

مجموعه کتاب های
بیست و یک

پرسؤال



مهروماه

دوازدهم

حسابان ۲

دکتر محمود داورزنی، سید امیرسعید حسینی، محمدرضا ابراهیمی

با خیال راحت



شو!

• درسنامه های جامع همراه با بررسی تمام مثال ها، تمرین ها و کاردرکلاس های کتاب درسی

• بیش از ۹۲۰ سؤال متنوع امتحانی شامل سؤالات ۲۰٪ ویژه دانش آموزان سخت کوش

خلاصه کپسولی



۱۱ کاربرگ امتحانی +



به نام خدای مهربان



مقدمه

هدف کتاب

امتحان نهایی تأثیر به‌سزایی در قبول شدن شما در رشته و دانشگاه مورد علاقه‌تون و در نتیجه در آینده شغلی و جایگاهتون در جامعه داره. در درس‌هایی مثل حسابان، شما در کنکور فقط باید به جواب آخر برسید و راه‌حلتون اهمیتی نداره؛ اما در امتحان نهایی، مرحله‌به‌مرحله پاسختون نمره داره و جواب آخرتون فقط بخش کوچیکی از نمره هست؛ پس باید خیلی خیلی بیشتر از گذشته برای امتحان نهایی وقت بگذارید.

ساختار بیست‌پک

مجموعه بیست‌پک شامل: ۱ کتاب پرسؤال ۲ کاربرگ امتحانی ۳ خلاصه‌کپسولی

۱ کتاب پرسؤال

در درسنامه، هر فصل را مطابق درس‌های کتاب درسی تقسیم‌بندی کردیم و یک درسنامه کامل برای شما نوشته‌ایم که با حل تمرین‌های کتاب درسی غنی شده و با خواندن آن‌ها می‌توانید به همه سؤالات امتحان نهایی پاسخ دهید. ما مرحله‌به‌مرحله پاسخ مثال‌ها را توضیح دادیم و شما هم باید تمامی این مراحل را به‌خوبی یاد بگیرید؛ چون اگر کامل پاسخ ندهید، مصحح‌های امتحان نهایی به شما نمره کامل را نخواهند داد! در این کتاب، تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی، سؤالات امتحان‌های نهایی داخل و خارج از کشور و سؤالاتی از کنکور را که ممکن است در امتحان نهایی هم با آن روبه‌رو شوید، جمع‌آوری کرده‌ایم و به‌صورت کاملاً تشریحی به آن‌ها پاسخ داده‌ایم. برخی از سؤالات را که با آیکون **۲۰٪** مشخص کرده‌ایم، کمی چالشی‌تر هستند و ویژه دانش‌آموزانی است که می‌خواهند در امتحان نهایی نمره بیست بگیرند. بچه‌های عزیز باز هم تأکید می‌کنم که به شیوه نوشتن پاسخ تشریحی خیلی توجه کنید؛ هر قسمت از این پاسخ‌ها در امتحان نهایی دارای بارم است.

۲ کاربرگ امتحانی

کاربرگ امتحانی شامل امتحان‌های فصل‌به‌فصل، دو امتحان تألیفی نوبت اول، دو امتحان شبیه‌سازی‌شده نهایی و دو امتحان برگزارشده اخیر به همراه پاسخ تشریحی و بارم‌بندی ریز هر سؤال است. پیشنهاد می‌کنیم بعد از حل تمامی سؤالات هر فصل در کتاب پرسؤال، امتحان آن فصل را در کاربرگ حل کنید، همچنین حل امتحان‌های نوبت اول و دوم می‌تواند کمک بسیار زیادی به موفقیت شما در جلسه امتحان بکند.

۳ خلاصه‌کپسولی

تیپ‌های بسیار پرتکرار امتحان‌های نهایی گذشته را با توضیح برایتان گردآوری کرده‌ایم. به احتمال بسیار زیاد، امتحان نهایی شما هم شباهت‌های فراوانی به امتحان نهایی‌های گذشته خواهد داشت. از مرور این گنج ارزشمند در شب امتحان غافل نشوید. امید است که با مطالعه مجموعه بیست‌پک و حل سؤالات آن، نمره کامل این درس را در امتحان نهایی کسب کنید. با سپاس فراوان از تمام دوستانی که در تألیف این کتاب همراهمان بودند.

دوستدار شما

مؤلفین بیست‌پک

فهرست



فصل اول:

تابع

پاسخنامه	سوالات امتحانی	درسنامه	
۱۵۶	۱۵	۶	درس ۱
۱۶۵	۳۱	۱۹	درس ۲

فصل دوم:

مثلثات



پاسخنامه	سوالات امتحانی	درسنامه	
۱۷۳	۴۷	۳۶	درس ۱
۱۷۹	۶۰	۵۲	درس ۲

فصل سوم:

حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت



پاسخنامه	سوالات امتحانی	درسنامه	
۱۸۵	۷۳	۶۴	درس ۱
۱۹۰	۸۵	۷۷	درس ۲

فصل چهارم:

مشتق



پاسخنامه	سوالات امتحانی	درسنامه	
۱۹۷	۹۶	۹۲	درس ۱
۲۰۰	۱۱۲	۹۹	درس ۲
۲۱۲	۱۲۱	۱۱۹	درس ۳

فصل پنجم:

کاربرد مشتق



پاسخنامه	سوالات امتحانی	درسنامه	
۲۱۴	۱۳۶	۱۲۴	درس ۱
۲۲۴	۱۴۶	۱۴۱	درس ۲
۲۲۷	۱۵۲	۱۴۸	درس ۳

فصل چهارم

مشتق





مشتق راست و مشتق چپ

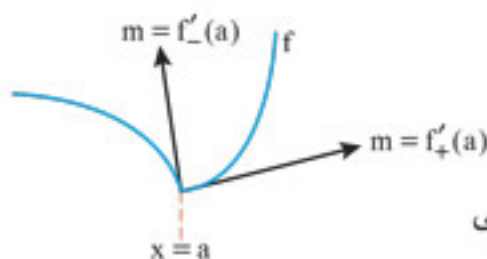
تعریف: برای تابع f در $x = a$ ، مشتق راست را با نماد $f'_+(a)$ و مشتق چپ را با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یعنی برای مشتق راست، حد راست می‌گیریم و برای مشتق چپ، حد چپ می‌گیریم.

نیم مماس‌های چپ و راست

همان‌طور که در درس قبل بیان شد، مشتق تابع در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار آن تابع در نقطه مورد نظر است. در مشتق‌های چپ و راست (مشتق‌های یک طرفه)، فقط سراغ نیم مماس‌های چپ و راست می‌رویم.



مشتق راست $(f'_+(a))$: مقدار شیب نیم مماس راست

مشتق چپ $(f'_-(a))$: مقدار شیب نیم مماس چپ

رقت‌کنیه: وجود مشتق چپ و راست به پیوستگی چپ و راست نیاز دارد؛ یعنی اگر تابع در $x = a$ پیوستگی راست نداشت، نیم مماس راست نداریم و اگر تابع در $x = a$ پیوستگی چپ نداشت، نیم مماس چپ نداریم.

تابع توی یک نقطه می‌تونه پیوستگی راست داشته باشه، ولی مشتق راست نداشتنه باشه؛ مثل $y = \sqrt{x}$ در $x = 0$ ؛ همچنین تابع می‌تونه پیوستگی چپ داشته باشه، ولی مشتق چپ نداشتنه باشه؛ مثل $y = \sqrt{-x}$ در $x = 0$. در هر دو حالت، مشتق، نامتناهی و ناموجود هست؛ پس پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری هست نه شرط کافی!

مشتق‌پذیری

به طور کلی تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

اولاً: تابع f در $x = a$ پیوسته باشد؛ یعنی حد چپ f ، حد راست f و مقدار تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \underbrace{f(a)}_{\substack{\text{مقدار} \\ \text{تابع در } a}}$$

حد راست حد چپ

ثانیاً: تابع f در $x = a$ ، مشتق‌های چپ و راست برابر و متناهی داشته باشند.

توجه: اگر مشتق‌های چپ و راست یک تابع در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، داریم:

$$\begin{cases} f'_+(a) = k \\ f'_-(a) = k \end{cases} \Leftrightarrow f'(a) = k$$

سؤال تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1 & ; x \geq 1 \\ x^2+b & ; x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقادیر a و b را بیابید.

جواب تابع f در $x=1$ پیوسته است:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+1) = a+1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+b) = 1+b \\ f(1) &= a+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+1 = 1+b \Rightarrow a=b$$

همچنین مشتق‌های چپ و راست تابع f در $x=1$ با هم برابرند:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+1 - (a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax-a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x-1)}{(x-1)} = a$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+b - (a+1)}{x-1} \stackrel{a=b}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2$$

در نتیجه $a=2$ و چون $a=b$ برابر است، پس $b=2$.

بررسی نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها وجود ندارد، از اهمیت زیادی برخوردار است. در ادامه به این موضوع می‌پردازیم:

نقاط مشتق‌ناپذیر

۱. ناپیوستگی
۲. نابرابری مشتق چپ و راست (نقاط گوشه‌ای)
۳. نامتناهی شدن مشتق

ناپیوستگی

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع f در این نقطه، پیوسته است.

اثبات: برای اثبات پیوستگی f در $x = a$ ، کافی است نشان دهیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (a - a) \times f'(a) = 0$$

پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$.

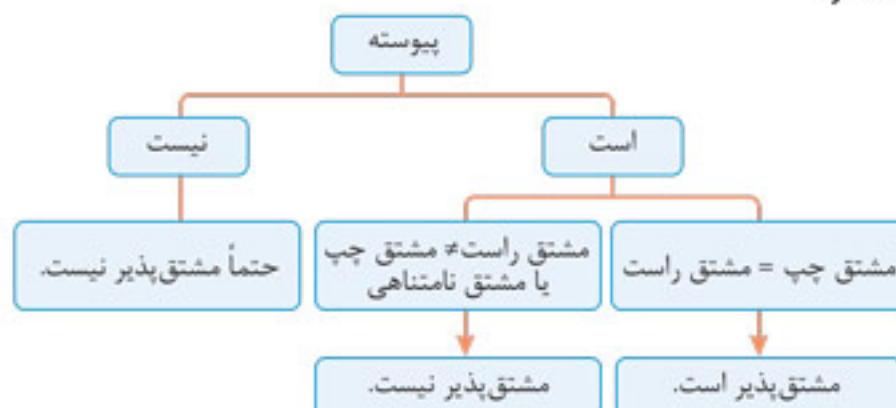
مشاوره نهایی: امکان دارد این اثبات توی امتحان نهایی بیاد، چون توی کتاب درسی هست.

نتیجه: با توجه به قضیه قبل می‌توان گفت:

«اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه تابع f در این نقطه، مشتق‌پذیر هم نیست.»

بنابراین یکی از حالت‌هایی که می‌توان مشتق‌ناپذیری یک تابع را در $x = a$ نتیجه گرفت، این است که نشان دهیم تابع f در $x = a$ ناپیوسته است.

نکته: عکس قضیه بالا درست نیست؛ یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. اگر تابع توی نقطه $x = a$ پیوسته باشه و مشتق چپ و راستش توی نقطه $x = a$ موجود و با هم برابر باشن، میشه گفت تابع توی نقطه $x = a$ مشتق‌پذیره. قضیه و نکته بالا رو میشه این‌جوری خلاصه کرد:



(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

سؤال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 1 \\ x+1 & ; x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا تابع f در $x = 1$ مشتق دارد؟

جواب روش اول: ابتدا پیوستگی تابع f را در $x = 1$ بررسی می‌کنیم. برای این کار، باید حد راست f در $x = 1$ ، حد چپ f در $x = 1$ و همچنین $f(1)$ را محاسبه کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 1+1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ f(1) &= 1^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

بنابراین تابع f در $x = 1$ پیوسته نیست و در نتیجه تابع f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

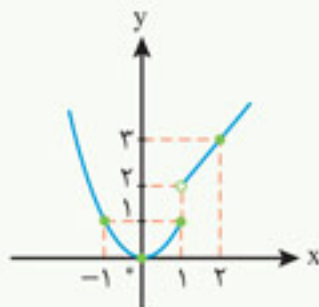
روش دوم: نمودار تابع f به صورت زیر است. (برای رسم بهتر، میشه از نقطه‌یابی استفاده کرد.) همان‌طور که از روی نمودار هم مشاهده می‌شود، تابع f در $x = 1$ پیوسته نیست؛ پس مشتق‌پذیر هم نیست.

x	۱	۲
$y = x+1$	۲	۳

$(x > 1)$

x	-۱	۰	۱
$y = x^2$	۱	۰	۱

$(x \leq 1)$



سؤال اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. مقادیر $f'(0)$ و $f'(3)$ را در صورت وجود بیابید. (مشابه مثال کتاب درسی)

جواب

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(h)(x)(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

پس تابع مشتق، برابر $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ است.

$x = 0$ در دامنه تابع مشتق قرار ندارد؛ بنابراین $f'(0)$ موجود نیست. (نقطه $x = 0$ توی دامنه خود تابع f هم نیست!) اکنون $f'(3)$ را

$$f'(3) = \frac{-1}{(3)^2} = -\frac{1}{9}$$

محاسبه می‌کنیم:

فرمول‌های مشتق

به کمک تعریف مشتق $\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$ ، تابع مشتق بعضی از توابع را محاسبه کرده‌ایم که در جدول زیر آمده است. این روابط را خیلی خوب به خاطر بسپارید.

تابع	مشتق	مثال
1) $f(x) = c$	مشتق تابع ثابت همیشه صفر است! $f'(x) = 0$	1) $f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$ 2) $f(x) = -1 \Rightarrow f'(x) = 0$
2) $f(x) = ax + b$	مشتق تابع خطی، ضریب x است! $f'(x) = a$	1) $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2$ 2) $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$
3) $y = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$ توان پشت x قرار می‌گیرد و یک واحد از توان x کم می‌شود.	1) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$ 2) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه توابع kf و $f \pm g$ نیز در $x = a$ مشتق‌پذیرند و مشتق آن‌ها برابر است با:

$$(kf)'(a) = kf'(a)$$

یعنی ضریب عددی رو کنار می‌ذاریم و فقط از f توی $x = a$ مشتق می‌گیریم و در آخر ضریب عددی رو توی مشتق گرفته‌شده، ضرب می‌کنیم:

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

یعنی مشتق جمع یا تفریق، میشه جمع یا تفریق مشتق‌ها! (از تک‌تک جمله‌ها جداگونه مشتق می‌گیریم.)

الف) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3(5x^4) + 2(2x) \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 4x$

ب) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2} - x^4 + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(-2x^{-3}) - (4x^3) + 2(-x^{-2}) \Rightarrow f'(x) = -x^{-3} - 4x^3 - 2x^{-2}$

مثال:

تابع	مشتق	مثال
4) $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$	$f'(x) = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$; $(n, m) = 1$	1) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشتق $\sqrt{x}$ برابر $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ رو همین‌جا حفظ کن!
5) $y = \sqrt{ax + b}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$	2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$
6) $y = f(x) \times g(x)$	$y' = (\text{اولی} \times \text{مشتق دومی}) + (\text{دومی} \times \text{مشتق اولی})$ $\Rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	$f(x) = (x+1)\sqrt{x}$ $\Rightarrow f'(x) = (1)(\sqrt{x}) + (\frac{1}{2\sqrt{x}})(1)$





مثال	مشتق	تابع
$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{-x+1}}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-4)(\sqrt{-x+1}) - (\frac{-1}{2\sqrt{-x+1}})(x^2-4x)}{(\sqrt{-x+1})^2}$	$y' = \frac{(\text{صورت} \times \text{مشتق مخرج}) - (\text{مخرج} \times \text{مشتق صورت})}{(\text{مخرج})^2}$ $\Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$
$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(1 + \sin x) - (\cos x)(\sin x)}{(1 + \sin x)^2}$ $= \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^2 \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x \cos x + x^2(-\sin x)$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f(x) = 2x + \tan x$ $\Rightarrow f'(x) = 2 + 1 + \tan^2 x = 3 + \tan^2 x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

سؤال مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن جواب، الزامی نیست.)

الف) $y = 5x^2$

ب) $y = x^5 - 4x^2 + 6$

پ) $y = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x + 1)$

ت) $y = \frac{x^2 - x}{3x + 5}$

ث) $y = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1)$ (تمرین کتاب درسی)

ج) $y = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$ (کاردرکلاس کتاب درسی)

چ) $y = \sin x \tan x$ (کاردرکلاس کتاب درسی)

ح) $y = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$ (کاردرکلاس کتاب درسی)

جواب

ضریب ۵ رو نگه دار، از x^2 مشتق بگیر و بعدش توی ۵ ضرب کن! $y = 5x^2 \Rightarrow y' = 5 \times 2x^2 = 10x^2$ (الف)

از تک تک جمله ها جداگونه مشتق بگیر! $y = x^5 - 4x^2 + 6 \Rightarrow y' = 5x^4 - 8x + 0 = 5x^4 - 8x$ (ب)

$y = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x + 1) \Rightarrow y' = 6x^2(-x^2 + 7x + 1) + (2x^2 + 1)(-2x + 7)$ (پ)

$y = \frac{x^2 - x}{3x + 5} \Rightarrow y' = \frac{(2x-1)(3x+5) - (x^2-x)(3)}{(3x+5)^2}$ (ت)

$y = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1) \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x)$ (ث)

$y = \sqrt{x}(3x^2 + 5) \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + \sqrt{x}(6x)$ (ج)

$y = \sin x \tan x \Rightarrow y' = \cos x \tan x + \sin x(1 + \tan^2 x)$ (چ)

$y = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-\Delta \sin x)(1 - \sin x) - \Delta \cos x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$ (ح)

سؤال اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(1) = -3$ ، $f'(1) = 2$ ، $g(1) = 5$ و $g'(1) = -2$ ، آنگاه مقادیر $(f \cdot g)'(1)$ ، $(\frac{f}{g})'(1)$ و $(2f - 3g)'(1)$ را به دست آورید. (مشابه کاردرکلاس کتاب درسی)

جواب

$(f \cdot g)'(1) = f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1) = 2 \times 5 + (-3)(-2) = 10 + 6 = 16$

$(\frac{f}{g})'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \times 5 - (-3)(-2)}{5^2} = \frac{10 - 6}{25} = \frac{4}{25}$

$(2f - 3g)'(1) = 2f'(1) - 3g'(1) = 2 \times 2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$



سؤال سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آن‌ها برابر باشد.

جواب اگر $f(x) = x + 2$ ، $g(x) = x - 7$ و $h(x) = x$ ، آن‌گاه:

بی‌شمار تابع با این شرایط همیشه مثال زد!

$$f'(x) = g'(x) = h'(x) = 1$$

مشتق تابع مرکب

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

قاعده زنجیری: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق پذیر است و داریم:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \times f'(u)$$

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u نیز تابعی از x باشد، داریم:

(مشابه مثال کتاب درسی)

سؤال اگر $y = (x^2 + 3x + 7)^5$ ، حاصل y' را به دست آورید. (ساده کردن جواب، الزامی نیست.)

$$y = (x^2 + 3x + 7)^5 = u^5 \Rightarrow y' = u' \times 5u^4 = (2x + 3) \times 5(x^2 + 3x + 7)^4$$

جواب

(کاردرکلاس کتاب درسی)

سؤال اگر $h(x) = (x^2 + 1)^2 (\Delta x - 1)$ ، حاصل h' را پیدا کنید.

$$h(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{f(x)} \cdot \frac{(\Delta x - 1)}{g(x)} = f(x) \times g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = f'(x)(\Delta x - 1) + (x^2 + 1)^2 (\Delta)$$

جواب

$$f(x) = (x^2 + 1)^2 = u^2 \Rightarrow f'(x) = u' \times 2u = (2x) \times 2(x^2 + 1)$$

برای محاسبه f' از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم:

$$h'(x) = (2x)2(x^2 + 1)^2 (\Delta x - 1) + (x^2 + 1)^2 (\Delta)$$

بنابراین:

سؤال اگر $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x - 4}\right)^7$ ، حاصل f' را پیدا کنید. (ساده کردن جواب، الزامی نیست.)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{3x - 4}\right)^7 = u^7 \Rightarrow f'(x) = u' \times 7u^6 = \left(\frac{2x(3x - 4) - x^2(3)}{(3x - 4)^2}\right) \times 7\left(\frac{x^2}{3x - 4}\right)^6$$

جواب

سؤال اگر $f(x) = \frac{1}{x} (\Delta \sqrt{x} + x)^4$ ، حاصل f' را به دست آورید. (ساده کردن جواب، الزامی نیست.)

$$f(x) = \frac{1}{x} (\Delta \sqrt{x} + x)^4 = g(x) \times h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \times h(x) + g(x) \times h'(x) = \frac{-1}{x^2} (\Delta \sqrt{x} + x)^4 + \frac{1}{x} \times h'(x)$$

جواب

$$h(x) = (\Delta \sqrt{x} + x)^4 = u^4 \Rightarrow h'(x) = u' \times 4u^3 = \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{x}} + 1\right) \times 4(\Delta \sqrt{x} + x)^3$$

اکنون h' را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} (\Delta \sqrt{x} + x)^4 + \frac{1}{x} \times 4(\Delta \sqrt{x} + x)^3 \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{x}} + 1\right)$$

بنابراین:

$$y' = \frac{(0)(x) - (1)(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

دقت کنید: مشتق $y = \frac{1}{x}$ برابر $y' = -\frac{1}{x^2}$ است:

(کاردرکلاس کتاب درسی)

سؤال مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن جواب الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \sin(3x^2 + 5)$

ب) $y = \sin^2 x$

پ) $g(x) = \cos x^2$

ت) $y = \sin x \cos 2x$

ث) $h(x) = \tan^5(2x - 3)$

الف) $f(x) = \sin(3x^2 + 5) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \times \cos u = 6x \times \cos(3x^2 + 5)$

جواب

ب) $y = \sin^2 x = (\sin x)^2 = u^2 \Rightarrow y' = u' \times 2u = \cos x \times 2 \sin x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

پ) $g(x) = \cos x^2 = \cos u \Rightarrow g'(x) = u' \times (-\sin u) = (2x)(-\sin x^2) = -2x \sin x^2$

ت) $y = \underbrace{\sin x}_{f(x)} \underbrace{\cos 2x}_{g(x)} = f(x) \times g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) = \cos x \cos 2x + \sin x \times g'(x)$



(تمرین کتاب درسی)

سوال اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ ، حاصل $f'(\frac{\pi}{4}) - f''(\frac{\pi}{4})$ را به دست آورید.

جواب به جای $\cos 2x$ می نویسیم $1 - 2\sin^2 x$:

$$f(x) = \sin^2 x - \cos 2x = \sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 3\sin^2 x - 1 = 3u^2 - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(2u) = \cos x(2\sin x) = 2\sin x \cos x = 2(\sin x \cos x) = 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\sin 2x = 2\sin u \Rightarrow f''(x) = u'(2\cos u) = 2(2\cos 2x) = 4\cos 2x$$

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4}) - f'(\frac{\pi}{4}) = 4\cos 2(\frac{\pi}{4}) - 2\sin 2(\frac{\pi}{4}) = 4\cos \pi - 2\sin \pi = 4(-1) - 2(0) = -4$$

حفظیات:

- شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a واقع بر نمودار f ، برابر است با مشتق تابع f در $x = a$ ، یعنی $f'(a)$.
- اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ افقی باشد، آن‌گاه $f'(a) = 0$.
- اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ قائم باشد، آن‌گاه مشتق در $x = a$ تعریف نشده است. ($f'(a) = \infty$)
- اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه تابع f در این نقطه پیوسته است.
- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه تابع f در این نقطه مشتق پذیر نیست.
- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که f ، لزوماً در $x = a$ مشتق پذیر است.
- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'(a) = +\infty$ یا $f'(a) = -\infty$ باشد، در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی تابع f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.
- مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آن‌ها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم و با نماد $D_{f'}$ نمایش می‌دهیم.
- اگر تابع f پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست آن در $x = a$ متناهی و با هم برابر باشند، آن‌گاه تابع f در $x = a$ مشتق پذیر است.
- اگر تابع f پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست آن در $x = a$ با هم برابر نباشند، $x = a$ نقطه گوشه‌ای محسوب می‌شود.
- مقدار شیب نیم‌مماس راست تابع در $x = a$ ، یعنی مشتق راست آن در $x = a$ و مقدار شیب نیم‌مماس چپ تابع در $x = a$ ، یعنی مشتق چپ آن در $x = a$.
- مشتق تابع ثابت، همیشه صفر است.
- مشتق تابع $y = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ ، برابر $y' = a$ است.
- مشتق تابع $y = \sqrt{x}$ ، برابر $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.
- مشتق تابع $y = \frac{1}{x}$ ، برابر $y' = -\frac{1}{x^2}$ است.
- مشتق تابع $y = \sin x$ ، برابر $y' = \cos x$ است.
- مشتق تابع $y = \cos x$ ، برابر $y' = -\sin x$ است.
- مشتق تابع $y = \tan x$ ، برابر $y' = 1 + \tan^2 x$ است.
- تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه در هر نقطه متعلق به این بازه مشتق پذیر باشد.
- تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه $x = a$ ، مشتق راست و در نقطه $x = b$ ، مشتق چپ داشته باشد.
- تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه $x = a$ ، مشتق راست داشته باشد.
- تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه $x = b$ ، مشتق چپ داشته باشد.
- اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، داریم:

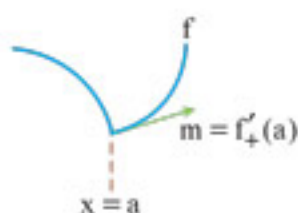
$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$





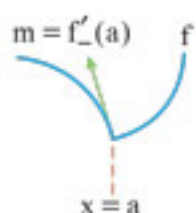
خلاصه نموداری درس ۲

مشتق پذیری و پیوستگی



مشتق راست: برای تابع f در $x=a$ ، مشتق راست را با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند و برابر مقدار شیب خط نیم مماس راست در $x=a$ است.

مشتق‌های یک طرفه



مشتق چپ: برای تابع f در $x=a$ ، مشتق چپ را با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند و برابر مقدار شیب خط نیم مماس چپ در $x=a$ است.

مشتق پذیری تابع در یک نقطه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

۱ تابع f در $x=a$ پیوسته باشد:

تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر است، هرگاه:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

۲ مشتق‌های چپ و راست تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند:

مشتق پذیری تابع روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه در همه نقاط این بازه مشتق پذیر باشد.

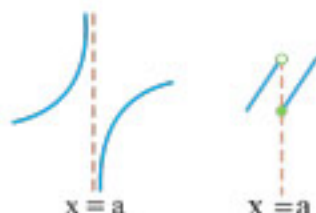
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه $x=a$ مشتق راست و در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

نقاط مشتق ناپذیر

۱ ناپیوستگی: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، مشتق پذیر هم نیست.



۲ نابرابری مشتق‌های چپ و راست: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در $x=a$ هر دو متناهی باشند، ولی برابر نباشند یا یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق ناپذیر است. به این نقاط، «نقاط گوشه‌ای» می‌گویند.



۳ نامتناهی شدن مشتق: اگر خط مماس در $x=a$ قائم باشد ($f'(a) = \infty$) خط $x=a$ را «مماس قائم» می‌گوییم و تابع در $x=a$ مشتق پذیر نیست.



فرمول‌های مشتق

مشتق تابع ثابت: $y=c \Rightarrow y'=0$

مشتق تابع خطی: $y=ax+b \Rightarrow y'=a$

مشتق $y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

مشتق $y=\sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y'=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

مشتق $y=\sqrt{ax+b} \Rightarrow y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

مشتق جمع و تفریق: از تک تک جملات جداگانه مشتق می‌گیریم.

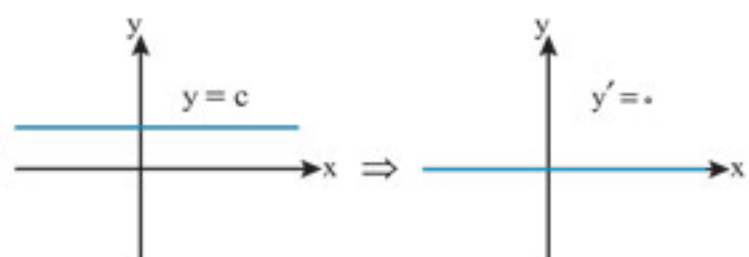
مشتق حاصل ضرب: $y=f \times g \Rightarrow y'=f'g+g'f$ (به بیان دیگر: (اولی $\times$ مشتق دومی) + (دومی $\times$ مشتق اولی))

مشتق تقسیم: $y=\frac{f}{g} \Rightarrow y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$ (به بیان دیگر: صورت $\times$ مشتق مخرج - مخرج $\times$ مشتق صورت) / (مخرج)^۲

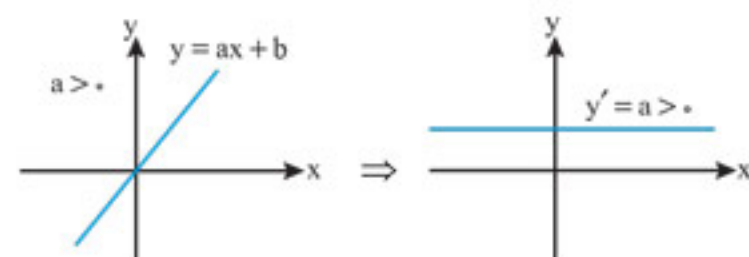
مشتق تابع مرکب: $y=(f \circ g)(x) \Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$



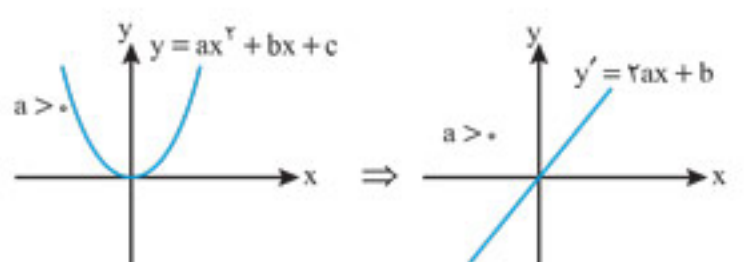
رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f



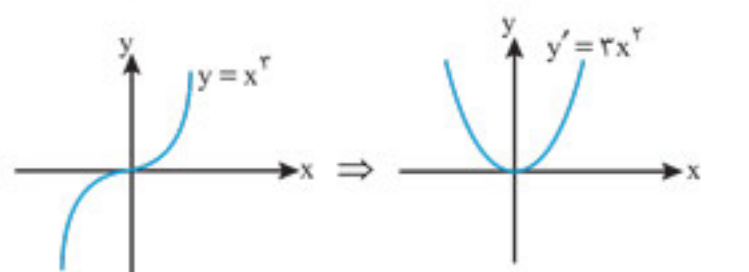
مشتق تابع ثابت برابر صفر است.



مشتق تابع خطی، تابع ثابت است.



مشتق تابع درجه دوم، یک تابع خطی است.



مشتق تابع $y=x^2$ ، برابر $y'=2x$ است.

مشتق مرتبه دوم: اگر از تابع $y=f(x)$ مشتق بگیریم، تابع مشتق یعنی $y'=f'(x)$ به دست می‌آید. حال اگر از تابع مشتق مجدداً مشتق بگیریم، مشتق مرتبه دوم که آن را به شکل $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم، به دست می‌آید.

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

☒ ☐ (خرداد ۹۹ - خارج)

۴۴۷. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق پذیر است.

☒ ☐ (دی ۱۴۰۱، خرداد ۹۹)

۴۴۸. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در a مشتق پذیر هم نیست.

☒ ☐ (خرداد ۱۴۰۱)

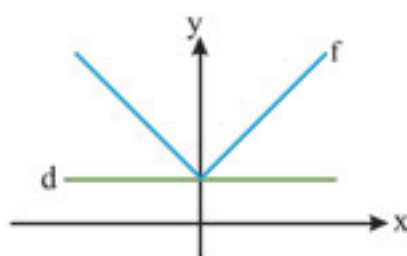
۴۴۹. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن‌گاه $f'(a)$ وجود ندارد.

☒ ☐

۴۵۰. همه توابع چند جمله‌ای روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیرند.

☒ ☐ (مشابه خرداد ۹۹ - خارج)

۴۵۱. در شکل زیر، خط d در $x=0$ بر نمودار تابع f مماس است.



☒ ☐ (شهریور ۱۴۰۰)

۴۵۲. تابع $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است.





(خرداد ۱۴۰۰ - مشابه شهریور ۹۹)



(دی ۹۹)



(خرداد ۹۸ - خارج)

۴۵۸. اگر $f'(1) = 2$ و $g'(1) = 3$ باشد، در این صورت حاصل $(3f + 2g)'(1)$ برابر با ۱۲ است. **پرتکرار (مشابه دی ۱۴۰۱، دی ۱۴۰۰ - خارج، مشابه دی ۹۹ - خارج)**۴۵۹. اگر $f(0) = 1$ ، $f'(0) = 1$ و $g'(1) = -1$ باشد، $(gof)'(0) = -1$ است.۴۶۰. اگر نمودار تابع f به صورت  باشد، آن گاه نمودار تابع مشتق آن به صورت  است.

سؤالات جای خالی



جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب پر کنید.

(خرداد ۱۴۰۰)

۴۶۱. اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه f در $x = a$ است.۴۶۲. در صورت وجود، $f'(a)$ را شیب بر تابع f در $x = a$ می‌گوییم.۴۶۳. تابع $y = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر (است / نیست)

(خرداد ۹۹ - خارج)

۴۶۴. خط $x = 1$ بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ است.۴۶۵. تابع $f(x) = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 1 \\ x^2+1 & ; x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است.۴۶۶. در تابع $f(x) = |x-2|$ ، نقطه $x = 2$ یک نقطه برای تابع f است. (ناپیوستگی / گوشه‌ای)

(مشابه دی ۱۴۰۰، دی ۹۸)

۴۶۸. اگر $f'(2) = -1$ و $g'(2) = 3$ ، در این صورت $(2f + 3g)'(2)$ برابر با است.

(خرداد ۱۴۰۰ - خارج)

۴۶۹. اگر $f'(3) = -2$ و $g'(3) = \frac{1}{3}$ ، حاصل $(4g - \frac{1}{3}f)'(3)$ برابر با است.۴۷۰. اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر و $g'(3) = 4$ ، $g(3) = 8$ ، $f'(3) = 2$ و $f(3) = 5$ باشد، مقدار $(\frac{f}{g})'(3)$ برابر است.

(خرداد ۱۴۰۰ - خارج، مشابه دی ۹۷)

۴۷۱. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$ در نقطه‌ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد است.

(دی ۹۷ - خارج)

۴۷۲. شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -2x^2 + 3x$ در نقطه‌ای به طول ۱ برابر است.

(شهریور ۱۴۰۰)

۴۷۳. شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = 1 - 5x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن برابر است.۴۷۴. در تابع $f(x) = x|x|$ ضابطه $f(x) = x|x|$ مقدار $f'(0)$ برابر است.۴۷۵. اگر $f(x) = \sin x$ ، حاصل $f''(\frac{\pi}{4})$ برابر با است.

مسائل



(خرداد ۱۴۰۰ - خارج)

۴۷۶. تابعی مانند f مثال بزنید که در $x = 3$ پیوسته باشد، ولی مشتق پذیر نباشد.

(مشابه خرداد ۱۴۰۰، خرداد ۹۸)

۴۷۷. ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه تابع f در $x = a$ پیوسته است.

۴۷۸. برای هر یک از موارد زیر، یک نمودار رسم کنید:

(الف) تابعی که مشتق آن در یک نقطه برابر صفر شود.

(ب) تابعی که مشتق آن در $x = 2$ برابر ۳ شود.

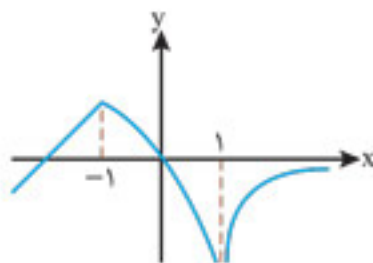
(پ) تابعی که مشتق آن در تمام نقاط مثبت باشد.

(ت) تابعی که مشتق آن در تمام نقاط منفی باشد.





۴۸۳. با توجه به نمودار $y = f(x)$ ، تابع f در کدام نقطه یا نقاط، مشتق پذیر نیست؟ توضیح دهید.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۸۴. در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \\ x+2 & ; x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.

۴۸۵. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+2 & ; x \geq 2 \\ (x-1)^2 & ; x < 2 \end{cases}$ را رسم کرده و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

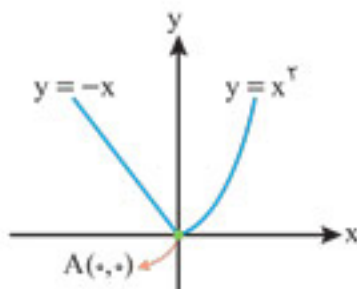
الف) آیا تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است؟

ب) در صورت وجود، مشتق راست تابع f را در $x = 2$ به دست آورید.

پ) در صورت وجود، مشتق چپ تابع f را در $x = 2$ به دست آورید.

ت) معادلات خطوط نیم مماس راست و چپ در $x = 2$ را در صورت وجود بنویسید.

۴۸۶. با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این تابع در نقطه A مشتق پذیر نیست.



۴۸۷. اگر $f(x) = (x^2 - 4)|x|$ باشد، مشتق های راست و چپ تابع f را در $x = 2$ محاسبه کنید.

۴۸۸. اگر $f(x) = (1-x)|x| - |x-1|$ ، حاصل $f'_+(1) + f'_-(1)$ را بیابید.

۴۸۹. مشتق پذیری تابع $f(x) = |x-1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

۴۹۰. مشتق پذیری تابع $f(x) = |2x-4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

۴۹۱. مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2-4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

۴۹۲. مشتق پذیری تابع $f(x) = 4x(1-|x|)$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

۴۹۳. نشان دهید نقطه ای به طول $x = -1$ ، نقطه گوشه ای برای تابع $f(x) = |x^2 + x|$ است.

۴۹۴. دو تابع $f(x) = (x-1)|x|$ و $g(x) = (x-1)^2|x|$ را در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری آن ها را در $x = 1$ بررسی کنید.

ب) از مقایسه مشتق پذیری آن ها در $x = 1$ چه نتیجه ای می گیرید؟

۴۹۵. به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۴۹۶. مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

۴۹۷. سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آن ها با هم برابر باشند.

۴۹۸. اگر f و g توابع مشتق پذیر و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ باشد، مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

پرتکرار (خرداد ۱۴۰۰ - خارج، مشابه دی ۹۷، مشابه دی ۹۷ - خارج)

۴۹۹. اگر $g(x) = \sqrt{x+1}$ و $f(x) = 3x^2 + 1$ باشد، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

ب) $(f-2g)'(0)$

ت) $(\frac{3f}{2g})'(0)$

۵۰۰. اگر $f(x) = \sqrt{x} \cdot g(x)$ ، $g(4) = 8$ و $g'(4) = 7$ باشد، مقدار $f'(4)$ را حساب کنید.

الف) $(f+g)'(2)$

پ) $(f \times g)'(0)$



۵۰۱. اگر $f'(3) = 2$ ، $f(3) = 8$ و $g'(3) = -3$ ، مشتق توابع زیر را در $x = 3$ بیابید.

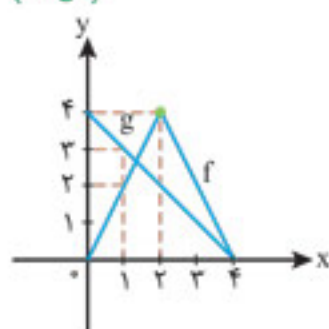
الف) $y = g^2(x) - xf(x)$

ب) $y = \sqrt[3]{f(x)} + x^2g(x)$

۵۰۲. اگر $f(1) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = 3$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x \cdot f(x)$ را در $x = 1$ به دست آورید.

۵۰۳. نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد،

(دی ۹۸)



الف) $h'(1)$ را بیابید.

ب) $h'(2)$ را پیدا کنید.

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن جواب الزامی نیست.)

۵۰۴. $g(x) = (x^2 + 3x + 1)^5$

۵۰۵. $f(x) = (2x^2 + \sqrt{x} - 1)^2$

۵۰۶. $f(x) = (4x^2 - 7)(2x - 1)^2$

۵۰۷. $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$

۵۰۸. $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{\Delta x}$

۵۰۹. $g(x) = \frac{9x + 1}{x - x^2}$

۵۱۰. $h(x) = \frac{2}{x}$

۵۱۱. $h(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x + 9}$

۵۱۲. $y = \frac{3x^2}{x^2 - 5x + 2}$

۵۱۳. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

۵۱۴. $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 3x^2}$

۵۱۵. $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

۵۱۶. $f(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^2 + 1)$

۵۱۷. $f(x) = (x^2 + 1)^2 \sqrt{3x + 2}$

۵۱۸. $f(x) = (\sqrt{3x + 1})(2x^2 - 1)$

۵۱۹. $y = (-3x^2 + 5x - 1)(\sqrt{x} - 1)$

۵۲۰. $f(x) = (\Delta x^2 - x)^4 (\sqrt{2x + 1})$

۵۲۱. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)(x^4 + 1)$

۵۲۲. $y = (x^2 + 3x - 1)(\sin 2x)$

۵۲۳. $y = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$

۵۲۴. $g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

۵۲۵. $y = 2 \sin(\sqrt{2x})$

(شهریور ۹۹، مشابه دی ۹۹ - خارج)

(شهریور ۹۸)

پُرتکرار (مشابه خرداد ۱۴۰۱، دی ۹۹، مشابه خرداد ۹۹ - خارج)

(شهریور ۹۸ - خارج)

(خرداد ۱۴۰۰)

(شهریور ۱۴۰۱)

(خرداد ۱۴۰۱)

(شهریور ۹۹)

پُرتکرار (خرداد ۱۴۰۱ - خارج، مشابه دی ۱۴۰۰، مشابه خرداد ۹۸، مشابه دی ۹۷ - خارج)

پُرتکرار (مشابه خرداد ۱۴۰۰ - خارج، خرداد ۹۸، مشابه دی ۹۷)

(مشابه خرداد ۹۹، دی ۹۸)

(خرداد ۹۹)

(مشابه دی ۱۴۰۱، شهریور ۹۹)

(خرداد ۱۴۰۳، مشابه شهریور ۱۴۰۱)

پُرتکرار (خرداد ۱۴۰۰، مشابه دی ۱۴۰۰ - خارج، مشابه دی ۹۸ - خارج)

(خرداد ۱۴۰۲)

(شهریور ۹۸ - خارج)

(خرداد ۹۹ - خارج)

(دی ۹۹)

(دی ۹۹ - خارج، مشابه دی ۹۷ - خارج)





(شهریور ۱۴۰۰)

(خرداد ۹۸)

پُر تکرار (مشابه دی ۱۴۰۰، مشابه دی ۱۴۰۰ - خارج، دی ۹۸)

(دی ۹۸ - خارج)

(شهریور ۹۸)

(خرداد ۹۹)

(خرداد ۱۴۰۱)

(خرداد ۱۴۰۳)

(شهریور ۱۴۰۱)

(خرداد ۱۴۰۲)

(خرداد ۹۹ - خارج)

پُر تکرار (خرداد ۱۴۰۱ - خارج، مشابه خرداد ۱۴۰۰ - خارج، مشابه دی ۹۷)

(شهریور ۱۴۰۰ - خارج)

(شهریور ۱۴۰۰)

(خرداد ۱۴۰۰ - خارج)

(خرداد ۱۴۰۰ - خارج)

(خرداد ۱۴۰۰)

(دی ۱۴۰۱)

$$g(x) = 3x(x^2 - 6x)^2 + \cos 2x \quad .526$$

$$g(x) = \cos^2(2x) \quad .527$$

$$g(x) = \sin^2(2x + 1) \quad .528$$

$$y = \tan^2 x - 2 \cos x \quad .529$$

$$g(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \quad .530$$

$$h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \quad .531$$

$$g(x) = 5 \tan^2 x + \sin(x^2) \quad .532$$

$$g(x) = \sin^2(3x) + \tan(x^2) \quad .533$$

$$f(x) = \tan^5(2x) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad .534$$

$$h(x) = \sin(3x^2) \quad .535$$

$$g(x) = \frac{f \tan x}{3x^2 - 1} \quad .536$$

$$y = \sin 3x + \cos^2(4x^2 - 2) \quad .537$$

$$y = \cos^2(3x - 2) \quad .538$$

$$y = \tan^2(3x) \quad .539$$

$$f(x) = \frac{f \sin \frac{x}{2}}{x^2 + \sqrt{x}} \quad .540$$

$$y = \left(\tan x + \frac{2}{x}\right)^2 \quad .541$$

$$y = \frac{2 \sin 2x + f x}{x^2 + x + 1} \quad .542$$

$$g(x) = 3 \tan^2 x + \cos(x^2) \quad .543$$

$$g(x) = \cos^2(2x) - \frac{1}{x} \quad .544$$

+۲۰ .545 مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3x^2 + 3x + 1}{x + 1}$ را به ازای $x = 1$ بیابید.

+۲۰ .546 مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2(\Delta x)} + \frac{1}{3 \tan^2(x)}$

ب $g(x) = (4x^2 - 1) \sin^2(\cos x)$

پ $f(x) = \left(\sin^2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right) \sqrt{\tan x}$

.547 مشتق تابع $f(x) = (a + b - 2)x^2 + (a - b + 1)x + a$ همواره برابر صفر است. مقادیر a ، b و ضابطه تابع f را بیابید.

(تمرین کتاب درسی)

.548 مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورید و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد.

پُر تکرار (خرداد ۱۴۰۱ - خارج، دی ۹۹ - خارج، خرداد ۹۸ - خارج)

.549 نشان دهید که تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ دارای مماس قائم است.

(خرداد ۹۹)

.550 معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۰)

.551 معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ به دست آورید.

(دی ۱۴۰۱)

.552 معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۱)

.553 برای تابع $f(x) = x^2 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها، معادله خط مماس را بنویسید.

+۲۰ .554 نقطه‌ای از نمودار تابع $y = x^2 + 3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی تابع، در این نقطه، موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

+۲۰ .555 نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع $y = -4x^2 + 16x + 1$ پیدا کنید، به طوری که مماس بر نمودار تابع، موازی محور طول‌ها باشد.

+۲۰ .556 خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ در نقطه تقاطع این منحنی با محور x ها، یک مثلث با محورهای مختصات می‌سازد. مساحت این مثلث را بیابید.

(خرداد ۱۴۰۲)

۵۵۷. با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $x > 0$ ، آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(مثال کتاب درسی)

۵۵۸. اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، آن گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

۵۵۹. موارد زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $f(x) = c$ ، آن گاه $f'(x) = 0$.

ب) اگر $f(x) = x^n$ ، آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

پ) اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ ، آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ ($x > -\frac{b}{a}$).

ت) اگر $f(x) = \sin x$ ، آن گاه $f'(x) = \cos x$.

ث) اگر $f(x) = \cos x$ ، آن گاه $f'(x) = -\sin x$.

ج) اگر $f(x) = \tan x$ ، آن گاه $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

(شهریور ۱۴۰۱)

۵۶۰. مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \geq 1 \\ 3x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

(خرداد ۱۴۰۲، مشابه شهریور ۹۹)

۵۶۱. مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & ; x < 1 \\ 2x^2 - 3 & ; x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۵۶۲. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & ; x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید.

(خرداد ۹۹ - خارج)

۵۶۳. تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x > 1 \\ x^2 - 2x & ; x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. حاصل $a - b$ را به دست آورید.

۵۶۴. در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & ; x \geq 0 \\ 1 & ; x < 0 \end{cases}$

الف) مشتق پذیری تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

ب) ضابطه f' و دامنه آن را به دست آورید.

پ) نمودارهای f و f' را رسم کنید.

۵۶۵. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \geq 1 \\ 2x & ; x < 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

(دی ۹۹، مشابه دی ۹۸)

الف) مشتق پذیری تابع f را در $x = 1$ بررسی کنید.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

(خرداد ۱۴۰۱ - خارج)

۵۶۶. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; x < -1 \\ x + 1 & ; -1 \leq x < 2 \end{cases}$ را رسم کرده و مشتق پذیری آن را روی بازه $[-2, 0]$ بررسی کنید.

۵۶۷. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 4 & ; x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) مشتق پذیری تابع f را روی بازه $[-1, 2]$ بررسی کنید.

پ) مشتق پذیری تابع f را روی بازه $[2, 3]$ بررسی کنید.

(دی ۹۶)

۵۶۸. دامنه تابع مشتق $f(x) = \sqrt{1-2x}$ را به دست آورید.

۵۶۹. دامنه مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ را مشخص کنید.

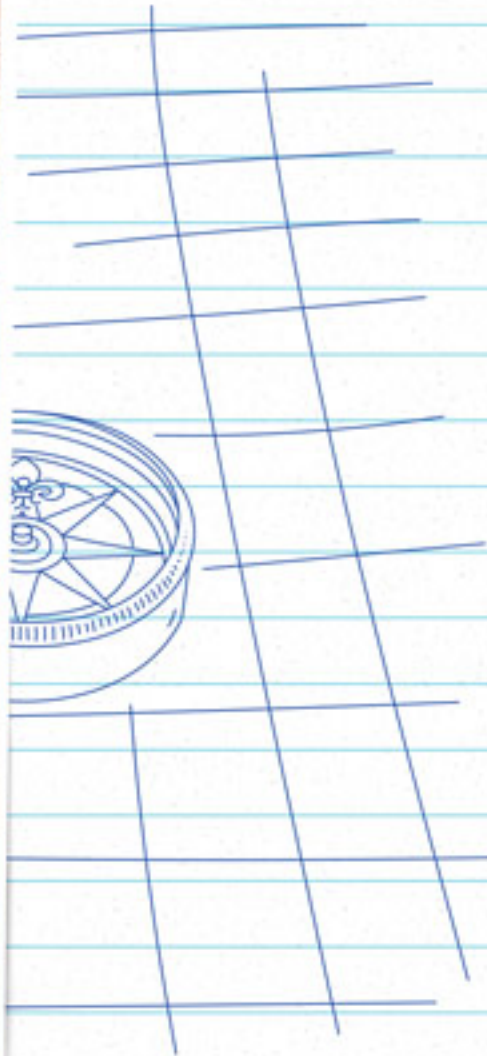
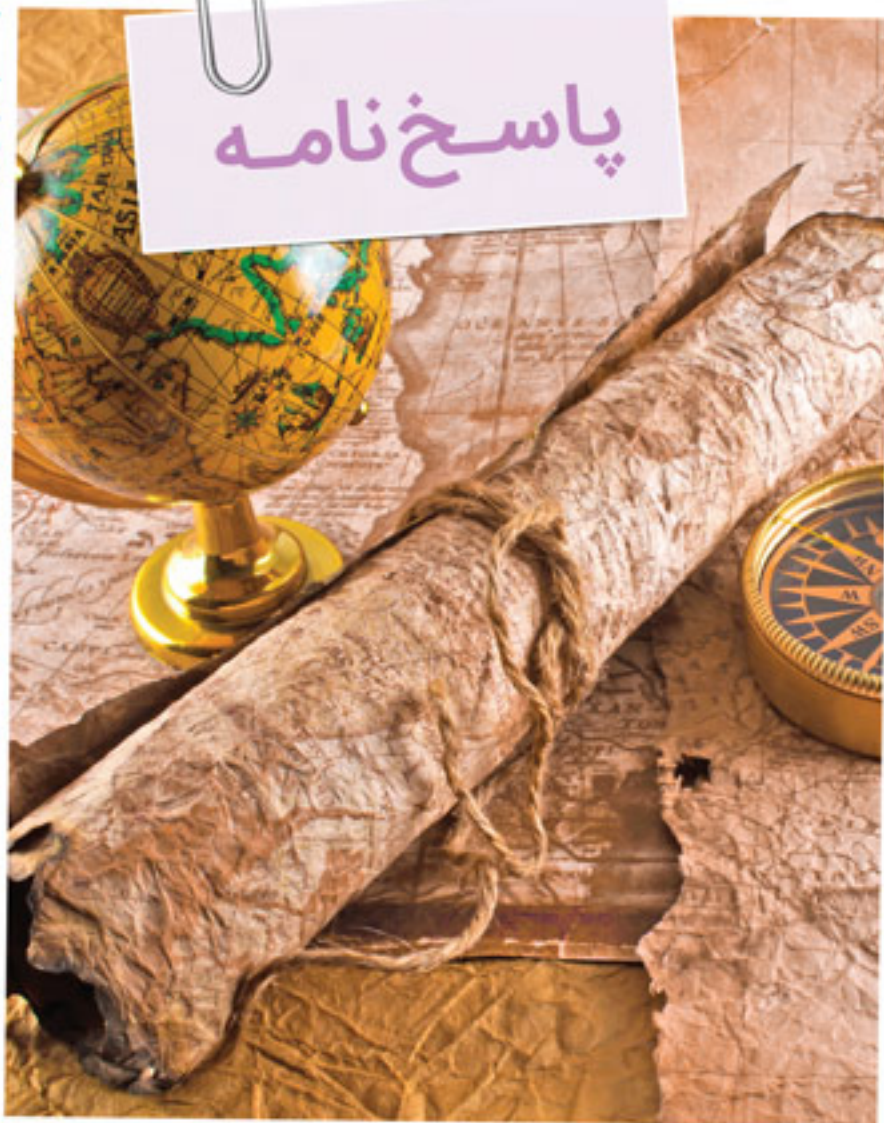
۵۷۰. اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(-1) = g'(-1) = \frac{1}{4}$ ، مشتق تابع $y = (f \circ g)(x)$ را به ازای $x = -1$ حساب کنید.

(خرداد ۱۴۰۳)

۵۷۱. اگر $f'(1) = 3$ ، $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$ ، مقدار مشتق $(f+g) \circ f$ در $x = 1$ را به دست آورید.



پاسخ نامه



۱۰. درست

نکته: اگر $A(x_0, y_0)$ یک نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، آن گاه:

۱. نقطه $A'(\frac{x_0 - c}{b}, y_0)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(bx + c)$ است؛ زیرا:

$$f(b(\frac{x_0 - c}{b}) + c) = f(x_0 - c + c) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow (\frac{x_0 - c}{b}, y_0) \in f(bx + c)$$

توجه: برای یافتن طول نقطه A' ، از معکوس تابع $y = bx + c$ استفاده کردیم.

۲. نقطه $A'(x_0, ay_0 + d)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = af(x) + d$ است. (یعنی a و d مستقیماً روی عرض نقطه تأثیرگذار است.)

۳. نقطه $A'(\frac{x_0 - c}{b}, ay_0 + d)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ است.

با توجه به نکته، داریم:

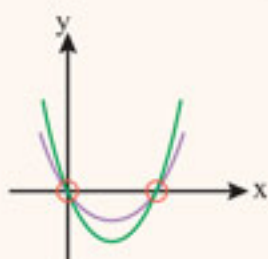
$$\begin{matrix} x_0 & y_0 \\ \uparrow & \uparrow \\ A(2, 3) & \xrightarrow[a=1, d=0]{a=-1, b=2} A'(\frac{2-1}{2}, \frac{-1}{2}(3)+0) \Rightarrow A'(\frac{1}{2}, -1) \end{matrix}$$

۱۱. درست زیرا:

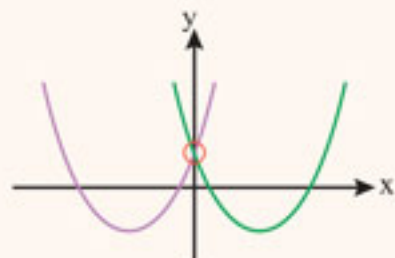
$$-2 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x \rightarrow -x} -6 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{+1} -5 \leq 2x + 1 \leq 4 \Rightarrow D_f = [-5, 4]$$

۱۲. درست به نکته زیر توجه کنید:

نکته: ۱. محل تلاقی نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ با محور x ها یکسان است.



۲. محل تلاقی نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ با محور y ها یکسان است.



۱۳. انقباض عمودی: اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض نمودار $y = f(x)$ در راستای محور y ها به دست می آید. (فشرده تر می شود.)

۱۴. انقباض افقی

۱۵. x ها (طول ها)

پاسخ فصل اول

۱. درست

۲. نادرست وقتی $k > 1$ ، آن گاه نمودار تابع $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید.

۳. نادرست برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{x}{p})$ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ باید طول همه نقاط روی نمودار تابع $y = f(x)$ دو برابر شود!

۴. درست

۵. نادرست نمودار تابع f در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده یا فشرده می شود؛ یعنی حدود برد تابع $y = kf(x)$ ، k برابر حدود برد تابع f است.

دقت کنید: اگر برد تابع $y = f(x)$ به صورت $[c, d]$ باشد، تنها زمانی که $k = 1$ باشد، برد توابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ با هم برابر است.

۶. نادرست حدود دامنه تابع $y = -kf(\frac{x}{p})$ به دلیل وجود ضریب $\frac{1}{p}$ پشت متغیر x ، دو برابر حدود دامنه $y = -kf(x)$ است.

ضریب k ، پشت f تأثیری روی دامنه ندارد.

۷. نادرست نمودار تابع f یک واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال می یابد.

۸. درست

نکته: در توابع به فرم $y = f(ax + b)$ اولویت انتقال ها و تبدیل ها به صورت مقابل است:

$$y = f(ax + b)$$

در هر دو حالت زیر، به تابع $y = f(3 - x)$ یا همان $y = f(-x + 3)$ می رسیم:

حالت اول: ابتدا نمودار تابع را ۳ واحد به سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x) \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x + 3)$$

حالت دوم: اگر نمودار تابع را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه کنیم، سپس باید آن را ۳ واحد به راست انتقال دهیم تا به $y = f(-x + 3)$ برسیم؛ زیرا:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x)$$

$$\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x + 3)$$

توجه: اگر ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم و سپس ۳ واحد به چپ ببریم، به تابع $y = f(-x - 3)$ می رسیم؛ زیرا:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x)$$

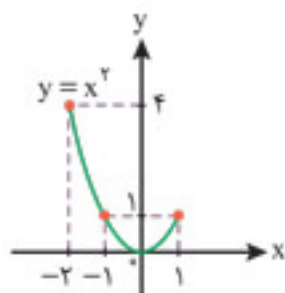
$$\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x - 3)$$

۹. نادرست نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه $(-8, 3)$ روی نمودار $y = \frac{1}{p}f(x)$ متناظر است. (باید عرض نقطه نصف شود نه ۲ برابر!)

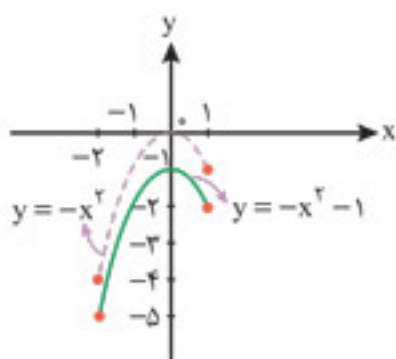




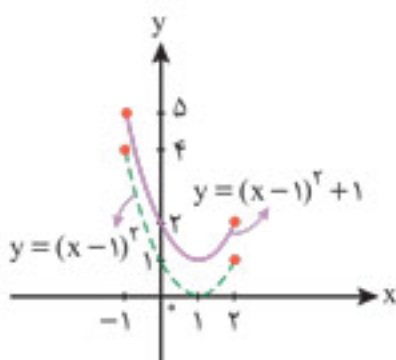
۲۲. نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $[-2, 1]$ به صورت زیر است:



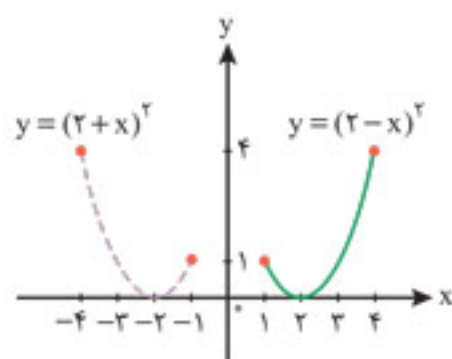
الف نمودار تابع $y = x^2$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:



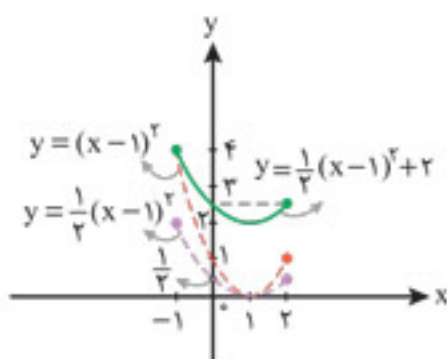
ب نمودار تابع $y = x^2$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



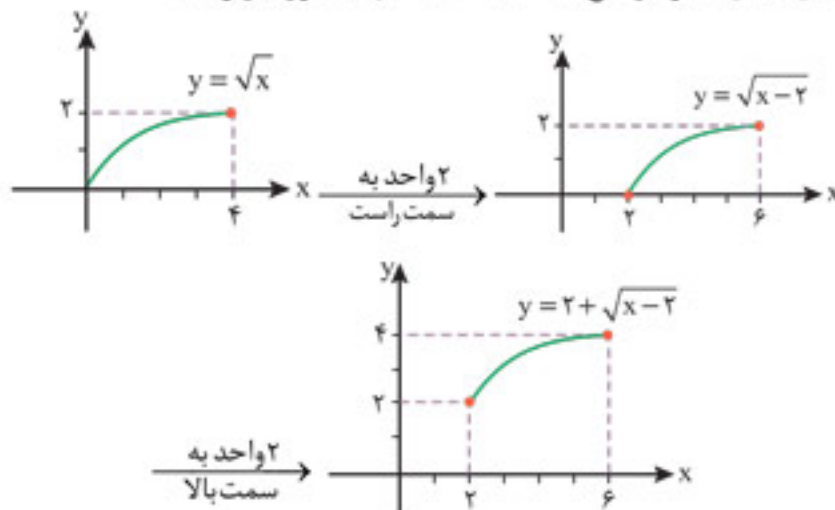
پ نمودار تابع $y = x^2$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



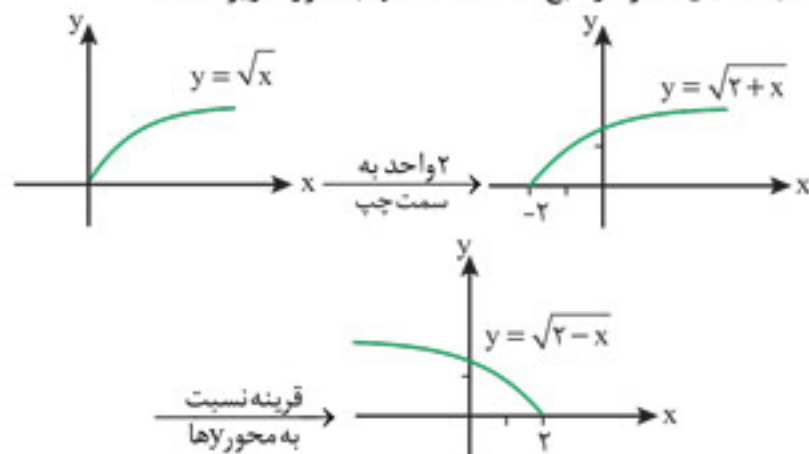
ت نمودار تابع $y = x^2$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و عرض همه نقاط را $\frac{1}{4}$ برابر می‌کنیم (انقباض عمودی)، سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



۱۶. $[2, 4]$: نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ به صورت زیر است:



۱۷. $[0, +\infty)$: نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ به صورت زیر است:



دقت کنید: اولویت بین انتقال افقی و قرینه کردن نسبت به محور y ها، با انتقال افقی است. یعنی ابتدا باید نمودار را ۲ واحد به چپ ببریم، سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم. اگر اولویت رعایت نشود به پاسخ نادرست می‌رسیم!

۱۸. دامنه تابع $y = -f(2x) + 1$ با توجه به ضریب ۲ پشت x ، نصف دامنه تابع $y = f(x)$ است، یعنی باید همه نقاط دامنه نصف شوند؛ پس:

$$D_f = [-2, 1] \xrightarrow{\div 2} D_y = [-1, \frac{1}{2}]$$

۱۹. $[-1, 0]$: بین انتقال افقی و انقباض افقی اولویت با انتقال افقی است؛ پس داریم:

$$D_f = [-2, 1] \xrightarrow{-1} D_f = [-3, 0] \xrightarrow{\div 3} D_f = [-1, 0]$$

نکته: برای به دست آوردن دامنه تابع $f(3x+1)$ از روی دامنه تابع $f(x)$ که برابر $[-2, 1]$ است، می‌توانیم نامعادله $-2 \leq 3x+1 \leq 1$ را حل کنیم. این راه راحت‌تری برای به دست آوردن دامنه $f(3x+1)$ است.

$$\begin{aligned} -2 \leq 3x+1 \leq 1 &\xrightarrow{-1} -3 \leq 3x \leq 0 \xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq 0 \\ \Rightarrow D_{f(3x+1)} &= [-1, 0] \end{aligned}$$

۲۰. $[-3, 7]$: دامنه تابع $y = f(2x+1)$ داده شده است و دامنه $y = f(x)$ را می‌خواهیم. برای به دست آوردن دامنه تابع f باید اولویت‌ها را برعکس انجام دهیم! پس دامنه تابع f برابر $[-3, 7]$ بوده است!

۲۱. $(5, 0)$: باید اولویت‌ها را برعکس برویم!

$$\begin{aligned} x=2 &\xrightarrow{\text{ضریب ۲}} x=4 \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت راست}} x=5 \xrightarrow{\text{نقطه}} (5, 0) \\ y=-1 &\xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y=0 \xrightarrow{\text{قرینه}} y=0 \end{aligned}$$

حسابان ۲

کاربرد امتحان

از خود امتحان بگیر!

مجموعه کتاب‌های
پیریتیک



۱۱ امتحان شامل:

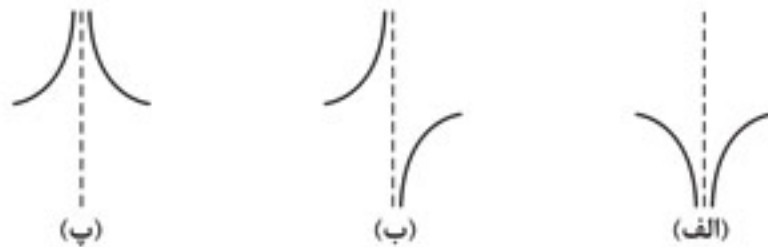
۵ امتحان فصل به فصل در سطح سوالات نهایی

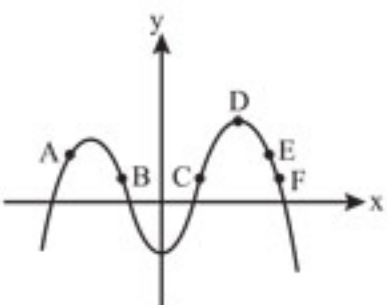
۴ امتحان شبیه‌ساز نهایی نوبت اول و دوم

۲ امتحان نهایی اخیر

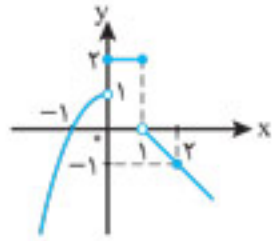
+ پاسخ‌نامه تشریحی به همراه ریزبارم و نکات آموزشی و مشاوره‌ای

امتحان ۹: نوبت دوم		سؤالات شبیه‌ساز نهایی		مهر و ماه	
رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:		
سؤالات امتحانی درس: حسابان ۲	نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲		

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) در فاصله $(0, 1)$ ، نمودار تابع $f(x) = x^2$ از نمودار تابع $g(x) = x^2$ پایین‌تر قرار دارد. ب) نمودار تابع $y = f(-x)$ ، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x هاست. پ) تابع $f(x) = x - 1 $ در بازه $(-1, 0)$ اکیداً صعودی است. ت) اگر $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}} 2x$ باشد، آن‌گاه $x+1 < 2x$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = \frac{1}{3} \sin(\frac{\pi x}{3})$ برابر با است. ب) مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{2x + \frac{1}{4}}$ برابر با است. پ) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3x^2}{x(x-1)}$ برابر با است. ت) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ برابر با است.	۱
۳	نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = 2f(x+2)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.	۱/۵
۴	چند جمله‌ای $x^5 - 1$ را با عامل $x - 1$ تجزیه کنید.	۰/۵
۵	نمودار تابع $y = -2 \sin(\frac{x}{4}) + 1$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.	۰/۷۵
۶	معادله مثلثاتی $\sin x + \cos x = 1$ را حل کنید.	۱
۷	کدام شکل، وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 1}$ را در همسایگی $x = -1$ نشان می‌دهد؟ (با دلیل بیان کنید).	۰/۷۵
	 (الف) (ب) (پ)	
۸	حدهای زیر را محاسبه کنید.	۱
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 + (x-1)}{(x-1)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + 4x - \frac{1}{4})$	

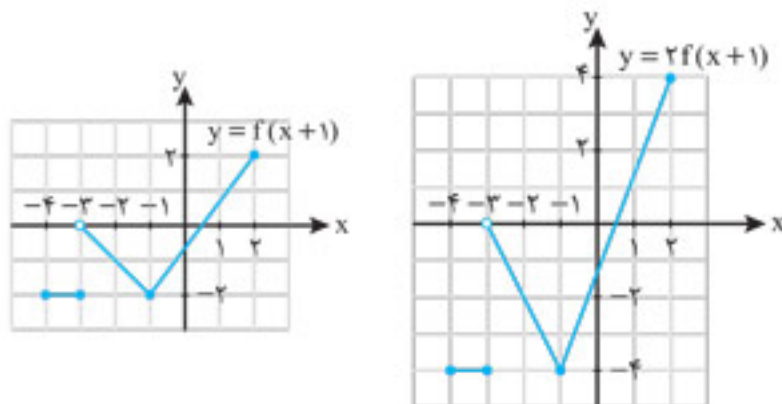
امتحان ۹: نوبت دوم		سؤالات شبیه‌ساز نهایی		مهر و ماه		
رشته: ریاضی و فیزیک		پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		
سؤالات امتحانی درس: حسابان ۲		نام و نام خانوادگی:		تاریخ امتحان:		
				تعداد صفحه: ۲		
ردیف		سؤالات				نمره
۹	با توجه به نمودار داده شده به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) کدام نقطه، خط مماس افقی دارد؟ ب) شیب خط مماس بر منحنی در کدام نقاط منفی است؟ پ) شیب خط مماس در کدام نقطه بیشترین است؟					۱/۲۵
						
۱۰	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ را در نقطه $x = 3$ به دست آورید؛ سپس معادله خط مماس بر منحنی در این نقطه را بنویسید.					۱
۱۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x) = (4x^5 + x^7 + \sqrt{x})^3$ ب) $g(x) = (\frac{1}{x})(2x^7 + 3x)$ پ) $h(x) = 2 \sin^2(x^2 - 1)$					۲/۲۵
۱۲	اگر $f(x) = x^2 + 2x$ باشد، آنگاه مشتق تابع $y = f(\sin x)$ را به دست آورید.					۱
۱۳	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^2 + 2x$ در بازه $[2, 4]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در لحظه $x = 3$ را محاسبه کنید.					۱
۱۴	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ را به دست آورید.					۲
۱۵	ابتدا جهت تقعر تابع $y = \frac{x+2}{x-2}$ را مشخص کرده و سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید.					۲
۱۶	نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 2$ را رسم کنید.					۲
جمع نمره						۲۰
صفحه ۲ از ۲						

۴. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x < 0 \\ 2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 1 & ; x > 1 \end{cases}$ را در بازه های مشخص شده رسم می کنیم. (رسم هر مورد ۰/۲۵)



در بازه $[-\infty, 0]$ اکیدا صعودی (۰/۲۵)، در بازه $[0, 1]$ هم صعودی و هم نزولی (۰/۲۵) و در بازه $[1, +\infty)$ اکیدا نزولی است. (۰/۲۵)

۵. به کمک انتقال داریم:



(انتقال هر بخش از نمودار ۰/۵ نمره)

۶. حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{(x^6 - 64)(x+1)}{(x-2)(x^5+1)} = \frac{(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)(x+1)}{(x-2)(x+1)(x^5-x^2+x^2-x+1)} = \frac{x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32}{x^5-x^2+x^2-x+1}$$

$$y = -\sqrt{2} + 2\sin \pi x \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \pi \\ c = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad (\text{دوره تناوب})$$

$$\max = |a| + c = |2| - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{۰/۲۵})$$

$$\min = -|a| + c = -|2| - \sqrt{2} = -2 - \sqrt{2} \quad (\text{۰/۲۵})$$

۸. طبق شکل، دوره تناوب برابر $T = \frac{\pi}{\pi}$ ، مقدار ماکزیمم ۲ و مقدار مینیمم -۴ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \quad (\text{۰/۲۵})$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c \Rightarrow |a| + c = 2 \\ \min = -|a| + c \Rightarrow -|a| + c = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \quad (\text{۰/۲۵})$$

$$|a| + c = 2 \xrightarrow{c=-1} |a| - 1 = 2 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \quad (\text{۰/۲۵})$$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{\infty - 1}{\infty - \infty} = \frac{-1}{\infty} = -\infty$$

(۰/۲۵) خط $x = 0$ مجانب قائم است.

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad (\text{۰/۲۵})$$

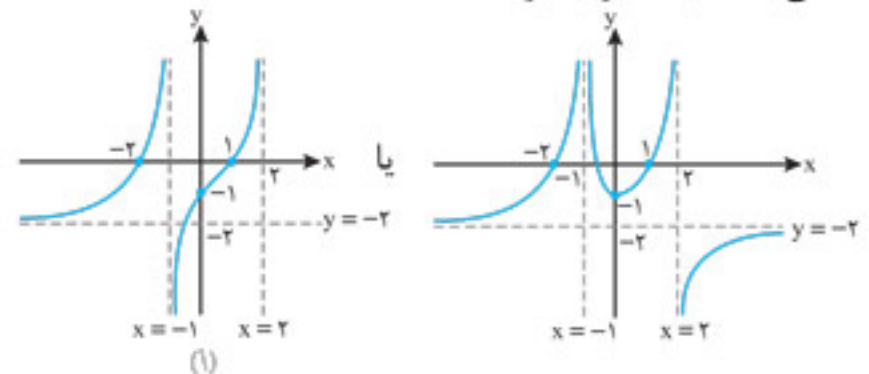
$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2 \quad (\text{۰/۵})$$

پس خط $x = 1$ مجانب قائم نیست.

$$\text{مجانب افقی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(۰/۵) خط $y = 1$ مجانب افقی است.

۱۴. با توجه به اطلاعات صورت سؤال، نمودار تابع f می تواند حالت های مختلفی داشته باشد، برای نمونه:



پاسخ امتحان شماره ۷ - نوبت اول

۱. الف) نادرست (۰/۲۵)؛ اگر n زوج باشد، آن گاه برقرار است. / ب) نادرست

(۰/۲۵)؛ زیرا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ و در نتیجه دوره تناوب برابر π است. /

ب) درست (۰/۲۵)؛ زیرا مقدار تابع تناوب در $x = -\frac{\pi}{4}$ تعریف نمی شود. /

ت) درست (۰/۲۵)؛ زیرا اگر $a = 0$ باشد، تابع ثابت و در نتیجه هم صعودی و هم نزولی است.

۲. الف) $[-7, 5]$ (۰/۲۵)؛ زیرا: $-2 \leq f(x) \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 3f(x) \leq 6$

$$\xrightarrow{+(-1)} -7 \leq 3f(x) - 1 \leq 5 \Rightarrow -7 \leq 3f(x+2) - 1 \leq 5$$

ب) صعودی (۰/۲۵)

ب) $p(-\frac{1}{4})$ (۰/۲۵)؛ ابتدا ریشه $2x+1=0$ یعنی $x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

در نتیجه باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x+1$ برابر $p(-\frac{1}{2})$ است.

$$\text{ت) } x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (\text{۰/۲۵}) \quad \text{زیرا:}$$

$$D_f = \{x \mid 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\}$$

ث) ۵ (۰/۲۵)؛ زیرا:

$$x(x^2+1) + 3x^2(x-1)^2 = x^2 + x + 3x^2(x^2-2x+1)$$

$$= x^2 + x + 3x^5 - 6x^4 + 3x^3$$

در نتیجه درجه چند جمله ای برابر ۵ است.

۳. باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-3$ برابر $Q(3)$ است (۰/۲۵)؛ پس در رابطه

$$(x-4)(x+1) = (x-2)Q(x) + 8 \quad (\text{۰/۲۵})$$

$$x=3 \Rightarrow (3-4)(3+1) = (3-2)Q(3) + 8 \quad (\text{۰/۵})$$

$$\Rightarrow -4 = Q(3) + 8 \Rightarrow Q(3) = -12 \quad (\text{۰/۲۵})$$

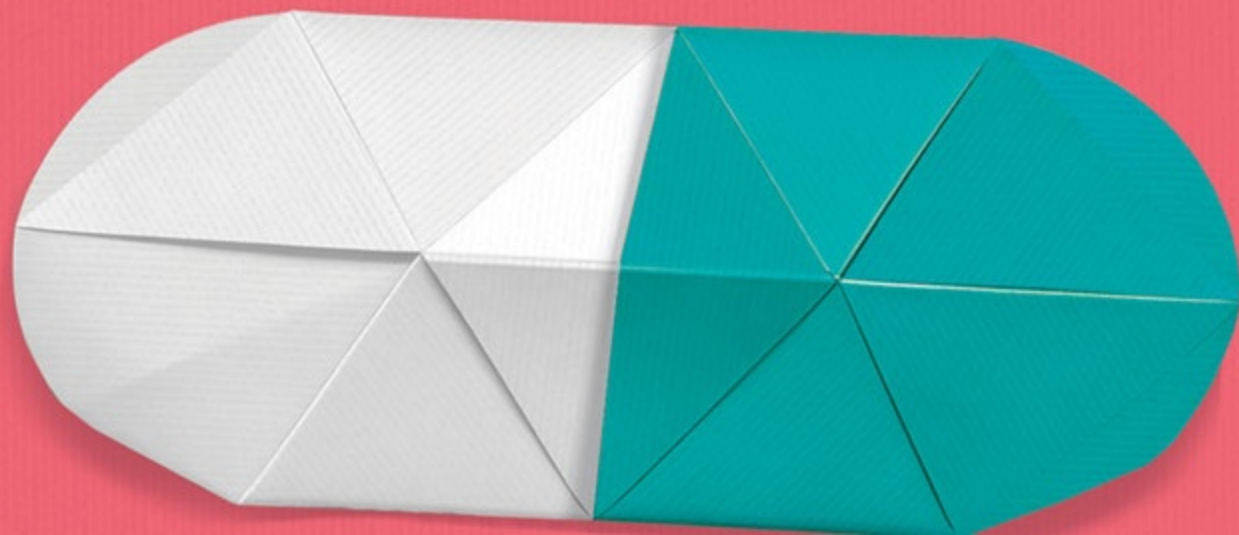


خلاصه کیسولی

حسابان ۲

مرور نکات مهم کتاب درسی به همراه
حل نمونه سؤالات بسیار پرتکرار در
امتحانات نهایی

تطبیق حداکثری با
سؤالات نهایی ۱۴۰۴
ویژه
امتحانات نهایی
۱۴۰۵



فصل اول: تابع

رسم نمودار توابع به کمک انتقال، تبدیل و قرینه‌یابی

برای رسم نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ داریم:

۱ اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ ، c واحد به چپ و اگر $c < 0$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ ،

$|c|$ واحد به سمت راست می‌رود. (پارامتر c انتقال افقی می‌دهد).

۲ اگر $d > 0$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ ، d واحد به سمت بالا و اگر $d < 0$ باشد، نمودار

تابع $y = f(x)$ ، $|d|$ واحد به سمت پایین می‌رود. (پارامتر d انتقال عمودی می‌دهد).

۳ برای رسم نمودار تابع $y = f(bx)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، طول همه نقاط نمودار

تابع $y = f(x)$ ، $\frac{1}{b}$ برابر می‌شود و عرض نقاط تغییری نمی‌کند.

اگر $0 < b < 1$ ، آن‌گاه نمودار، انبساط افقی دارد؛ یعنی نمودار در راستای افقی کشیده‌تر می‌شود.

اگر $b > 1$ ، آن‌گاه نمودار، انقباض افقی دارد؛ یعنی نمودار در راستای افقی فشرده‌تر می‌شود.

۴ برای رسم نمودار تابع $y = af(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، عرض همه نقاط نمودار

تابع $y = f(x)$ ، a برابر می‌شود و طول نقاط تغییری نمی‌کند.

اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه نمودار، انقباض عمودی دارد؛ یعنی نمودار در راستای عمودی فشرده‌تر می‌شود.

اگر $a > 1$ ، آن‌گاه نمودار، انبساط عمودی دارد؛ یعنی نمودار در راستای عمودی کشیده‌تر می‌شود.

۵ اگر $a < 0$ باشد، نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x هاقرینه می‌شود و اگر $b < 0$ ، نمودار $y = f(x)$

نسبت به محور y هاقرینه می‌شود.

۶ ترتیب انتقال‌ها و تبدیل‌ها به صورت مقابل است:

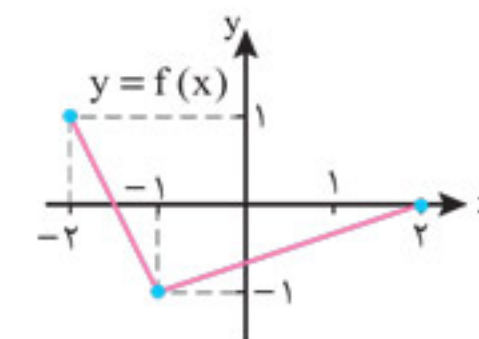
$$y = a f(bx + c) + d$$

۴ ۱ ۲ ۳

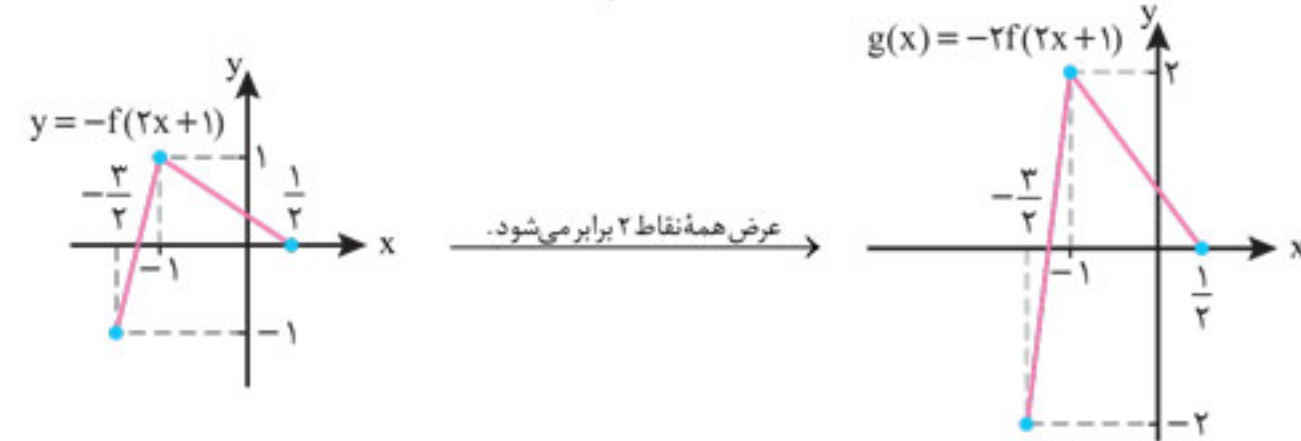
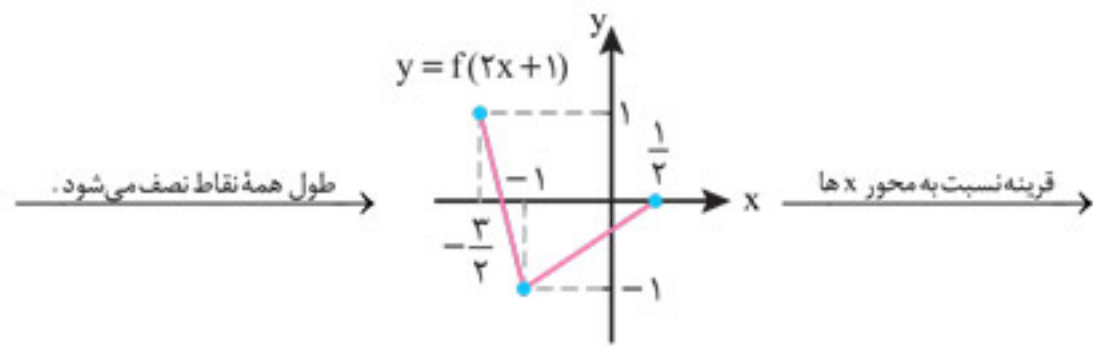
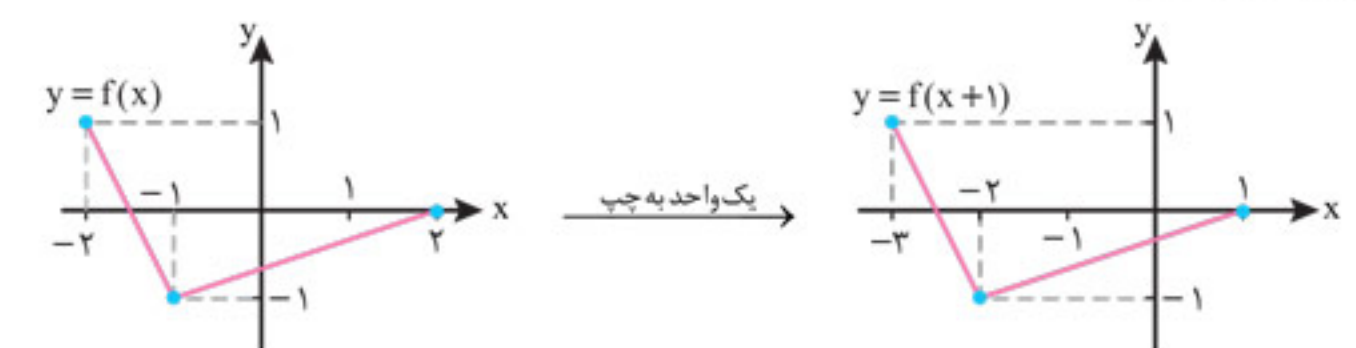
مثال نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -2f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه

و برد تابع g را تعیین کنید. (مشابه خرداد ۱۴۰۳، مشابه دی ۱۴۰۲، مشابه خرداد ۱۴۰۱ - خارج، مشابه دی ۱۴۰۰،

مشابه شهریور ۱۴۰۰، مشابه خرداد ۱۴۰۰ - خارج، مشابه دی ۹۹، مشابه خرداد ۹۸)



پاسخ برای رسم نمودار تابع $g(x) = -2f(2x + 1)$ از روی نمودار $y = f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

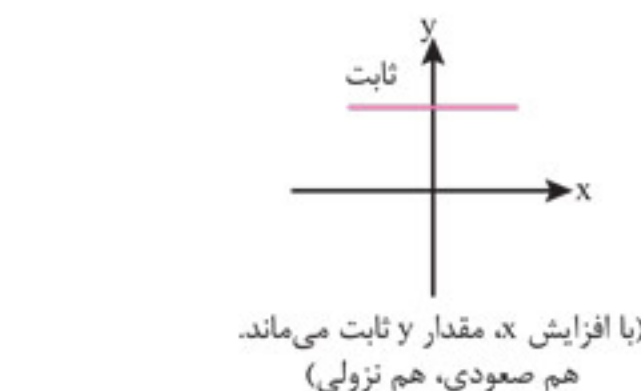
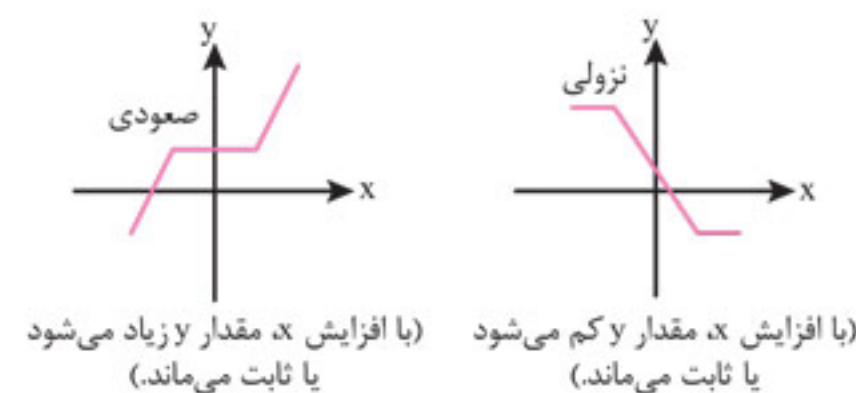
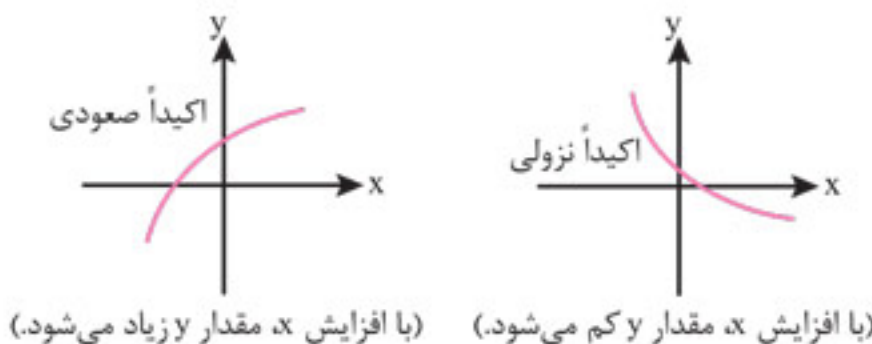


با توجه به نمودار حاصل شده، دامنه و برد تابع g برابر است با:

$$D_g = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right], R_g = [-2, 2]$$

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

بهترین راه برای تشخیص صعودی یا نزولی یا ثابت بودن توابع، رسم نمودار آن‌هاست.



نکته تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

تقسیم و بخش پذیری

باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر است با $r = f(-\frac{b}{a})$. اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ شود، می‌گوییم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ بخش پذیر است.