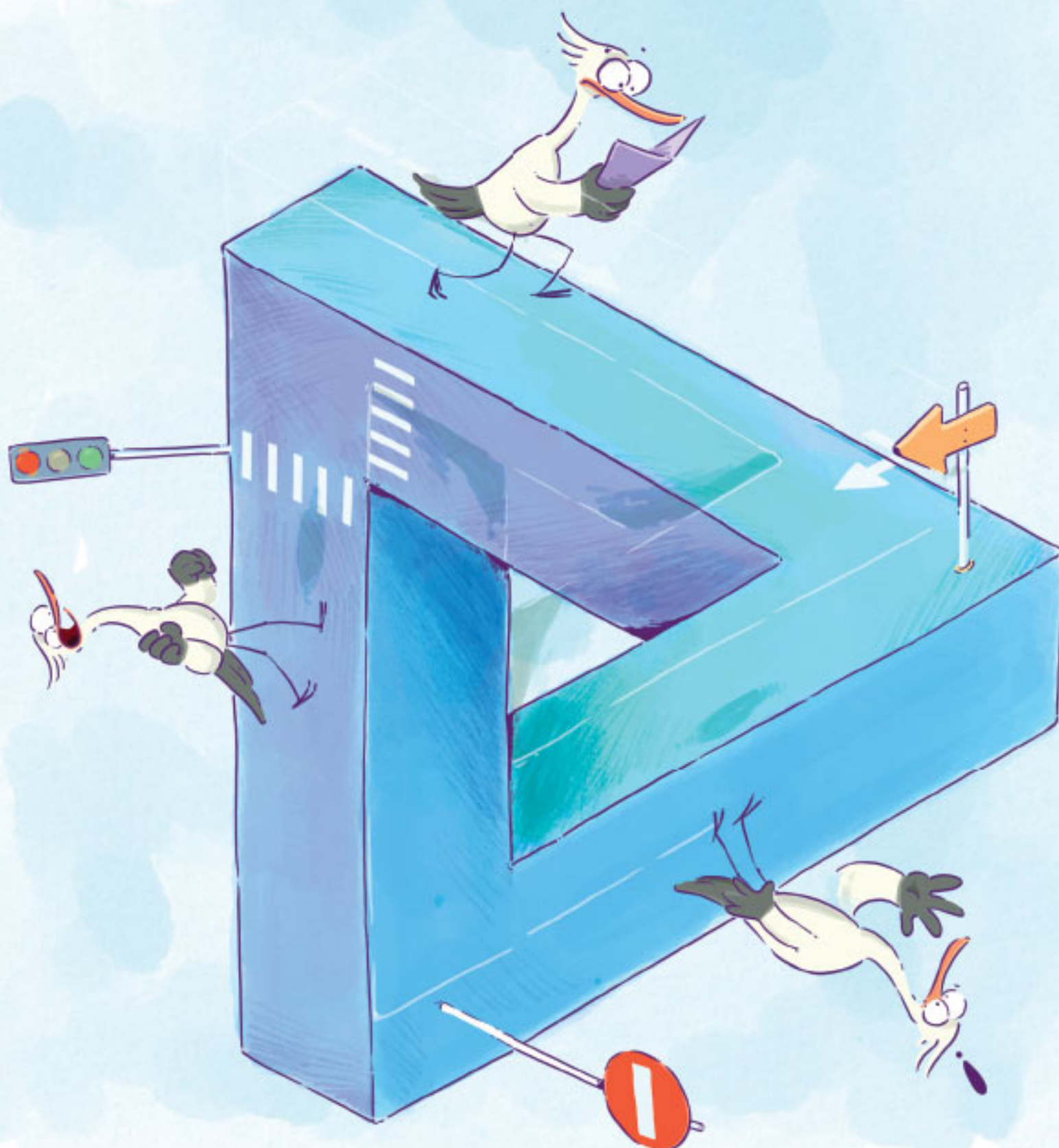


فصل ۱

هندسه تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیه مباحث ریاضی. این فصل با هندسه تحلیلی شروع می‌شه. کلی مطالب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو توی این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد نمودار تابع و معادله درجه دوم می‌شه؛ همون سهمی پارسال! ولی این دفعه هم سؤال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تره! آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسه. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونی، دست از سرت برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.



یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادله خط، شیب، عرض از مبدأ، تابع خطی و... آشنا شدید. در این درس به طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

شیب: تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارت‌اند از:

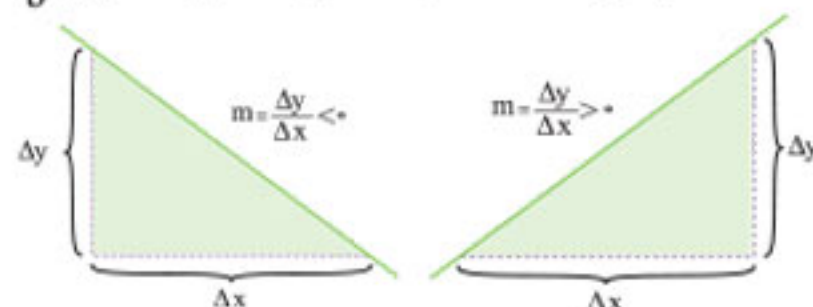
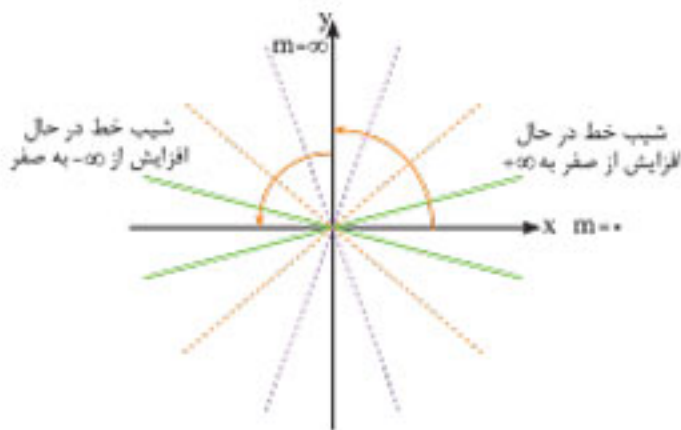
الف) میزان تغییرات y به تغییرات x را شیب خط می‌نامیم. در واقع اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایز باشند ($x_1 \neq x_2$)، به

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

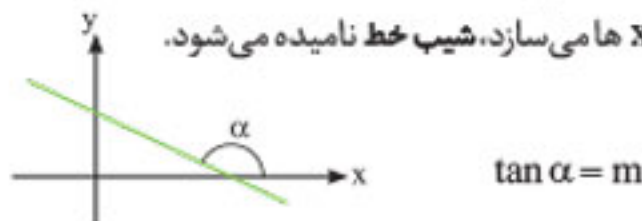
شیب خط گذرا از دو نقطه A و B می‌گوییم.

ب) اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، شیب خط برابر a است.

پ) اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، شیب خط برابر $-\frac{a}{b}$ است.



ت) تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، شیب خط نامیده می‌شود.



ث) شیب خط $x = a$ تعریف نشده و شیب خط $y = b$ صفر است.

معادله خط

برای به دست آوردن معادله خط، دو روش داریم:

۱) با داشتن شیب و یک نقطه: معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد، عبارت است از:

۲) با داشتن دو نقطه: هرگاه دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم ($x_1 \neq x_2$)، می‌توانیم به کمک رابطه $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب خط گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$ ضابطه خط را بیابیم.

نکته: ۱) می‌توان معادله خط را به صورت $y = ax + b$ فرض نمود و با جای‌گذاری مختصات دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و تشکیل دستگاه، مقادیر a و b را به دست آورد. به این ترتیب ضابطه $y = ax + b$ به دست می‌آید. در این رابطه a شیب خط و b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها (یعنی عرض از مبدأ) است.

۲) معادله خطی که از دو نقطه (a, y_1) و (a, y_2) می‌گذرد، برابر است با $x = a$ ($y_1 \neq y_2$).

۳) معادله خطی که از دو نقطه (x_1, b) و (x_2, b) می‌گذرد، برابر است با $y = b$ ($x_1 \neq x_2$).

مثال: خط گذرنده از دو نقطه $(1, 3)$ و $(2, 7)$ محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$-\frac{1}{4} (1) \quad \frac{1}{5} (2) \quad -\frac{1}{5} (3) \quad -\frac{1}{4} (4)$$

پاسخ: گزینه «۳»

فرض می‌کنیم معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، نقاط داده شده را در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (1, 3) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 3 &= a(1) + b \\ (2, 7) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 7 &= a(2) + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

یعنی معادله خط $y = 4x - 1$ است.

$$0 = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

این خط در نقطه‌ای، محور طول‌ها را قطع می‌کند که $y = 0$ شود؛ بنابراین:

شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

★ **مهم:** دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی m و m' باشند، باید $m = m'$ باشد و برعکس.

دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط، m و m' باشد، آن‌گاه شرط عمود بودن آن‌ها آن است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

💡 **نکته:** رابطه $mm' = -1$ برای دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برقرار است.

☕ **مثال:** خط $3x + 5y = 1$ بر خط $y = ax - 2$ عمود است. مقدار a کدام است؟

پاسخ گزینه «۱» معادله خط $3x + 5y = 1$ را استاندارد می‌کنیم:

$$5y = -3x + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

شیب خط بالا $-\frac{3}{5}$ است و شیب خط $y = ax - 2$ نیز برابر a است. از آن جایی که دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌ها برابر -1 است.

$$a \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -1 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

☛ اگر معادله ضلع AB در مستطیل شکل روبه‌رو به صورت $3x - 4y = -6$ باشد، عرض از مبدأ خط BC کدام است؟

پاسخ گزینه «۴» ضلع BC بر ضلع AB عمود است، پس شیب BC عکس و قرینه شیب AB است.

حال شیب BC را می‌یابیم:

به کمک مختصات نقطه $B(2, 3)$ و شیب $m = -\frac{4}{3}$ ، معادله خط BC را می‌نویسیم:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$$

عرض از مبدأ این خط $\frac{17}{3}$ است.

$AB: 3x - 4y = -6 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{4}$

$m_{BC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{BC} \times \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{4}{3}$

عرض از مبدأ این خط $\frac{17}{3}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- معادله خط گذرا از دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(0, -2)$ کدام است؟
 $2x - 3y + 6 = 0$ (۱) $2x + 3y - 6 = 0$ (۲) $2x - 3y - 6 = 0$ (۳) $2x + 3y + 6 = 0$ (۴)
- به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m, 2)$ ، $(6, 4m + 1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟
 $2, -\frac{9}{4}$ (۱) $-2, -\frac{3}{4}$ (۲) $-2, \frac{3}{4}$ (۳) $2, -\frac{9}{4}$ (۴)
- معادله خطی که از نقطه محل برخورد دو خط $y = 2x$ و $y = \frac{x}{2}$ می‌گذرد و بر خط $y = -x + 4$ عمود است، کدام است؟
 $y = x$ (۱) $y = -x$ (۲) $y = x + 1$ (۳) $y = -x + 1$ (۴)
- یکی از خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 3)$ عمود است. معادله این خط کدام است؟
 $2y + 3x = 4$ (۱) $2y + 3x = 1$ (۲) $2y - 3x = -5$ (۳) $3y - 2x = -5$ (۴)
- در مثلثی با رئوس $A(-1, -4)$ ، $B(-5, 6)$ و $C(3, 2)$ معادله ارتفاع AH کدام است؟
 $y = 2x - 2$ (۱) $2y + x + 9 = 0$ (۲) $y = 4x$ (۳) $y = -2x - 6$ (۴)
- نقاط $A(2, 5)$ ، $B(3, -1)$ و $C(0, 2)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟
 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (۴)

فاصله دو نقطه

فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

فاصله هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ برابر است با: $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ **مهم:** ★

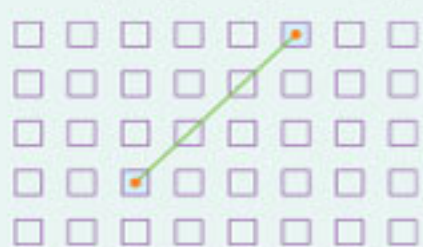
- ۱- اگر A و B دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آن گاه $AB = |x_A - x_B|$.
- ۲- اگر C و D دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آن گاه $CD = |y_C - y_D|$.

مثال: ☕ فاصله دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(-4, 6)$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» طبق فرمول، فاصله دو نقطه را می یابیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



در یک کلاس، پنج ردیف ۸ نفره نیمکت مطابق شکل چیده شده است. اگر ابعاد طول و عرض هر نیمکت را ۵۰ سانتی متر در نظر بگیریم، فاصله مرکز نیمکت ردیف ۲، شماره ۳ با مرکز نیمکت ردیف ۵، شماره ۶ کدام است؟ (فضای خالی بین دو نیمکت نیز به اندازه یک نیمکت است.)

- ۱) $50\sqrt{18}$ (۲) $25\sqrt{18}$ (۳) $25\sqrt{85}$ (۴) $50\sqrt{72}$

پاسخ: گزینه «۴» می خواهیم فاصله نقطه $(5, 3)$ را از نقطه $(11, 9)$ بیابیم:

$$d = \sqrt{(11 - 5)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

چون ابعاد هر نیمکت ۵۰ cm است، فاصله واقعی $50 \times \sqrt{72}$ است.



نقطه وسط پاره خط

مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.

مثال: ☕ اگر سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 4)$ و $C(2, 5)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه CM کدام است؟

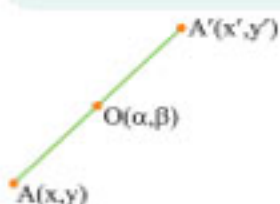
- ۳ (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{12}$ (۴)

$$M(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+4}{2}) = M(1, 2)$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را می یابیم:

$$CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{10}$$

حال طول پاره خط CM را می یابیم:



$$\begin{aligned} x' &= 2\alpha - x \\ y' &= 2\beta - y \end{aligned}$$

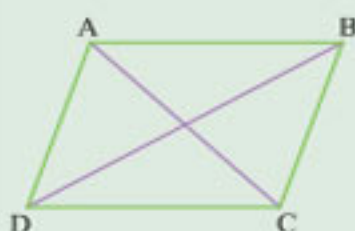
مختصات نقطه قرینه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $O(\alpha, \beta)$:

نکته: ☀ قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $A'(-x, -y)$.

یک گام فراتر: رابطه بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع $ABCD$ ، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \quad \text{مهم:} \quad \star$$



فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{مهم: } \star$$

حواست باشه: قبل از استفاده از این فرمول، اولاً باید همه بخش‌های معادله به سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب x و y باید در دو معادله برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

مثال: فاصله دو خط موازی $3x + 4y - 1 = 0$ و $3x + 4y + 2 = 0$ کدام است؟

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از فرمول فاصله دو خط موازی به حل مثال می‌پردازیم:

دایره‌ای بر دو خط $y - 2x + 1 = 0$ و $2y - 4x = -7$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

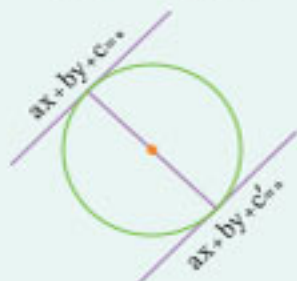
$$\frac{\sqrt{5}}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا در ضابطه $2y - 4x = -7$ عدد -7 را به سمت چپ منتقل می‌کنیم، سپس طرفین را بر ۲ تقسیم کرده تا ضرایب x و y در دو معادله یکسان شوند.



$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - 2x + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{7}{2} - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

یک گام فراتر: معادله خط وسط دو خط موازی

مجموعه نقاطی از صفحه که از دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ فاصله‌ای برابر دارند، بر روی خطی موازی به معادله $ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$ قرار دارند.

مثال: اگر معادله جدول‌های کنار خیابانی مستقیم $2x + 3y - 1 = 0$ و $4x + 6y + 5 = 0$ باشند، معادله خط چین وسط خیابان کدام است؟



$$2x + 3y - \frac{3}{4} = 0 \quad (2)$$

$$2x - 3y + \frac{1}{4} = 0 \quad (4)$$

$$2x - 3y - \frac{1}{4} = 0 \quad (1)$$

$$2x + 3y + \frac{3}{4} = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲»

خط چین وسط خیابان دقیقاً خطی موازی و وسط امتداد دو جدول طرفین خیابان است، پس می‌توان پس از یکسان کردن ضرایب x و y معادلات جدول‌ها، معادله خط چین را پیدا کرد:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 4x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{+2} \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله خط چین}} 2x + 3y + \frac{-1 + \frac{5}{2}}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 3y + \frac{3}{4} = 0$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۵. فاصله نقطه $A(x, 2)$ از خط $3x + 4y - 1 = 0$ برابر ۲ است. مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

$$-\frac{14}{3} \quad (4)$$

$$\frac{14}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (1)$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۶. اگر فاصله نقطه $M(1, 2)$ از خط $3x + my - 1 = 0$ برابر ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

$$-1 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

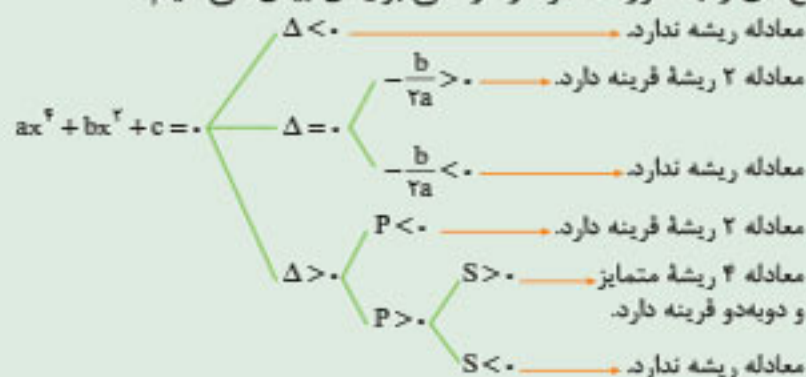
$$4 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$



یک گام فراتر: بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$)

برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:



مثال: معادله $x^4 - 4x^2 + 2 - a = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. حدود a کدام است؟

(۱) $a > -2$ (۲) $-8 < a < -2$ (۳) $a < 2$ (۴) $-2 < a < 2$

پاسخ گزینه ۴ مطابق آنچه که در بالا بحث شد، زمانی معادله چهار ریشه دارد که:

۱ $\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(2-a) > 0 \Rightarrow 16 - 8 + 4a > 0 \Rightarrow 8 + 4a > 0 \Rightarrow a > -2$

۲ $P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2-a}{1} = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$

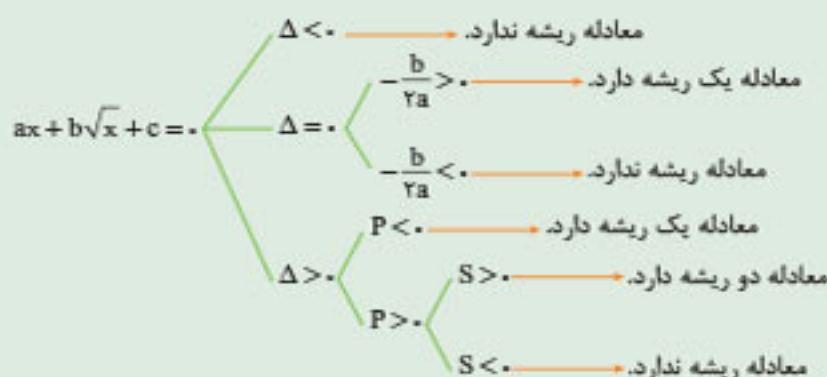
۳ $S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0$ بدیهی

اشتراک مجموعه جواب‌های بالا به صورت $-2 < a < 2$ است.



یک گام فراتر: بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$)

به نمودار درختی زیر توجه کنید:



در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ لزوماً مثبت می‌شود.



مثال: به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (معادله، ریشه مضاعف ندارد.)

(۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ (۴) $2 < m < \frac{5}{2}$

پاسخ گزینه ۲ طبق نمودار ارائه‌شده، باید $\Delta > 0$ و $P < 0$ باشد. به دلیل منفی بودن P نیازی به بررسی Δ نیست و فقط کافی است $P < 0$ باشد.

$P = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow$

x	۰	۲
$m-2$	-	+
m	-	+
P	+	-

تعریف نشده

$\Rightarrow 0 < m < 2$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

۴۱. معادله $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ دارای چند ریشه است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

۴۲. معادله $(2x^2 - 1)^2 = 7 + 6(2x^2 - 1)$ دارای چند ریشه متمایز است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

مثال: مجموعه جواب‌های معادله $\frac{(x+2)(x^2-x-2)}{x-2} = \frac{3x^2+13x+10}{x+5}$ کدام است؟

$$\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{x-2} = \frac{(3x+10)(x+1)}{x+5} \Rightarrow x+2 = \frac{3x+10}{x+5}$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 10 = 3x + 10 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ق ق} \\ x=-4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

از طرفی ریشه عبارتی که از صورت‌های دو کسر حذف شده است، باید به مجموعه جواب اضافه شود. پس داریم: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ بنابراین مجموعه جواب‌ها برابر با $\{-5\}$ است.

مستطیل طلایی

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد، به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند، داشته باشیم $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ ، نسبت طول به عرض این مستطیل نسبت طلایی و عدد طلایی برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

مثال‌های خاص معادلات گویا

الف) معادلات پارامتری

در برخی معادلات گویا، پارامتری مانند a وجود دارد. در این گونه سوالات، یک ریشه از معادله داده می‌شود و ریشه دیگر خواسته می‌شود. با جای‌گذاری ریشه در معادله، مقدار پارامتر a می‌یابیم و معادله به حالت عادی (بدون پارامتر) برمی‌گردد، پس با حل معادله سایر ریشه‌های معادله را می‌یابیم.

مثال: اگر $x=4$ یک جواب معادله $\frac{x-a}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{a-1}{2x-4}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

(۴) جواب دیگری ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» $x=4$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{4-a}{16-4-6} - \frac{1}{16-4} = \frac{a-1}{8-4} \Rightarrow \frac{4-a}{10} - \frac{1}{12} = \frac{a-1}{4} \xrightarrow{\times 12} 12-2a-1 = 3a-3 \Rightarrow a=2$$

مقدار a را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{2x-4} \Rightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2(x-2)}$$

طرفین را در $2(x+2)(x-2)(x-3)$ ضرب می‌کنیم:

$$2(x-2)^2 - 2(x-3) = (x+2)(x-3) \Rightarrow 2(x^2-4x+4) - 2x+6 = x^2-x-6$$

$$2x^2-8x+8-2x+6 = x^2-x-6 \Rightarrow x^2-9x+20=0 \Rightarrow (x-4)(x-5)=0$$

ریشه‌های معادله $x=4$ و $x=5$ می‌باشند. این ریشه‌ها، مخرج‌های معادله را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر دو جواب قابل قبول‌اند.

ب) معادلات مرتبط با مجموع و حاصل ضرب و تفاضل ریشه‌ها

در انتهای حل این سوالات، به یک معادله درجه دوم می‌رسیم و برای یافتن مقدار خواسته شده از روابط P ، S و... که در معادله درجه دوم آموختید، استفاده می‌کنیم.

مثال: به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{k(x-12)}{x^2-3x} = 2$ برابر با ۷ است؟

(۴) ممکن نیست.

پاسخ: گزینه «۴» با گرفتن مخرج مشترک داریم:

$$\frac{x^2+k(x-12)}{x^2-3x} = 2 \Rightarrow x^2+k(x-12) = 2x^2-6x \Rightarrow x^2-(6+k)x+12k=0$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{6+k}{1} = 7 \Rightarrow 6+k=7 \Rightarrow k=1$$

$$x^2-7x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

اما اگر $k=1$ را در معادله جای‌گذاری کنیم، داریم:

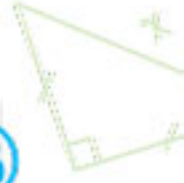
پس تنها جواب معادله $x=4$ است و هیچ وقت مجموع ۷ نمی‌شود.



$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$



$$\sqrt{x^2 + y^2}$$



۱۵۲. مجموع جواب‌های معادله $2\sqrt{x^2+2x} = (x+1)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۵۴. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{1-x}-1 = x^2-2x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۱

۱۵۵. معادله $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+8}\sqrt{x-5} = 7$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵۶. حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2+4x+5} = x^2+4x+3$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۵۷. مجموع مربعات جواب‌های معادله $2x - \sqrt{18x+1} + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{9}$ (۲) $\frac{23}{8}$ (۳) $\frac{25}{9}$ (۴) $\frac{39}{16}$

۱۵۸. اگر جواب معادله $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$ طول رأس سهمی $f(x) = x^2 + 2ax + 3$ باشد، حاصل $f(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{3}$ (۲) ۶ (۳) $\frac{19}{3}$ (۴) $\frac{20}{3}$

۱۵۹. معادله $x\sqrt{x^2+15} - 2 = \sqrt{x}$ دارای چند جواب می‌باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶۰. ★ معادله $ax - \sqrt{x-2} = 2a$ دو جواب دارد. حدود a کدام است؟

- (۱) $0 < a < 1$ (۲) $a \neq 0$ (۳) $a > 0$ (۴) $a > 1$

۱۶۱. اگر $2a + \sqrt{2a^2+4a} = 2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) $2/5$ (۳) $3/5$ (۴) $4/5$

۱۶۲. اگر $2a + \sqrt{3a+16} = 1$ باشد، عدد $4a+9$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

۱۶۳. معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶۴. معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

برای ۱۰۰ درصد



۱۶۵. معادله سه ضلع یک مثلث $x+y=1$ ، $y=2x$ و $x=1$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $y = \frac{2}{3}$ (۲) $x = \frac{2}{3}$ (۳) $y+x = \frac{2}{3}$ (۴) $y+x = \frac{1}{3}$

۱۶۶. دو نقطه A و B به طول‌های $x_A = 1$ و $x_B = 2$ روی خط $y = 4x - 3$ قرار دارند. اگر تصاویر نقاط A و B روی محور x ها، نقاط C و D باشند، مساحت ذوزنقه $ABCD$ چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۶۷. دو نقطه M و M' روی محور طول‌ها وجود دارند که اگر $A(1, -2)$ و $B(3, 2)$ باشند، زاویه‌های AMB و $AM'B$ قائمه می‌شوند. حاصل ضرب طول نقاط M و M' کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۶۸. دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه $A(1, 2)$ به فاصله ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(تجرب ۹۸)

(تجرب خارج ۹۸)

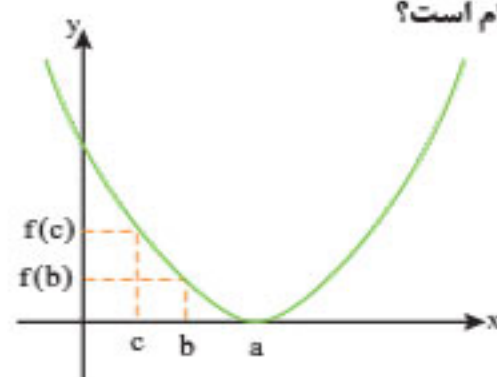
(تجرب ۱۴۰۱)

(تجرب دی ۱۴۰۱)



مهروماه

۱۹۳. در شکل زیر، $f(x)$ قسمتی از یک سهمی است. تابع $f(x)$ در $x=a$ بر محور x مماس است. اگر a ، b و c به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی و $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(c)$ به ترتیب تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟



$$(1) \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$(2) \sqrt{3} - 1$$

$$(3) \sqrt{2} - 1$$

$$(4) \sqrt{3} - 2$$

۱۹۴. به ازای چند عدد طبیعی a معادله $\frac{ax}{x-1} + \frac{2}{x} = 3$ دو ریشه حقیقی ندارد؟

$$(1) 2$$

$$(2) 3$$

$$(3) 1$$

$$(4) 0$$

۱۹۵. مجموع مربعات جواب‌های معادله $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$ چقدر است؟

$$(1) 47$$

$$(2) 33$$

$$(3) 12$$

$$(4) 11$$

۱۹۶. معادله $\frac{2\sqrt{x+4}}{x^2-16} = 1$ چند جواب حقیقی دارد؟

$$(1) 3$$

$$(2) 2$$

$$(3) 1$$

$$(4) 0$$

۱۹۷. معادله $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{x^2-8} = 1$ چند جواب دارد؟

$$(1) 6$$

$$(2) 4$$

$$(3) 3$$

$$(4) 5$$

۱۹۸. اگر معادله $x - 2\sqrt{x-2} + m = 4$ دارای دو جواب ریشه باشد، چند عدد صحیح در مجموعه مقادیر m قرار دارد؟

$$(1) 3$$

$$(2) 2$$

$$(3) 1$$

$$(4) 0$$

آزمون پایانی فصل اول



۱. اگر $A(-2, -3)$ و $B(4, 5)$ دو سر قطر یک دایره باشند، نسبت مساحت به محیط دایره چقدر است؟

$$(1) \frac{5}{2}$$

$$(2) \frac{2}{5}$$

$$(3) 5$$

$$(4) 10$$

۲. اگر $A(-3, 2)$ ، $B(-3, 0)$ و $C(1, 2)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه AM چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

$$(1) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(2) 5$$

$$(3) \sqrt{5}$$

$$(4) 1$$

۳. خط $(a+1)y + 2ax - a + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(0, 2)$ و $B(-2, 4)$ همود است. مقدار a کدام است؟

$$(1) \frac{1}{3}$$

$$(2) -\frac{1}{3}$$

$$(3) -1$$

$$(4) 1$$

۴. خطی دارای عرض از مبدأ a و طول از مبدأ b می‌باشد. این خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$(1) \frac{a-b}{ab}$$

$$(2) \frac{ab}{b-a}$$

$$(3) \frac{a+b}{ab}$$

$$(4) \frac{ab}{a+b}$$

۵. در معادله $(x+1)(x^2 - x - 6m) = 0$ حاصل ضرب سه ریشه -6 است، مقدار m کدام است؟

$$(1) -4$$

$$(2) -3$$

$$(3) -2$$

$$(4) -1$$

۶. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه، دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت آن کدام است؟

$$(1) 5/3$$

$$(2) 4$$

$$(3) 4/5$$

$$(4) 5$$

۷. در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر 5 واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟

$$(1) 10$$

$$(2) 12$$

$$(3) 14$$

$$(4) 15$$

۸. اگر α و β جواب‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$ است؟

$$(1) 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(2) 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(3) 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$(4) 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

۹. معادله $x^2 - (m+2)x - \frac{m}{4} = 0$ دارای دو ریشه متمایز مثبت است. حدود m کدام است؟

$$(1) -1 < m < 0$$

$$(2) m < -4$$

$$(3) m > -1$$

$$(4) -4 < m < -2$$

فصل ۲

هندسه

این درس خیلی مهمه! اینقدر که سر در آکادمی افلاطون نوشته بودن: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود» یعنی کنکور اون موقع یونان فقط از هندسه بوده!

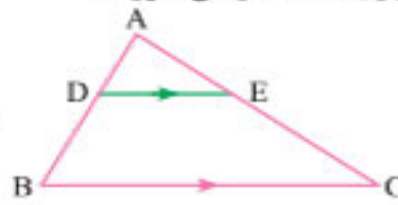
توی این فصل با هندسه مسطحه اقلیدس آشنا می‌شی و یاد می‌گیری چطوری خط عمود، موازی، عمودمنصف و ... رو رسم کنی. همین‌طور برخی ویژگی‌های اون‌ها رو یاد می‌گیری. توی درس دوم با زیون تخصصی هندسه و روش فکر کردن به ریاضی آشنا می‌شی و در انتهاش هم، قضیه مهم تالس، عکس قضیه تالس و تعمیم اون رو یاد می‌گیری. آخر فصل هم به تعریف تشابه دو مثلث ختم می‌شه! به کمک تشابه یه سری فرمول‌های مهم توی مثلث قائم‌الزاویه رو آوردیم. با خوندن تست‌های این بخش می‌تونی هر تستی رو از پا دربیاری!



بخش دوم قضیه تالس

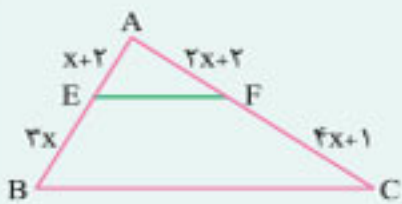


در مثلث ABC، می‌دانیم پاره خط DE با ضلع BC موازی است. در این صورت:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{مهم} \star$$

(گاهی این تناسب را رابطه جزء به جزء بین طول پاره خط‌ها می‌نامند.)



مثال: در شکل روبه رو می‌دانیم $EF \parallel BC$. مقدار x کدام است؟

$$1(2)$$

$$2(4)$$

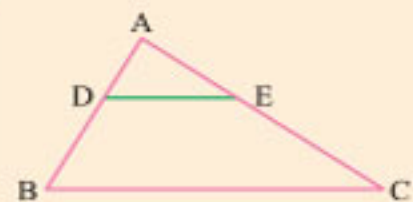
$$\frac{1}{2}(1)$$

$$\frac{2}{2}(2)$$

پاسخ: گزینه «۴» بنا بر قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\frac{x+2}{3x} = \frac{2x+2}{4x+1} \Rightarrow (x+2)(4x+1) = (2x+2)(3x) \Rightarrow 4x^2 + 9x + 2 = 6x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ غی} \\ x = 2 \text{ قی} \end{cases}$$

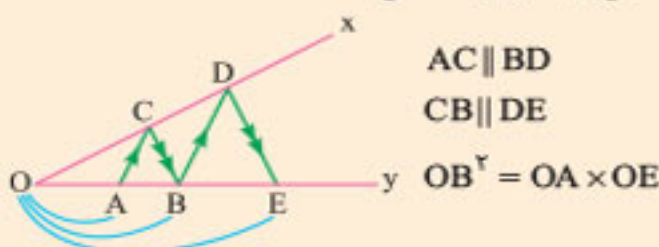


نکته: به کمک ویژگی‌های تناسب می‌توان رابطه‌های زیر را از قضیه تالس نتیجه گرفت.

$$\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC} \quad 2$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad 1$$

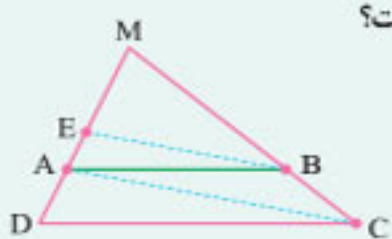
۲ یا M یا W جادویی: روی ضلع Oy از زاویه xOy دو نقطه دلخواه A و B را در نظر بگیرید؛ سپس از این نقطه‌ها دو خط موازی رسم می‌کنیم تا ضلع Ox را به ترتیب در C و D قطع کنند. حال از D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع Oy را در E قطع کند.



در این صورت:

(اثبات این نکته به کمک دوبار استفاده از قضیه تالس است.)

به بیان دیگر، اندازه پاره خط متوسط (OB) واسطه هندسی بین اندازه پاره خط کوچک (OA) و اندازه پاره خط بزرگ (OE) است.



مثال: در ذوزنقه ABCD، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، اندازه MD کدام است؟

$$12(1)$$

$$12/25(2)$$

$$12/5(3)$$

$$12/75(4)$$

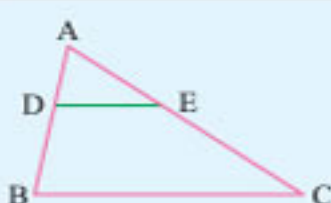
$$MA^2 = ME \times MD \Rightarrow (ME + 3)^2 = ME \times (ME + 10)$$

پاسخ: گزینه «۲» به کمک W جادویی می‌توان گفت:

$$\Rightarrow ME^2 + 6ME + 9 = ME^2 + 10ME \Rightarrow 4ME = 9 \Rightarrow ME = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\therefore MD = ME + EA + AD = 2.25 + 3 + 7 = 12.25$$

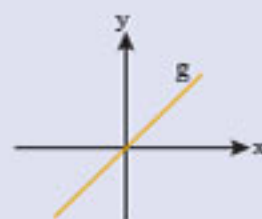
عکس قضیه تالس: مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر



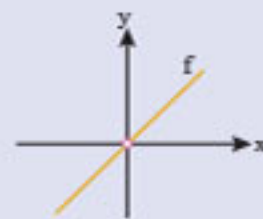
$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \quad \text{آن گاه } DE \parallel BC$$

تساوی دو تابع

نمونه: دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{0\}$ و دامنه تابع دوم، $\mathbb{R}$ است. با توجه به دامنه‌ها، نمودار این دو تابع را پس از ساده‌سازی رسم می‌کنیم.



$$g(x) = x$$



$$f(x) = \frac{x^2}{x} = x \quad (x \neq 0)$$

دو نمودار بر هم منطبق نیستند؛ بنابراین دو تابع با هم مساوی نیستند. باید ببینیم در چه صورت دو تابع با هم مساوی‌اند.

شرط تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر نامیم، هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم:

$$f(x) = g(x)$$

برای نمونه دو تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ و $g(x) = x + 1$ با هم مساوی نیستند؛ چرا که دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{1\}$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. دامنه این دو تابع با هم برابر نیستند؛ پس با وجود این که ضابطه‌های آن‌ها با هم یکسان است، دو تابع با هم مساوی نیستند.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 & (x \neq 1) \\ g(x) = x + 1 \end{cases}$$

مثال: کدام دو تابع زیر، مساوی هستند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x}, (x \neq 1) \\ g = \{(1, 2)\} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = (\sqrt{x})^2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x}{x} \\ g(x) = 3 \end{cases} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{0\}$ است در حالی که دامنه تابع g ، $\mathbb{R}$ می‌باشد. این دو تابع مساوی نیستند.

گزینه ۲: دامنه هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است؛ ولی ضابطه‌های آن‌ها با هم مساوی نیستند؛ چرا که $\sqrt{x^2} = |x|$ ؛ بنابراین دو تابع مساوی نیستند.

گزینه ۳: دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g مجموعه $x \geq 0$ است. این دو تابع مساوی نیستند.

گزینه ۴: دامنه هر دو تابع $x = 1$ و مقدار دو تابع در این نقطه برابرند. $f(1) = g(1) = 2$ ؛ بنابراین، دو تابع برخلاف ظاهر متفاوتشان برابر هستند.

بررسی یک سؤال مهم: آیا دو تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ با هم مساوی‌اند؟

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

تصور اغلب دانش‌آموزان این است که در هر شرایطی می‌توان رادیکال تقسیم را به تقسیم رادیکال‌ها تبدیل نمود؛ یعنی:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \geq 1$$

در حالی که رابطه بالا در هر شرایطی درست نیست!

برای نمونه به دامنه دو تابع f و g توجه کنید. ابتدا دامنه تابع f را می‌یابیم:

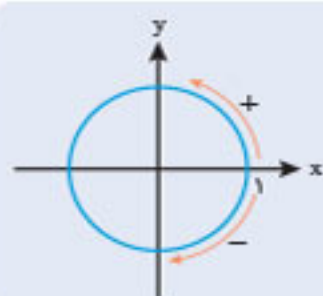
اکنون دامنه تابع g را می‌یابیم:

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 1 & \\ \hline x-1 & - & - & + \\ x+1 & - & + & + \\ \hline \frac{x-1}{x+1} & + & - & + \end{array} \Rightarrow \{x \geq 1\} \cup \{x < -1\}$$

جواب جواب

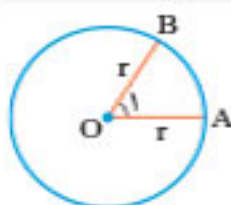
واحدهای اندازه‌گیری زاویه

درس ۱

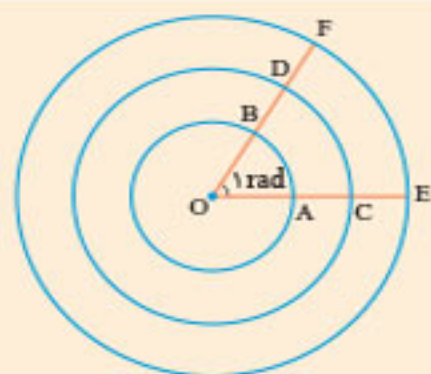


یادآوری: زاویه: اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها ۱ درجه است.
دایره مثلثاتی: دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی از دایره به طول شعاع دایره.



$$OA = OB = \widehat{AB} = r$$



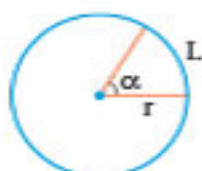
نکته: اگر زاویه مرکزی شکل مقابل، ۱ رادیان باشد، طول هر کمان با شعاع دایره نظیر آن برابر است.

$$\begin{aligned} OA &= \widehat{AB} \\ OC &= \widehat{CD} \\ OE &= \widehat{EF} \end{aligned}$$

رادیان: نسبت طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی به شعاع دایره را اندازه یک زاویه برحسب رادیان در نظر می‌گیریم:

مهم:

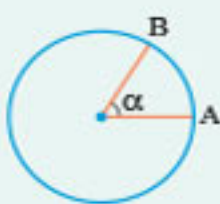
$$\text{نسبت طول کمان روبه‌روی زاویه} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{اندازه شعاع دایره}} = \text{اندازه یک زاویه برحسب رادیان}$$



$$\alpha = \frac{L}{r} \quad \text{یا} \quad L = r\alpha$$

اگر طول کمان را با L و شعاع دایره را با r و اندازه زاویه برحسب رادیان را با alpha بنامیم، داریم:

نکته: در این رابطه L و r هم‌واحد هستند.



مثال: فرض کنید در دایره مقابل، طول کمان AB برابر ۲۵ cm و شعاع دایره ۲۰ cm باشد. اندازه زاویه alpha برحسب رادیان کدام است؟

$$۰/۸ (۲)$$

$$۱/۵ (۱)$$

$$۰/۶ (۴)$$

$$۱/۲۵ (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» برای یافتن اندازه زاویه alpha برحسب رادیان کافی است نسبت طول کمان AB را بر اندازه شعاع دایره بباییم.

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{۲۵}{۲۰} = ۱/۲۵ \text{ rad}$$

اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی کمانی به طول نصف اندازه محیط دایره برحسب رادیان کدام است؟

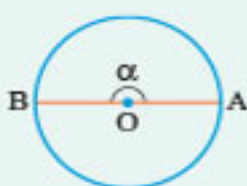
$$۲ (۴)$$

$$۲\pi (۳)$$

$$\pi (۲)$$

$$۱ (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» طول کمان موردنظر نصف اندازه محیط دایره است.



$$\widehat{AB} = \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

اندازه زاویه برحسب رادیان برابر است با:

مفهوم شهودی حد

ایست

یک توپ بسیار کوچک را مطابق شکل به زمین می‌زنیم، به طوری که هر بار پس از برخاستن از زمین به اندازه نصف مسافت قبلی، در جهت افقی حرکت می‌کند.



زمین را محور طول‌ها در نظر می‌گیریم. توپ را اولین بار در $x = 1$ به زمین می‌زنیم و فرض می‌کنیم برای بار دوم در $x = 2$ به زمین بخورد.

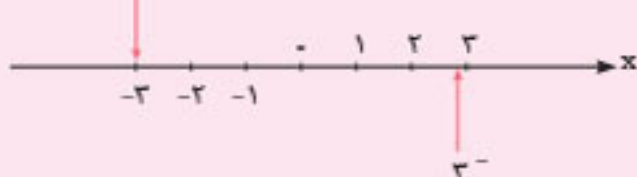
سومین بار توپ در $x = 2/5$ ، چهارمین بار در $x = 2/25$ و... به زمین می‌خورد. این توپ رفته رفته از سمت چپ به $x = 3$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

اگر توپ را یک نقطه فرض کنیم، طول‌های برخورد آن با زمین بسیار به ۳ نزدیک می‌شوند. این مفهوم شهودی حد است. دقت کنید در این آزمایش x فقط از چپ به ۳ نزدیک می‌شود درحالی‌که x می‌تواند از سمت راست هم به ۳ نزدیک شود.

تذکره: در ریاضیات اگر x به عدد ۳ از سمت چپ بسیار نزدیک شود آن را با نماد $x \rightarrow 3^-$ نمایش می‌دهند و اگر از سمت راست به آن بسیار نزدیک شود با نماد $x \rightarrow 3^+$ نمایش می‌دهند.

اگر x هم از راست و هم از چپ به ۳ نزدیک شود آن را با نماد $x \rightarrow 3$ نمایش می‌دهند و به آن حد در $x = 3$ می‌گویند.

دقت کنید علامت حدی (به جز در $x = 0$) ربطی به علامت جبری اعداد ندارد. مثلاً 3^- (بخوانید سه ی بالا منفی) هیچ ربطی به -3 ندارد. برای روشن‌تر شدن این موضوع، این دو را روی محور طول‌ها نمایش می‌دهیم.



حد تابع

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) تعریف شده باشد. حد چپ f در x_0 برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از

سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند (x_0, b) تعریف شده باشد. حد راست f در

x_0 برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛

به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت

می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, b) شامل نقطه x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) تعریف شده

باشد. حد تابع f در x_0 برابر عدد l است؛ هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l

نزدیک کرد؛ به شرط آن‌که x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در

این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

★ **مهم:** اگر تابع f در نقطه x_0 دارای حد چپ و راستی موجود و برابر l باشد، تابع در آن نقطه، حدی برابر l خواهد داشت.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

۸۸۲. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a|x^2| - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \frac{1}{7}$ باشد، آن گاه حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{35}{49}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{26}{36}$

۸۸۴. اگر $f(x) = 4x^2 - 3x^2$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\frac{\sqrt{2}}{2}x)}{g(\frac{\sqrt{2}}{2}x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۸۵. حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x^2 - 1|}$ در $x = 1$ برابر ۱ است. $a + 2b + c$ کدام است؟

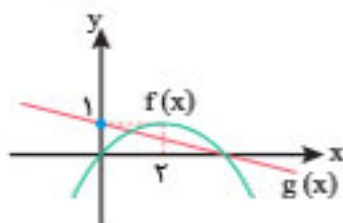
- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) -۸

۸۸۶. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - ax^2 + b|}{x^2 - 1}$ موجود باشد، $2a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(تجربین خارج ۱۴۰۰)

۸۸۷. نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow f^-} \frac{f(x) + g(x)}{f - x}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

(تجربین تیرا ۱۴۰۰)

۸۸۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - |x^2|}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

(تجربین تیرا ۱۴۰۰)

۸۸۹. اگر $f(x) = x(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{3}{14}$

حد توابع مثلثاتی

به طور کلی، مقدار حد توابع مثلثاتی در نقطه $x = a$ به صورت زیر است:

مهم: ★

۱ $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, a \in \mathbb{R}$

۲ $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a, a \in \mathbb{R}$

۳ $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, a \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

۴ $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a, a \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با جای گذاری $\frac{\pi}{4}$ به جای x ، حد عبارت خواسته شده را به راحتی می یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$



۱۰۶۲. میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

- (۱) ۹/۲۵ (۲) ۹/۳۶ (۳) ۹/۵۲ (۴) ۹/۶۳

۱۰۶۴. سه عدد متوالی مضرب ۳ را در نظر بگیرید. عدد بزرگ‌تر را حذف می‌کنیم و به جای آن عدد مضرب ۳ بعدی را می‌نویسیم. عدد کوچک‌تر را حذف می‌کنیم و به جای آن عدد مضرب ۳ قبلی را می‌نویسیم. واریانس داده‌های جدید چند برابر واریانس داده‌های قبلی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۰۶۵. میانه داده‌های ۲۳، ۸، ۱، ۱۰، ۴، ۱۶، ۳، ۸، ۲، ۱۴ برابر با ۸ است. اگر a عددی حسابی باشد، کدام گزینه واریانس مقادیر مختلف برای a را نشان می‌دهد؟

- (۱) $\frac{16}{3}$ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{35}{24}$

۱۰۶۶. میانگین و واریانس تراز دانش‌آموزان کلاس ۳۱۴ در درس ریاضی آزمون آروین البرز به ترتیب ۶۴۰۰ و ۱۶۹ و همین نمرات در کلاس ۳۱۳ به ترتیب ۶۶۰۰ و ۱۴۴ است. وضعیت ریاضی دانش‌آموزان کدام کلاس بهتر است؟

- (۱) کلاس ۳۱۳ (۲) کلاس ۳۱۴

(۳) هر دو کلاس برابرند. (۴) با این اطلاعات نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۰۶۷. داده‌های آماری زیر را در نظر بگیرید. تفاضل میانه از میانگین داده‌های بین Q_1 و Q_3 کدام است؟ (تجربی ۹۴ یا اندکی تغییر)

- (۱) صفر (۲) ۰/۵ (۳) ۱ (۴) ۱/۵

۱۰۶۸. اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۱، ۱۶، ۱۴، ۱۰، ۷ و a برابر ۱۳ باشد، میانه آن‌ها کدام است؟ (تجربی ۹۷)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۱۰۶۹. در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ است. کدام گروه بهتر است؟ (تجربی ۹۸)

- (۱) گروه اول (۲) گروه دوم (۳) یکسان (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۰۷۰. نمرات مهارت برای کارگر A: ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲ و برای کارگر B: ۱۶/۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۳، ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟ (تجربی خارج ۹۸)

- (۱) A (۲) B (۳) یکسان (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۰۷۱. ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱. ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۱، ۱۱، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴
------	--

(۱) ۰/۱۲ (۲) ۰/۱۵ (۳) ۰/۱۷ (۴) ۰/۱۸

(تجرب ۹۹)

۱۰۷۲. داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $(\sqrt{\frac{2}{5}} \approx ۰/۵۳۴)$ (تجربی خارج ۹۹)

- (۱) ۰/۱۵ (۲) ۰/۲۰ (۳) ۰/۲۵ (۴) ۰/۳۰

۱۰۷۳. داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت داده آماری از میانگین، برابر ۱+ یا ۱- و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟ (تجربی تیرا ۱۴۰)

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۱۰۷۴. داده‌های جمع‌آوری شده در یک مطالعه آماری، اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همه داده‌ها ۲ واحد بیفزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟ (تجربی تیرا ۱۴۰)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۰۷۵. کوچک‌ترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟ (تجربی دی ۱۴۰)

- (۱) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۲) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۳) $\frac{1}{12\sqrt{6}}$ (۴) $\frac{1}{24\sqrt{6}}$

۱۰۷۶. در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم، به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۲)

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۰۷۷. اگر انحراف معیار داده‌های مثبت ۲، $2a$ و a برابر $\sqrt{14}$ باشد، مقدار $\frac{a}{3}$ کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۳)

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۳/۵ (۴) ۴

خرداد ۱۴۰۲

سؤالات امتحان نهایی - نوبت دوم

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۳/۰۸

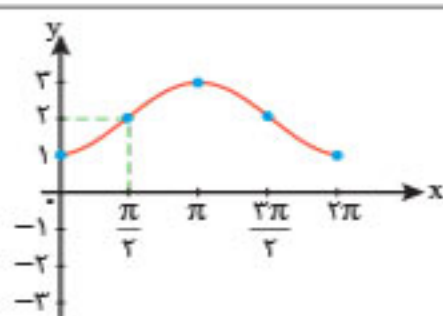
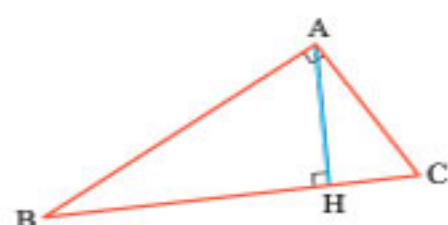
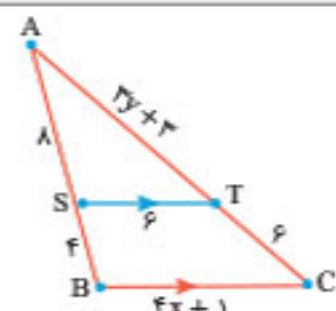
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

رشته: علوم تجربی

درس: ریاضی ۲ (یازدهم)



ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) برای هر عدد حقیقی k ، داریم $[x+k]=[x]+k$ ، $[x]$ نشان دهنده جزء صحیح x است. ب) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۲ برابر می‌شود. پ) دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد است. ب) حد تابع $f(x)=\frac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \rightarrow -1^-$ ، برابر است. پ) مقدار مینیمم تابع $f(x)=3x^2+6x+5$ برابر با است. ت) حداکثر مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر با است که در نقاط به طول حاصل می‌شود.	۱/۲۵
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) ضابطه وارون تابع $f(x)=3x-2$ کدام است؟ ۱) $f^{-1}(x)=-3x+2$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ ب) کدام یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک به یک است؟ ۱) $f(x)=x^2$ ۲) $f(x)=[x]$ ۳) $f(x)= x $ ۴) $f(x)=2^x$	۰/۵
۴	نقطه $A(3,0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=5$ است. مساحت این مربع را به دست آورید.	۰/۷۵
۵	معادله $2x=1-\sqrt{2-x}$ را حل کنید.	۱
۶	در شکل مقابل، $ST \parallel BC$ است. مقدار x و y را به دست آورید.	۱/۲۵
۷	در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اندازه پاره‌های خواسته شده را به دست آورید. $BH=9$ ، $AH=6$ ، $BC=?$ ، $AC=?$	۱
۸	نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.	۱/۵
۹	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید). $\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{-5\pi}{6}) - \tan(\frac{4\pi}{3})$	۱/۵
۱۰	نمودار رسم شده، مربوط به کدام ضابطه است؟ نمودار ضابطه دیگر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. الف) $y=2\cos x+1$ ب) $y=2-\cos x$	۱



پاور تست

۲۰۶

ریاضی ۲



مهرماه

پاسخ نامه کیدی



سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه
۱	۱	۴۰	۲	۷۹	۴	۱۱۸	۲	۱۵۷	۱	۱۹۶	۲
۲	۴	۴۱	۴	۸۰	۱	۱۱۹	۴	۱۵۸	۴	۱۹۷	۴
۳	۱	۴۲	۳	۸۱	۱	۱۲۰	۲	۱۵۹	۲	۱۹۸	۲
۴	۲	۴۳	۱	۸۲	۱	۱۲۱	۱	۱۶۰	۳	۱۹۹	۱
۵	۱	۴۴	۲	۸۳	۳	۱۲۲	۴	۱۶۱	۴	۲۰۰	۴
۶	۴	۴۵	۲	۸۴	۱	۱۲۳	۱	۱۶۲	۱	۲۰۱	۳
۷	۴	۴۶	۳	۸۵	۱	۱۲۴	۲	۱۶۳	۲	۲۰۲	۱
۸	۲	۴۷	۱	۸۶	۳	۱۲۵	۱	۱۶۴	۴	۲۰۳	۳
۹	۴	۴۸	۱	۸۷	۱	۱۲۶	۲	۱۶۵	۱	۲۰۴	۴
۱۰	۱	۴۹	۲	۸۸	۳	۱۲۷	۴	۱۶۶	۱	۲۰۵	۴
۱۱	۱	۵۰	۳	۸۹	۴	۱۲۸	۲	۱۶۷	۲	۲۰۶	۳
۱۲	۴	۵۱	۳	۹۰	۱	۱۲۹	۱	۱۶۸	۴	۲۰۷	۳
۱۳	۲	۵۲	۱	۹۱	۳	۱۳۰	۳	۱۶۹	۲	۲۰۸	۴
۱۴	۴	۵۳	۳	۹۲	۱	۱۳۱	۲	۱۷۰	۱	۲۰۹	۳
۱۵	۴	۵۴	۳	۹۳	۲	۱۳۲	۱	۱۷۱	۱	۲۱۰	۱
۱۶	۲	۵۵	۲	۹۴	۲	۱۳۳	۱	۱۷۲	۴	۲۱۱	۴
۱۷	۴	۵۶	۱	۹۵	۴	۱۳۴	۲	۱۷۳	۴	۲۱۲	۴
۱۸	۴	۵۷	۴	۹۶	۲	۱۳۵	۲	۱۷۴	۴	۲۱۳	۱
۱۹	۴	۵۸	۱	۹۷	۱	۱۳۶	۱	۱۷۵	۲	۲۱۴	۲
۲۰	۲	۵۹	۲	۹۸	۴	۱۳۷	۳	۱۷۶	۴	۲۱۵	۲
۲۱	۲	۶۰	۴	۹۹	۲	۱۳۸	۴	۱۷۷	۲	۲۱۶	۴
۲۲	۱	۶۱	۲	۱۰۰	۱	۱۳۹	۴	۱۷۸	۲	۲۱۷	۳
۲۳	۴	۶۲	۴	۱۰۱	۱	۱۴۰	۴	۱۷۹	۲	۲۱۸	۲
۲۴	۱	۶۳	۱	۱۰۲	۴	۱۴۱	۳	۱۸۰	۴	۲۱۹	۴
۲۵	۴	۶۴	۱	۱۰۳	۱	۱۴۲	۲	۱۸۱	۱	۲۲۰	۱
۲۶	۲	۶۵	۲	۱۰۴	۲	۱۴۳	۳	۱۸۲	۴	۲۲۱	۴
۲۷	۴	۶۶	۳	۱۰۵	۳	۱۴۴	۳	۱۸۳	۴	۲۲۲	۴
۲۸	۴	۶۷	۲	۱۰۶	۴	۱۴۵	۴	۱۸۴	۴	۲۲۳	۲
۲۹	۴	۶۸	۱	۱۰۷	۲	۱۴۶	۴	۱۸۵	۴	۲۲۴	۳
۳۰	۴	۶۹	۳	۱۰۸	۲	۱۴۷	۴	۱۸۶	۴	۲۲۵	۳
۳۱	۴	۷۰	۴	۱۰۹	۲	۱۴۸	۳	۱۸۷	۴	۲۲۶	۳
۳۲	۲	۷۱	۴	۱۱۰	۲	۱۴۹	۴	۱۸۸	۴	۲۲۷	۱
۳۳	۲	۷۲	۳	۱۱۱	۲	۱۵۰	۲	۱۸۹	۲	۲۲۸	۳
۳۴	۴	۷۳	۱	۱۱۲	۴	۱۵۱	۲	۱۹۰	۲	۲۲۹	۴
۳۵	۲	۷۴	۳	۱۱۳	۴	۱۵۲	۱	۱۹۱	۲	۲۳۰	۴
۳۶	۴	۷۵	۴	۱۱۴	۳	۱۵۳	۲	۱۹۲	۱	۲۳۱	۴
۳۷	۴	۷۶	۳	۱۱۵	۱	۱۵۴	۴	۱۹۳	۴	۲۳۲	۴
۳۸	۴	۷۷	۲	۱۱۶	۲	۱۵۵	۲	۱۹۴	۲	۲۳۳	۴
۳۹	۴	۷۸	۲	۱۱۷	۴	۱۵۶	۲	۱۹۵	۱	۲۳۴	۳

طرفین معادله به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4(x+1) = x^2 - 20x + 100 \Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4(3 + \sqrt{3}) \\ x = 4(3 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

$x = 4(3 - \sqrt{3})$ در شرط $x > 10$ صدق نمی‌کند و نمی‌تواند جواب معادله باشد. پس معادله تنها یک جواب مثبت دارد.

گزینه ۴ دامنه سه تابع گنگ موجود را می‌یابیم و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم. تنها مقدار مشترک را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم: اگر تساوی برقرار باشد، معادله جواب دارد.

دامنه‌های توابع گنگ $y_1 = \sqrt{2x-3}$ ، $y_2 = \sqrt{2-x}$ ، $y_3 = \sqrt{x-2}$ و $y_4 = \sqrt{x + \sqrt{x-2}}$ را می‌یابیم و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$2x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$x + \sqrt{x-2} \geq 0$$

اشتراک ۳ مجموعه اول، $x=2$ است که در نامعادله چهارم نیز برقرار است: در نتیجه تنها جواب معادله، در صورت صادق بودن $x=2$ در آن، همین مقدار است. اگر $x=2$ در معادله صدق نکند، معادله جواب ندارد. $x=2$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

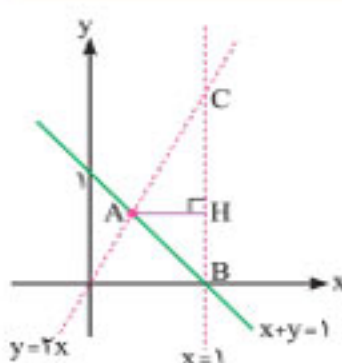
$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x + \sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x} \xrightarrow{x=2} \sqrt{1} = \sqrt{2} + \sqrt{0} + \sqrt{0}$$

تساوی برقرار نیست و معادله جواب ندارد.

مشاوره: قبل از به توان رساندن در معادلات رادیکالی پیچیده، نیم‌نگاهی به دامنه توابع موجود در معادله داشته باشید.

گزینه ۱

نکته: ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع یک مثلث، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث است و برعکس.



همان‌طور که می‌بینید، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع یعنی BC است که یک خط افقی است و معادله آن باید به صورت $y=k$ باشد. به این ترتیب فقط گزینه «۱» می‌تواند درست باشد.

اگر بخواهیم k را بیابیم، باید معادله دو خط $y=2x$ و $x+y=1$ را قطع دهیم و عرض نقطه تقاطع را بیابیم:

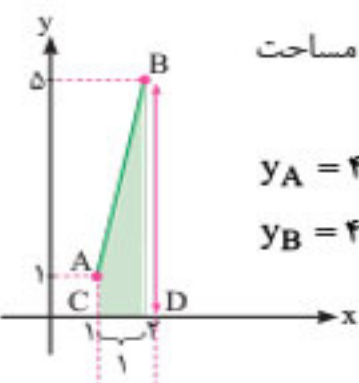
$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x+2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

با استفاده از مختصات نقطه $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ معادله کوتاه‌ترین ارتفاع به صورت $y=\frac{2}{3}$ است.

گزینه ۱ با رسم شکل به محاسبه مساحت دوزنقه می‌پردازیم:

$$y_A = 4(1) - 3 = 1$$

$$y_B = 4(2) - 3 = 5$$



همان‌طور که می‌بینید، طول قاعده بزرگ برابر ۵ و طول قاعده کوچک برابر ۱ است. ارتفاع دوزنقه هم فاصله $x=1$ تا $x=2$ یعنی $h=1$ است.

$$S = \frac{\text{مجموع قاعده بزرگ و قاعده کوچک}}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{5+1}{2} \times 1 = 3$$

گزینه ۲ نقطه $(x, 0)$ را به عنوان مختصات نقطه M روی محور طول‌ها در نظر می‌گیریم، شیب خط‌های AM و BM را می‌یابیم:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{0 - (-2)}{x - 1} = \frac{2}{x-1}$$

$$m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{0 - 2}{x - 2} = \frac{-2}{x-2}$$

می‌دانیم $m_{AM} \cdot m_{BM} = -1$ است و حاصل ضرب نقاط x و x' برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\frac{2}{x-1} \times \frac{-2}{x-2} = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$xx' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

گزینه ۳

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر با $S = \frac{-b}{a}$ است. (با شرط $\Delta \geq 0$)

نقطه (a, a) را روی نیمساز ربع اول و سوم در نظر می‌گیریم و فاصله آن را تا نقطه $A(1, 2)$ محاسبه می‌کنیم: $\sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} = 2$

در معادله $2a^2 - 6a + 1 = 0$ مجموع دو ریشه برابر است با:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

گزینه ۲ ابتدا معادله عمودمنصف پاره خط AB را می‌نویسیم:

$$A(-2, 7), B(2, -5) \Rightarrow m_{AB} = \frac{7 - (-5)}{-2 - 2} = -3 \Rightarrow m' = \frac{1}{3}$$

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (0, 1) \Rightarrow y - y_M = m'(x - x_M)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - x - 3 = 0$$

فاصله نقطه $C(1, -2)$ از خط عمودمنصف، برابر طول ضلع مربع (a) است:

$$a = d = \frac{|2(-2) - (1) - 3|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = a^2 = 10$$



$$\frac{P(x)}{Q(x)} =$$



$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

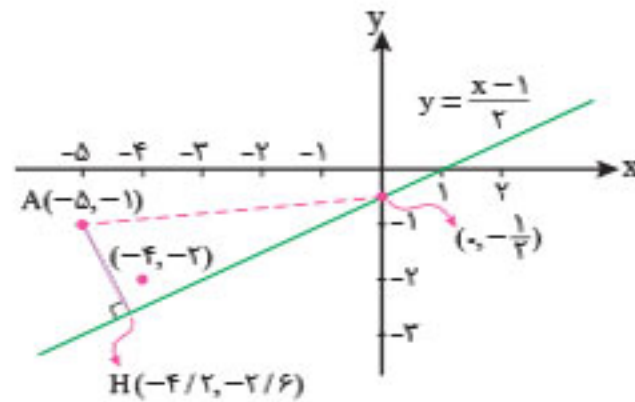


از حل دستگاه زیر، مختصات نقطه H به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = \frac{x-1}{2} \\ y = -2x-11 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = -2x-11 \xrightarrow{\times 2} x-1 = -4x-22$$

$$\Rightarrow x = -\frac{21}{5} \Rightarrow y = -\frac{13}{5}$$

پس مختصات نقطه، $H(-\frac{21}{5}, -\frac{13}{5})$ یا $H(-4\frac{1}{5}, -2\frac{3}{5})$ است.



مثلث رسم‌شده، دارای بیشترین مساحت ممکن با شرایط صورت سؤال است. برای محاسبه مساحت این مثلث با ضلعی به رأس‌های H و محل برخورد خط و محور عرض‌ها داریم:

$$d = \sqrt{(-4/2 - 0)^2 + (-2/6 - (-1/2))^2} = \sqrt{(4/2)^2 + (2/1)^2} = \sqrt{(2/1)^2 + (2/1)^2} = 2/\sqrt{2}$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \times AH \times d = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} \right) (2/\sqrt{2}) = 4/2$$

۱۷۶. گزینه ۳ مطابق درسنامه، باید شروط زیر را بررسی کنیم:

$$\textcircled{1} \Delta > 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(1)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow 4m < 8 \Rightarrow m < 2$$

$$\textcircled{2} P \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$$

$$\textcircled{3} S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{(-2)}{1} > 0 \text{ بدیهی}$$

از آن جایی که یکی از ریشه‌های معادله می‌تواند صفر باشد، پس P می‌تواند برابر صفر هم بشود. اشتراک دو مجموعه بالا $1 \leq m < 2$ است.

۱۷۷. گزینه ۲

نکته: معادله دو مجذوری زمانی می‌تواند دو ریشه داشته باشد که $P = \frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{a^2-1}{1} < 0 \Rightarrow -1 < a < 1$$

حالت دیگری که معادله می‌تواند دو ریشه داشته باشد زمانی است که $\Delta = 0$ و $-\frac{b}{2a} > 0$ باشد که در این سؤال امکان‌پذیر نیست.

۱۷۸. گزینه ۲. روش اول:

راهنبرد: در برخی مسائل، ریشه‌های معادله روابط خاصی با هم دارند! مثلاً قرینه یا معکوس یا... هستند و به کمک آن‌ها می‌توان روابط نامتقارن را به متقارن تبدیل نمود.

در این معادله حاصل‌ضرب ریشه‌ها -2 است یعنی $\alpha\beta = -2$ می‌باشد. پس $\alpha = -\frac{2}{\beta}$ است در نتیجه می‌توان رابطه نامتقارن $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{\alpha^2}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{(-\frac{2}{\beta})^2} = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} = \frac{1}{4}(S^2 - 2P)$$

در این معادله $P = \frac{c}{a} = -2$ و $S = -\frac{b}{a} = 3$ است.

$$\frac{1}{4}(S^2 - 2P) = \frac{1}{4}(3^2 - 2(-2)) = \frac{1}{4}(9+4) = \frac{13}{4}$$

روش دوم: $\alpha + \beta = 3$ و $\beta = -\frac{2}{\alpha}$ پس:

$$\alpha + \frac{-2}{\alpha} = 3 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 + \frac{-2}{1} = 3\alpha \xrightarrow{-3\alpha} \alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \xrightarrow{\div 1} \alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$$

۱۷۹. گزینه ۲ چون نمودار تابع و خط $y = x$ در ربع سوم بر هم مماس‌اند،

معادله $2ax^2 - 5x + 18a = x$ دارای ریشه مضاعف منفی است. $2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$

$$\Delta = 36 - 4(2a)(18a) = 0 \xrightarrow{-36} 1 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

ریشه مضاعف معادله $2ax^2 - 6x + 18a = 0$ برابر $x_S = -\frac{-6}{2(2a)} = \frac{3}{2a}$ است. با توجه به منفی بودن ریشه مضاعف این معادله، a نیز باید منفی باشد: در نتیجه $a = -\frac{1}{2}$ جواب تست است.

۱۸۰. گزینه ۳ با جای‌گذاری α و β در اصل معادله، به ساده‌سازی رابطه داده‌شده می‌پردازیم: $\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 5\alpha$ مقادیر حاصل را در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم:

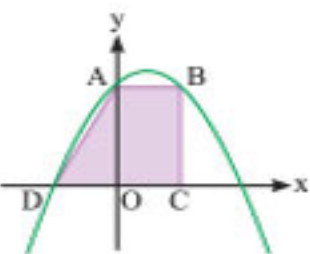
$$\underbrace{\alpha^2 + 2}_{5\alpha} + 5\beta - \alpha^2\beta^2 = 5\alpha + 5\beta - \alpha^2\beta^2 = 5(\alpha + \beta) - \alpha^2\beta^2 = 5S - P^2 = 5(5) - (2)^2 = 21$$

۱۸۱. گزینه ۱

راهنبرد: اگر رابطه نامتقارن بود، از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$m\alpha^2 + n\beta^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{m-n}{2}\right)(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\begin{aligned} 5\alpha^2 + 3\beta^2 &= \left(\frac{5+3}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{5-3}{2}\right)(\alpha^2 - \beta^2) \\ &= 4(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) = 4(S^2 - 2P) + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ &= 4(S^2 - 2P) + S \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4((-2)^2 - 2(-1)) + (-2) \cdot \frac{\sqrt{8}}{1} \\ &= 24 - 4\sqrt{2} = 4(6 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$



۱۸۲. گزینه ۳ عرض از مبدأ سهمی $y = 2$ است. برای پیدا کردن طول نقطه B ، معادله $2 + x - x^2 = 2$ را حل می‌کنیم.

$$2 + x - x^2 = 2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x_B = 1 \end{cases}$$

از قانون چرخش استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (242)^{\log_2 \frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 242} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 2^5} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{5 \log_2 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

گزینه ۴ به کمک قوانین، لگاریتم را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log \frac{\sqrt{5}}{12} &= \log \sqrt{5} - \log 12 = \log 5^{\frac{1}{2}} - \log(2^2 \times 3) \\ &= \frac{1}{2} \log 5 - (2 \log 2 + \log 3) \end{aligned}$$

طبق نکات گفته شده می‌دانیم:

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

حال مقادیر اعشاری را به جای لگاریتم‌ها قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log 5 - (2 \log 2 + \log 3) \\ = \frac{1}{2}(0.7) - (2(0.3) + 0.5) = -0.75 \end{aligned}$$

گزینه ۳

راهنما: هرگاه حاصل لگاریتم خاصی را بر حسب اطلاعات داده شده از $\log_b a$ بخواهند، کافی است لگاریتم را بر اساس قانون تفکیک در مبنای b بشکنیم.

در این مثال ابتدا لگاریتم خواسته شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\log_{54} \sqrt{125} = \log_{54} 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{54} 5$$

حال چون $\log 2$ و $\log 3$ هر دو در مبنای ۱۰ هستند لگاریتم را در مبنای ۱۰ تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \log_{54} 5 &= \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\log 5}{\log 54} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\log 5}{\log(27 \times 2)} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\log 5}{\log(3^3 \times 2)} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\log 5}{3 \log 3 + \log 2} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) \frac{1 - \log 2}{3 \log 3 + \log 2} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{1 - m}{3n + m} = \frac{3 - 3m}{6n + 2m} \end{aligned}$$

گزینه ۱ چون $\log_3 2 = a$ در مبنای ۳ داده شده است پس $\log_{18} 24$ را در مبنای ۳ تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{18} 24 &= \frac{\log_3 24}{\log_3 18} = \frac{\log_3 (2^3 \times 3)}{\log_3 (2^2 \times 3)} \\ &= \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2^2 + \log_3 3} = \frac{3 \log_3 2 + 1}{2 \log_3 2 + 1} = \frac{3a + 1}{2a + 1} \end{aligned}$$

گزینه ۲ چون $\log_3 4 = a$ در مبنای ۳ داده شده است، پس $\log_{12} 2$ را در مبنای ۳ تفکیک می‌کنیم:

$$\log_{12} 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 12} = \frac{\log_3 2}{\log_3 4 \times 3} = \frac{\log_3 2}{\log_3 4 + \log_3 3} = \frac{\log_3 2}{(a + 1)}$$

از طرفی $\log_3 2 = \frac{1}{2} \log_3 4$ است: بنابراین:

$$\frac{\log_3 2}{\log_3 4 + 1} = \frac{\frac{1}{2} \log_3 4}{a + 1} = \frac{\frac{1}{2} a}{a + 1} = \frac{a}{2a + 2}$$

گزینه ۱

$$\begin{aligned} \log_8 100 &= \frac{\log 100}{\log 8} = \frac{\log 10^2}{\log 2^3} = \frac{2 \log 10}{3 \log 2} \\ &= \frac{2}{3(1 - \log 5)} = \frac{2}{3(1 - a)} \end{aligned}$$

گزینه ۲ قبل از وارد شدن به فرمول‌های لگاریتم باید دقت کرد که $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ است:

$$\begin{aligned} A &= \log \sqrt[4]{4 + 2\sqrt{3}} + \log \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} + \log \sqrt[5]{4} \\ &= \log \sqrt[4]{(\sqrt{3} + 1)^2} + \log \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} + \log \sqrt[5]{4} \\ &= \log \sqrt[4]{\sqrt{3} + 1} + \log \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} + \log \sqrt[5]{4} \\ &= \log(\sqrt[4]{\sqrt{3} + 1} \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \sqrt[5]{4}) \end{aligned}$$

تبدیل جمع بیرون به ضرب درون

اتحاد مزدوج

$$= \log \sqrt[4]{3 - 1} \sqrt[3]{4} = \log \sqrt[4]{2} \sqrt[3]{4} = \log \sqrt[4]{8} = \log 2$$

بنابراین A همان $\log 2$ است و می‌دانیم:

$$\log 22 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5A$$

گزینه ۱ برای حل این سؤال کافی است از قانون حذف ضربی استفاده کنیم یعنی:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \dots \times \log_{128} 127 = \log_{128} 2$$

در نهایت فقط عبارت جلوی لگاریتم اول و مبنای لگاریتم آخر باقی می‌ماند:

$$\log_{128} 2 = \log_{2^7} 2 = \frac{1}{7} \log_2 2 = \frac{1}{7}$$

گزینه ۱

$$\begin{aligned} \frac{\log_3 2 \log_5 3}{\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_3 5}} &= \frac{\log_3 2 \log_5 3}{\log_3 5 \log_3 2} \\ &= \frac{\log_3 2 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_3 5}{\log_3 10} \\ &= \frac{1}{\log_3 10} = \log_{10} 3 = \log 3 \end{aligned}$$

گزینه ۲

روش اول: می‌توانیم $\log 3$ و $\log 5$ را بر حسب a و b حساب کنیم: بنابراین:

$$\log_5 4 = a \Rightarrow a = \frac{2 \log 2}{\log 5} = \frac{2(1 - \log 5)}{\log 5} = \frac{2}{\log 5} - 2$$

$$\Rightarrow a + 2 = \frac{2}{\log 5} \Rightarrow \log 5 = \frac{2}{a + 2} \quad *$$

$$\log_{25} 3 = b \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{2} \log_5 3 = b \Rightarrow \log_5 3 = 2b$$

$$\Rightarrow \frac{\log 3}{\log 5} = 2b \xrightarrow{**} \frac{\log 3}{\frac{2}{a + 2}} = 2b \Rightarrow \log 3 = \frac{2b}{a + 2}$$

اکنون خواسته تست را به دست می‌آوریم:

$$\log_{2.6} 6 = \frac{\log 6 + \log 2}{\log 2.6} = \frac{\log 3 + 1 - \log 5}{\log 2.6}$$

$$= 1 - \frac{\log 5}{\log 2.6} = 1 - \frac{\frac{2}{a + 2}}{\frac{2b + a + 2}{a + 2}} = 1 - \frac{2}{2b + a + 2} = \frac{2b + a}{2b + a + 2}$$

فرمول نامه



فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

هندسه تحلیلی

• به دست آوردن شیب خط

۱ اگر دو نقطه متمایز $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از خط را داشته باشیم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

۲ اگر زاویه خط با جهت مثبت محور x ها (θ) را داشته باشیم:

$$m = \tan \theta ; \theta \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$$

۳ اگر معادله خط را داشته باشیم:

الف) در فرم $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$m = a$$

$$m = \frac{-a}{b} \quad (b \neq 0)$$

ب) در فرم $ax + by + c = 0$:

• دو خط با شیب های m و m'

$$m = m'$$

• موازی اند، هر گاه:

$$m = \frac{-1}{m'} \quad (mm' = -1 \text{ یا } \frac{-1}{m})$$

• بر هم عمودند، هر گاه:

• نوشتن معادله خط

با داشتن شیب و یک نقطه مانند $A(x_0, y_0)$ روی خط:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

• با استفاده از فرمول مقابل:

• جای گذاری مختصات نقطه و شیب در معادله $y = ax + b$: سپس

یافتن b و نوشتن معادله

• معادله خطوط موازی محور x ها و y ها

$$y = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

• موازی محور x ها:

$$x = b \quad (b \in \mathbb{R})$$

• موازی محور y ها:

• فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

• فاصله هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

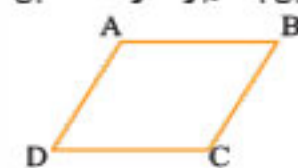
• مختصات نقطه وسط پاره خط AB

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

$$(-x, -y)$$

• قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به مبدأ:

• در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، اگر A و C رئوس مقابل به هم و B و D مقابل به هم باشند:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

• فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• معادله خط موازی با دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ که دقیقاً

در وسط دو خط قرار دارد:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

• روش تغییر متغیر: برخی از معادلات، با یک تغییر متغیر (مجهول معاون) تبدیل به معادله درجه دوم می شوند و با حل معادله درجه دوم، جواب های معادله اولیه به دست می آید.

• در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$S = \frac{-b}{a} : \text{مجموع جواب ها}, P = \frac{c}{a} : \text{حاصل ضرب جواب ها}$$

• تعیین تعداد و علامت جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، با استفاده از

علامت Δ ، S و P :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد.} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \text{معادله یک جواب مثبت دارد.} \\ \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow \text{معادله یک جواب منفی دارد.} \end{cases} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب مثبت دارد.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب منفی دارد.} \end{cases} \\ P < 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد که قدرمطلق جواب مثبت بزرگ تر است.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد که قدرمطلق جواب منفی بزرگ تر است.} \end{cases} \end{cases}$$

• مهم ترین روابط بین جواب های معادله درجه دوم

$$\textcircled{1} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad \textcircled{2} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P} \quad \textcircled{4} |\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\textcircled{5} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

• سهمی (نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$)

• صفرهای تابع f : محل برخورد نمودار تابع f با محور x ها است و از حل معادله $f(x) = 0$ به دست می آید.

• نوشتن ضابطه سهمی:

۱ با داشتن مختصات رأس (m, h) و یک نقطه:

۲ با داشتن صفرهای سهمی $(\{x_1, x_2\})$ و یک نقطه دیگر:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

۳ با داشتن سه نقطه: جای گذاری نقاط در ضابطه سهمی، حل دستگاه سه معادله سه مجهول، یافتن ضرایب و نوشتن معادله

• ماکزیمم و مینیمم سهمی

• اگر $a > 0$ ، تابع در نقطه رأس $(x_S = \frac{-b}{2a})$ مینیمم دارد و کمترین مقدار آن برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

• اگر $a < 0$ ، تابع در نقطه رأس $(x_S = \frac{-b}{2a})$ ماکزیمم دارد و بیشترین مقدار آن برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

• تعیین علامت ضرایب a ، b و c به کمک نمودار

علامت a : اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.