + \alpha$: ناحیه سوم است.
- $\pi - \alpha$: ناحیه دوم است.

نسبت مثلثاتی	sin	cos	tan	cot
زاویه				
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$

$(2k+1)\frac{\pi}{2}$ در کمان: (در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ اسم عوض می‌شود.)

نسبت مثلثاتی	sin	cos	tan	cot
زاویه				
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$

- ربع اول: $\frac{\pi}{2} - \alpha$
- ربع دوم: $\frac{\pi}{2} + \alpha$
- ربع سوم: $\frac{3\pi}{2} - \alpha$
- ربع چهارم: $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

زاویه‌های متمم و مکمل

- دو زاویه مکمل: سینوس‌ها با هم برابرند و بقیه نسبت‌ها قرینه یکدیگرند.
- دو زاویه متمم: سینوس یکی از زوایا با کسینوس دیگری و تانژانت یکی از زوایا با کتانژانت زاویه دیگر برابر است و برعکس.

توابع مثلثاتی

دامنه: $\mathbb{R}$

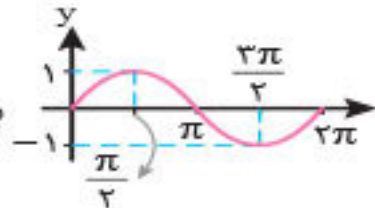
برد: $[-1, 1]$

تلاقی با محور x ها: در $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) رخ می‌دهد.

ماکزیمم: برابر ۱ بوده و در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) رخ می‌دهد.

مینیمم: برابر -۱ بوده و در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) رخ می‌دهد.

نمودار: در فاصله $[0, 2\pi]$ به صورت x به صورت y هر 2π واحد تکرار می‌شود.



$y = \sin x$

دامنه: $\mathbb{R}$

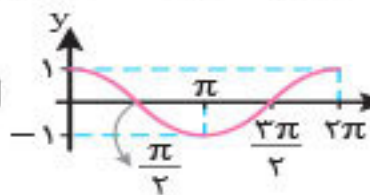
برد: $[-1, 1]$

تلاقی با محور x ها: در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) رخ می‌دهد.

ماکزیمم: برابر ۱ بوده و در نقاط $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) رخ می‌دهد.

مینیمم: برابر -۱ بوده و در نقاط $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) رخ می‌دهد.

نمودار: در فاصله $[0, 2\pi]$ به صورت x به صورت y هر 2π واحد تکرار می‌شود.



$y = \cos x$

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

توابع نمایی: $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

دامنه و برد: $R_f = (0, +\infty), D_f = \mathbb{R}$
محور x ها را قطع نمی‌کند. $y = a^x$ هیچ‌گاه منفی و صفر نمی‌شود.

نمودار ($a > 0, a \neq 1$)



توابع لگاریتمی: $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

دامنه و برد: $R_f = \mathbb{R}, D_f = (0, +\infty)$

نمودار ($a > 0, a \neq 1$)

