نشرالگو

# ۲۰ تمام

تمرین امتحان

# هندسه دوازدهم

حمیدرضا ملکی

درس‌نامهٔ سؤال‌محور

سؤالات تألیفی

سؤالات امتحانی

آزمون نیم‌سال و پایان‌سال

پاسخ‌های تشریحی

# پیشگفتار

**به نام خدا**

آخرین کتاب از مجموعهٔ کتاب‌های هندسـهٔ ۲۰ تمام نشـر الگو را پیش رو دارید. این کتاب بر اساس محتوای کتاب درسی هندسهٔ ۳ پایهٔ دوازدهم نوشته شده است و ویژگی‌های زیر را دارد:

### پوشش کامل کتاب درسی

شما می‌توانید حل تشریحی همهٔ مثال‌ها، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی هندسهٔ ۳ را در این کتاب ببینید.

### آماده‌سازی برای امتحان نهایی

در فصل آخر این کتاب، مجموعه‌ای از سـؤالات را خواهید دید که بر اسـاس امتحان نهایی بارم‌بندی شده‌اند. همچنین سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نیم‌سال اول و سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نهایی طراحی شده‌اند که با بررسی آن‌ها، کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی برای شما آسان می‌شود.

### افزایش توانایی حل مسئله

بی‌شک بسیاری از شما در برخورد با مسئله‌های هندسه با این پرسش مواجه شده‌اید که چطور آن را حل کنم؟ در تألیف این کتاب، هدف اصلی این بوده اسـت که مهارت حل مسـئلهٔ شما در هندسه افزایش یابد. برای این منظور، علاوه بر مسئله‌های کتاب درسی، مسـئله‌ها و تمرین‌هایی آورده شـده‌اند که به شما در رسیدن به این هدف کمک می‌کنند. همچنین بسیاری از مسئله‌ها و تمرین‌های این کتاب با روش‌های گوناگون حل شده‌اند تا با ایده‌ها و تکنیک‌های مختلف حل مسئله‌های هندسه آشنا شوید. در پایان هر فصل، برای دانش‌آموزان علاقه‌مند چندین تمرین مهارتی وجود دارد. با حل این تمرین‌ها، چالش‌های بیشتری را تجربه می‌کنید. حتماً به آن‌ها فکر کنید.

### مناسب برای هر دانش‌آموز

طراحی این کتاب به‌گونه‌ای اسـت که هر دانش‌آموز با هر سـطحی می‌تواند از آن استفاده کند. در واقع با نحوهٔ بیان مطالب و تنوع مسئله‌هایی که در این کتاب وجود دارد، همهٔ دانش‌آموزان مدارس دولتی، سمپاد، غیرانتفاعی و ... می‌توانند از آن استفاده کنند و سطح علمی خود را افزایش دهند.

این کتاب شــامل پنج فصل اســت. سه فصل اول آن مطابق با ســه فصل کتاب درسی هندسهٔ ۳ هستند. در فصل چهارم، پاسخ‌های تشریحی همهٔ تمرین‌های کتاب (تشریحی و مهارتی) را می‌بینید. فصل پنجم، گام نهایی است که بخش‌های زیر را شامل می‌شود:

- کتاب درسی در یک قاب: خلاصه‌ای از هر فصل که برای جمع‌بندی مطالب بسیار مفید است؛
- نمونه سؤالات امتحانی فصل به فصل: همهٔ مطالب کتاب درسی به همراه پاسخنامه‌ای بر اساس امتحان نهایی؛
- امتحان‌های نیم‌ســال اول، جامع و نهایی: ۳ امتحان نیم‌ســال اول تألیفی، ۳ امتحان جامع تألیفی (شبیه‌ساز امتحان نهایی) و امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ به همراه پاسخنامه با هدف آماده‌سازی شما برای شرکت در امتحان نهایی.

چند توصیه به شما برای افزایش توانایی حل مسئله‌های این کتاب دارم.

۱ همیشه داده‌ها و خواسته‌های مسئله را در نظر داشته باشید. اگر مسئله نیاز به شکل دارد، آن را دقیق و زیبا رسم کنید.

۲ به مسئله‌ها خوب فکر کنید. ما در این کتاب همانند کتاب‌های هندسهٔ دهم و هندسهٔ یازدهم تمام نشر الگو، یک شعار را دنبال می‌کنیم. **حل نکردن اشکال ندارد ولی فکر نکردن اشکال دارد.** خیلی مهم است که به اندازهٔ کافی روی مسائل فکر کنید. اگر هم حل نشد، هیچ اشکالی ندارد.

۳ از پاســخنامه خیلی کم استفاده کنید. ســعی کنید تا جای ممکن خودتان مسئله‌ها را حل کنید. اگر نتوانستید، از دوستان خود یا معلمتان کمک بگیرید. در نهایت، اگر از هیچ روشــی به پاســخ نرســیدید، باز هم حل کامل را از پاسخنامه نخوانید، بلکه از آن راهنمایی بگیرید.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزم در نشــر الگو، دکتر آریس آقانیانس و خانم ســارا رهنمون برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای حروف‌چینی و صفحه‌آرایی، خانم‌ها مرضیه کریمی و فاطمه احدی برای رســم شــکل و خانم ســتین مختار مدیر واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

**حمیدرضا ملکی**

# فهرست مطالب

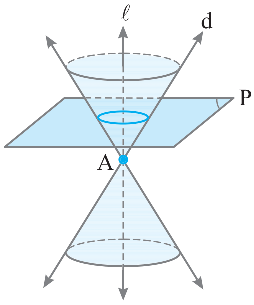
**امتحانات فصل به فصل، نیم‌سال اول و جامع**



**پاسخ‌های تشریحی**

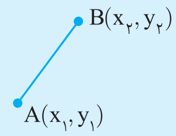
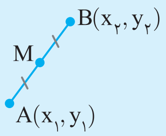
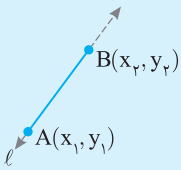
## درس دوم

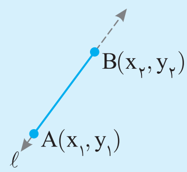
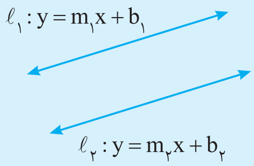
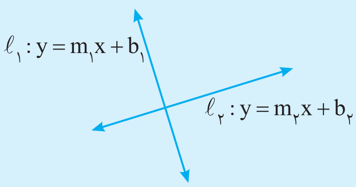
# دایره

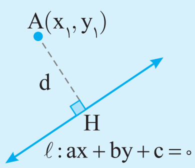
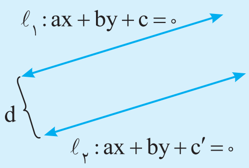



در درس قبل، با مقاطع مخروطی به‌صورت شـهودی آشنا شـدیم. معروف‌ترین مقطع مخروطی دایره است. آیا به یاد دارید در چه صورت مقطع یک رویهٔ مخروطی دایره می‌شـود؟ آفرین. وقتی که صفحه بر محور سـطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن نگذرد.

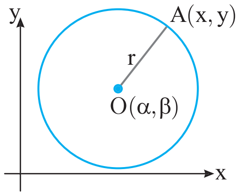
هدف از این درس آشـنایی با ویژگی‌های دایره به‌صورت تحلیلی در دسـتگاه مختصات دوبعدی اسـت. قبل از این‌که وارد بحث بشـویم، لازم اسـت مواردی را که در مبحث هندسهٔ تحلیلی از حسـابان ۱ آموخته‌اید، یادآوری کنیم. حتماً این موارد را به خاطر بسپارید.

| فاصلهٔ دو نقطه از هم | نقطهٔ وسط پاره‌خط | شیب خط گذرنده از دو نقطه |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $AB=\sqrt{(x_{۱}-x_{۲})^{۲}+(y_{۱}-y_{۲})^{۲}}$ | $M(\frac{x_{۱}+x_{۲}}{۲},\ \frac{y_{۱}+y_{۲}}{۲})$ | $m=m_{AB}=\frac{y_{۲}-y_{۱}}{x_{۲}-x_{۱}}$ |

| معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه | موازی بودن دو خط با هم | عمود بودن دو خط بر هم |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $\ell:y=mx+b$<br>$\ell:y-y_{۱}=m(x-x_{۱})$ | $\ell_{۱}\|\|\ell_{۲}\Leftrightarrow m_{۱}=m_{۲},\ b_{۱}\neq b_{۲}$ | $\ell_{۱}\perp\ell_{۲}\Leftrightarrow m_{۱}m_{۲}=-۱$ |

| فاصلهٔ نقطه از خط | فاصلهٔ دو خط موازی از هم |
|---|---|
|   |   |
| $d=AH=\frac{\|ax_{۱}+by_{۱}+c\|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ | $d=\frac{\|c-c'\|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ |

## معادلهٔ دایره




خب، برویم سراغ دایره. آیا می‌توانید دایره را با مکان هندسی تعریف کنید؟ حتماً می‌توانید. به یاد دارید که دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت همان صفحه (مرکز دایره) فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) دارنـد. همان‌طـور که می‌بینیم، تعریف دایـره به فاصلهٔ بین دو نقطه مربوط اسـت، یعنی نقطهٔ $A(x, y)$ روی دایرهٔ $C(O, r)$ است اگر و تنها اگر $OA = r$. فرض کنید $O(\alpha, \beta)$. در این صورت

$$OA = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲} = r \Leftrightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

### معادلهٔ استاندارد دایره

معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به‌صورت مقابل است:

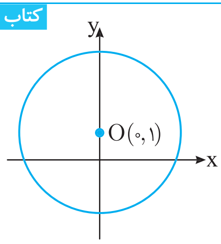
$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

به این معادله **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گویند.

### مسئله ۷

کتاب درسی

**معادلهٔ استاندارد دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.**

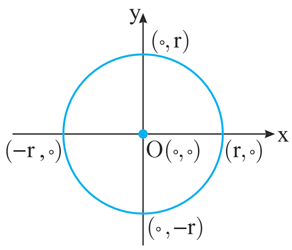



**راه‌حل** بنابر تعریف معادلهٔ استاندارد دایره داریم

$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = ۳^۲ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$$

### مسئله ۸

**معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن r باشد. شکل این دایره را رسم کنید.**




**راه‌حل** چون $O(۰, ۰)$ مرکز دایره است، پس بنابر تعریف معادلهٔ استاندارد دایره داریم

$$x^۲ + y^۲ = r^۲$$

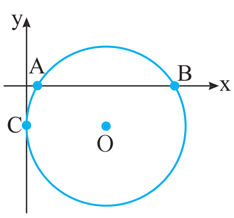
### مسئله ۹

کتاب درسی

**معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $O(۲, -۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به‌دست آورید.**

**راه‌حل** مسئلهٔ ساده‌ای است. شاید در ابتدا کمی برای شما مبهم باشد. مختصات مرکز و شعاع دایره داده شده است. کافی است این مقادیر را در معادلهٔ استاندارد دایره قرار دهیم.

$$O(\alpha, \beta) = (۲, -۱),\ r = ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$$




در شکل مقابل این دایره را رسم کرده‌ایم. توجه کنید که این دایره بر محور yها مماس اسـت. ؟ چگونه مختصات نقطه‌های برخورد این دایره با محور xها را به‌دست آوریم؟ کافی است در معادلهٔ دایره $y = ۰$ قرار دهیم.

$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴ \xrightarrow{y=۰} (x-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow x-۲ = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow x = ۲\pm\sqrt{۳}$$

در نتیجـه دایـره محور xهـا را در دو نقطهٔ $A(۲-\sqrt{۳}, ۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳}, ۰)$ قطع می‌کند. بـرای یافتن نقطهٔ برخورد با محور yها کافی است در معادلهٔ دایره $x = ۰$ قرار دهیم.

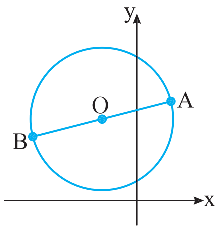
$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴ \xrightarrow{x=۰} (y+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow y = -۱$$

بنابراین نقطهٔ $C(۰, -۱)$ نقطهٔ برخورد دایره با محور yها است. در واقع چون دایره در یک نقطه محور yها را قطع می‌کند، پس بر آن مماس است.

## مسئله ۱۰

**معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که دو نقطهٔ $A(۱,۳)$ و $B(-۳,۲)$ دو سر یک قطر آن باشند.**

**راه‌حل** برای نوشتن معادلهٔ دایره نیاز به مختصات مرکز دایره و شعاع آن داریم. چون $AB$ قطر دایره است، پس مرکز دایره وسط $AB$ است. شعاع آن را چگونه محاسبه کنیم؟ حتماً می‌دانید که $r=\frac{AB}{۲}$.




$$A(۱,۳),B(-۳,۲)\Rightarrow\begin{cases}O(\alpha,\beta)=(\frac{۱-۳}{۲},\frac{۳+۲}{۲})=(-۱,\frac{۵}{۲})\\ r=\frac{AB}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۱-(-۳))^۲+(۳-۲)^۲}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ دایره به‌صورت $(x+۱)^۲+(y-\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۱۷}{۴}$ است.

هریک از دو معادله‌ای را که در دو مسئلهٔ قبل به‌دست آمده‌اند، به کمک اتحادها ساده می‌کنیم. بدین صورت

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴\Rightarrow x^۲-۴x+۴+y^۲+۲y+۱=۴\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x+۲y+۱=۰$$

$$(x+۱)^۲+(y-\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲-۵y+\frac{۲۵}{۴}=\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۵y+۳=۰$$

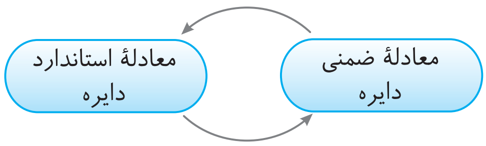
به هریک از دو معادلهٔ ساده شده، معادلهٔ ضمنی دایره می‌گویند.

### معادلهٔ ضمنی دایره

معادلهٔ دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ را معادلهٔ ضمنی دایره می‌نامند.[۱]

در این تعریف فرض کرده‌ایم معادلهٔ داده شده مربوط به دایره است. توجه کنید که هر معادله به این شکل لزوماً معادلهٔ دایره نیست. به‌عنوان مثال هیچ نقطه‌ای در معادلهٔ $x^۲+y^۲+۱=۰$ صدق نمی‌کند و این تساوی معادلهٔ یک دایره نیست. در ادامهٔ درس خواهید دید که شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ داده شده مربوط به دایره باشد، چیست. آیا خودتان می‌توانید این شرط را پیدا کنید؟

خیلی مهم است که شما بتوانید به راحتی یک معادلهٔ ضمنی را به معادلهٔ استاندارد دایره تبدیل کنید و برعکس.

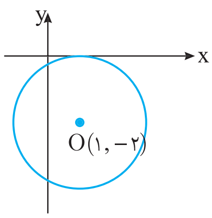



## مسئله ۱۱

**هریک از معادله‌های ضمنی زیر را به معادلهٔ استاندارد دایره تبدیل کنید و در هر کدام مختصات مرکز دایره و شعاع آن را به‌دست آورید.**

**الف)** $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ **ب)** $x^۲+y^۲+۶x-۴y-۳=۰$ **پ)** $x^۲+y^۲+۳x+۵y+۴=۰$

**راه‌حل** الف) معادلهٔ استاندارد دایره به‌صورت مجموع دو مربع کامل است. پس ایده این است که هریک از معادله‌ها را به مجموع دو مربع کامل تبدیل کنیم.

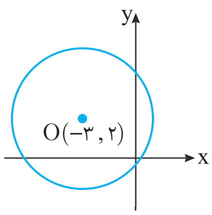



$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰\Rightarrow(x^۲-۲x+\square)+(y^۲+۴y+\triangle)=-۱+\square+\triangle$$

در واقع باید $x^۲-۲x$ و $y^۲+۴y$ مربع کامل شوند. پس باید به‌جای $\square$ عدد ۱ و به جای $\triangle$ عدد ۴ قرار دهیم.

بنابراین معادلهٔ استاندارد دایره بدین صورت است: $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴\Rightarrow O(۱,-۲),r=۲$

ب) در این قسمت نیز باید مربع کامل سازی کنیم. سعی کنید خودتان کار را تمام کنید.

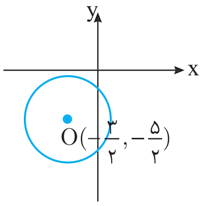



$$x^۲+y^۲+۶x-۴y-۳=۰\Rightarrow(x^۲+۶x+۹)+(y^۲-۴y+۴)=۳+۹+۴$$

$$(x+۳)^۲+(y-۲)^۲=۱۶$$

بنابراین $O(-۳,۲)$ و $r=۴$.

۱- در حالت کلی در معادلهٔ ضمنی دایره، ضریب‌های $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابرند ولی برای سادگی آن‌ها را ۱ در نظر می‌گیرند.




پ) همانند دو قسمت قبل عمل می‌کنیم، البته بدون نوشتن جزئیات.

$$x^2+y^2+3x+5y+4=0 \Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=-4+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{9}{2}$$

پس $O(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$ و $r=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

در مسئلهٔ بعدی می‌خواهیم روش تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد را در حالت کلی بیان کنیم.

## مسئله ۱۲

کتاب درسی

**معادلهٔ ضمنی دایره‌ای $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است.**

**الف) معادلهٔ استاندارد این دایره را بنویسید.**

**ب) مختصات مرکز دایره و شعاع آن را به‌دست آورید.**

**راه‌حل** الف) کافی است مانند مسئلهٔ قبل عمل کنیم. باید ببینیم که $x^2+ax$ و $y^2+by$ چه چیزی لازم دارند تا مربع کامل شوند. آن عبارت را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم. توجه کنید که $x^2+ax+\frac{a^2}{4}=(x+\frac{a}{2})^2$ و $y^2+by+\frac{b^2}{4}=(y+\frac{b}{2})^2$. پس

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\frac{b^2}{4})=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4} \Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

عبارت آخر معادلهٔ استاندارد دایره است.

ب) چگونه از معادلهٔ استاندارد مختصات مرکز دایره و شعاع آن را به‌دست آوریم؟

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}),\ r=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

در مسئلهٔ قبل به نتیجهٔ $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ رسیدیم. توجه کنید که در دایره شعاع عددی مثبت است. پس عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد.

**نتیجه** معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$.

در واقع می‌توان جدول زیر را نتیجه گرفت:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x^2+y^2+ax+by=c=0$ | $a^2+b^2>4c$ | یک دایره را مشخص می‌کند. | $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ |
| | $a^2+b^2=4c$ | فقط یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند. | $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ |
| | $a^2+b^2<4c$ | هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند. | تهی |

آیا این جدول برای شما واضح است؟ شاید لازم باشد حالت دوم را توضیح دهیم. اگر $a^2+b^2=4c$، آن‌گاه مطابق مسئلهٔ قبل داریم

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=0$$

چون مجموع دو مربع کامل برابر صفر است، پس هر دوی آن‌ها صفرند. ? در نتیجه $x=-\frac{a}{2}$ و $y=-\frac{b}{2}$. بنابراین با داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس، با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست آورد. کافی است از جدول بالا استفاده کنید. حتماً موارد آن را به خاطر بسپارید و در مسئلهٔ بعد آن‌ها را به‌کار ببرید.

## مسئله ۱۳

کتاب درسی

**کدام‌یک از روابط زیر می‌تواند معادلهٔ یک دایره باشد؟ در آن‌ها مختصات مرکز دایره و شعاع را محاسبه کنید و سپس دایره را رسم کنید.**

**الف)** $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$  **ب)** $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

**پ)** $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰$  **ت)** $۲x^۲+۲y^۲+۲x-۶y+۵=۰$

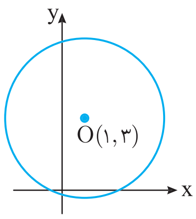
**راه‌حل** کافی است از جدول قبل استفاده کنیم، یعنی باید ابتدا $a^۲+b^۲-۴c$ را محاسبه کنیم.

الف) توجه کنید که $a=-۲$، $b=-۶$ و $c=-۱$. بنابراین

$$a^۲+b^۲-۴c=۴+۳۶+۴=۴۴>۰\Rightarrow a^۲+b^۲>۴c$$

پس این رابطه معادلهٔ دایره است و داریم

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۳),\quad r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴۴}}{۲}=\sqrt{۱۱}$$




ب) در این قسمت داریم

$$a^۲+b^۲-۴c=۴+۹-۱۶=-۳<۰\Rightarrow a^۲+b^۲<۴c$$

پس این رابطه هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند. به عبارت دیگر، نمودار آن تهی است.

پ) احتمالاً شما هم در ابتدا اشتباه کرده‌اید. خوب دقت نکردید که ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ نیستند. ابتدا باید این دو ضریب را ۱ کنیم. با تقسیم کردن طرفین رابطه بر ۲ داریم

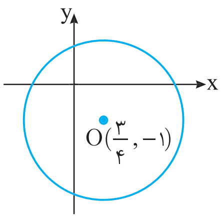
$$x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+۲y-۱=۰$$

اکنون a، b و c مشخص شده‌اند. پس

$$a^۲+b^۲-۴c=\frac{۹}{۴}+۴+۴=\frac{۴۱}{۴}>۰\Rightarrow a^۲+b^۲>۴c$$

بنابراین رابطهٔ این قسمت معادلهٔ دایره را مشخص می‌کند و داریم

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۳}{۴},-۱),\quad r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$$




ت) ابتدا طرفین رابطه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+x-۳y+\frac{۵}{۲}=۰\Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۱+۹-۱۰=۰$$

پس این رابطه فقط نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ را مشخص می‌کند.

## مسئله ۱۴

کتاب درسی

**معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۲,-۱)$ مرکز آن و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد.**

**راه‌حل** مختصات مرکز را داریم. پس کافی است شعاع آن را محاسبه کنیم. چون M روی دایره است، پس $OM=r$.

$$OM=\sqrt{(۱-(-۲))^۲+(۱-(-۱))^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow r=\sqrt{۱۳}$$

پس معادلهٔ استاندارد این دایره بدین صورت است:

$$(x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۱۳$$

معادلهٔ ضمنی آن نیز بدین صورت است:

$$x^۲+y^۲+۴x+۲y-۸=۰$$

مسئله‌هایی که تاکنون مطرح کردیم، چالش چندانی نداشتند. اکنون می‌خواهیم چند مسئله بیان کنیم که نیاز به تلاش بیشتری دارند. در آن‌ها لازم است که از دانش خود در حسابان ۱ و هندسه ۲ استفاده کنید. این مسئله‌ها را می‌توان به سه دستهٔ زیر تقسیم کنیم.

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم | وضعیت خط و دایره نسبت به هم | وضعیت دو دایره نسبت به هم

## وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

با یک مسئله این بخش را توضیح می‌دهیم.

**مسئله ۱۵**

**دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۳y-\frac{۳}{۴}=۰$ مفروض است. مشخص کنید نقاط زیر نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند. (درون، روی یا بیرون دایره‌اند؟)**

**الف)** $A(۰,۰)$ **ب)** $B(۱,\frac{۳}{۲})$ **پ)** $C(۲,-۱)$

**راه‌حل** حتماً ایدهٔ حل این مسئله را می‌دانید. کافی است فاصلهٔ هر نقطه تا مرکز دایره را محاسبه و سپس با شعاع دایره مقایسه کنیم. ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۱,\frac{۳}{۲}),\quad r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۹+۳}}{۲}=۲$$

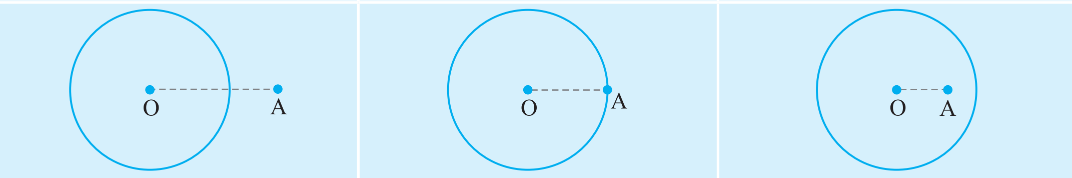
الف) $OA=\sqrt{۱^۲+(\frac{۳}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}<۲ \xrightarrow{OA<r}$ A درون دایره است.

ب) $OB=\sqrt{۲^۲+۰^۲}=۲ \xrightarrow{OB=r}$ B روی دایره است.

پ) $OC=\sqrt{۹+\frac{۲۵}{۴}}=\frac{\sqrt{۶۱}}{۲}>۲ \xrightarrow{OC>r}$ C بیرون دایره است.

در شکل‌های زیر، وضعیت نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,r)$ را می‌بینیم:

| درون دایره | روی دایره | بیرون دایره |
|---|---|---|




| $OA<r$ | $OA=r$ | $OA>r$ |
|---|---|---|

یک راه تکنیکی برای مسئلهٔ قبل وجود دارد. در اینجا فقط نکتهٔ آن را بیان می‌کنیم. اثبات آن را در تمرین‌های مهارتی از شما خواسته‌ایم.

**نکته**

اگر $f(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ ضمنی یک دایره و $A(\alpha,\beta)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

۱ نقطهٔ A درون دایره است اگر و تنها اگر $f(\alpha,\beta)<۰$.

۲ نقطهٔ A روی دایره است اگر و تنها اگر $f(\alpha,\beta)=۰$.

۳ نقطهٔ A بیرون دایره است اگر و تنها اگر $f(\alpha,\beta)>۰$.

حتماً می‌دانید که منظور از $f(\alpha,\beta)$ چیست! منظور مقدار عددی عبارت جبری $f(x,y)$ به ازای $x=\alpha$ و $y=\beta$ است که آن را در ریاضی پایه‌های هفتم و هشتم آموخته‌اید. بنابراین

$$f(\alpha,\beta)=\alpha^۲+\beta^۲+a\alpha+b\beta+c$$

سعی کنید دلیل نکتهٔ بالا را پیدا کنید. خیلی از شما توانایی اثبات آن را دارید.

**مسئله ۱۶**

**با استفاده از نکتهٔ بیان شده مسئلهٔ ۱۵ را بررسی کنید.**

**راه‌حل** در آن مسئله $f(x,y)=x^۲+y^۲+۲x-۳y-\frac{۳}{۴}=۰$.

الف) برای $A(۰,۰)$ داریم $f(۰,۰)=-\frac{۳}{۴}<۰ \Rightarrow$ A درون دایره است.

ب) برای $B(۱,\frac{۳}{۲})$ داریم $f(۱,\frac{۳}{۲})=۱+\frac{۹}{۴}+۲-\frac{۹}{۲}-\frac{۳}{۴}=۰ \Rightarrow$ B روی دایره است.

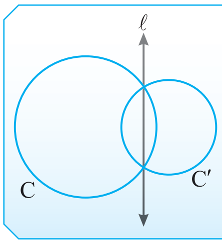
پ) برای $C(۲,-۱)$ داریم $f(۲,-۱)=۴+۱+۴+۳-\frac{۳}{۴}=\frac{۴۵}{۴}>۰ \Rightarrow$ C بیرون دایره است.

نکته‌ای را که در مسئلهٔ قبل آمد، دوباره بازگو می‌کنیم.

**نکته**

دو دایره به معادله‌های $C:x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $C':x^2+y^2+mx+ny+p=0$ مفروض‌اند. اگر این دو دایره متقاطع باشند، معادلهٔ خط شامل وتر مشترک آن‌ها تفاضل معادله‌های دو دایره است، یعنی

$$\ell:(a-m)x+(b-n)y+(c-p)=0$$




در نکتهٔ قبل، چون دو دایره متقاطع فرض شده‌اند، پس $a-m$ و $b-n$ به‌طور همزمان نمی‌توانند صفر شوند، زیرا در غیر این صورت $a=m$ و $b=n$ و بنابراین دو دایره هم‌مرکز خواهند بود. اما توجه داشته باشید که یکی از تساوی‌های $a=m$ و $b=n$ می‌تواند برقرار باشد.

۱ اگر $a=m$، آن‌گاه خط شامل وتر مشترک دو دایره افقی و خط‌المرکزین دو دایره عمودی است.

۲ اگر $b=n$، آن‌گاه خط شامل وتر مشترک دو دایره عمودی و خط‌المرکزین دو دایره افقی است.

درس دوم

## تمرین‌های تشریحی

**۱۲۲** **معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید و شکل آن‌ها را رسم کنید.**

**الف) مرکز آن $O(0,0)$ و شعاع آن ۲ باشد.**

**ب) مرکز آن $O(-2,3)$ و شعاع آن ۳ باشد.**

**۱۲۳** **معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که** کتاب درسی

**الف) مرکز آن $O(1,1)$ و نقطهٔ $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.**

**ب) دو نقطهٔ $A(2,3)$ و $B(-1,1)$ دو سر قطری از آن باشد.**

**۱۲۴** **هریک از معادلات ضمنی زیر را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنید و سپس مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست آورید.**

الف) $x^2+y^2+2x-1=0$ ب) $x^2+y^2+3y=2$

پ) $x^2+y^2-4x+5y=-3$ ت) $x^2+y^2-3x-7y+10=0$

**۱۲۵** **در هریک از معادله‌های ضمنی دایره بدون اینکه به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنید، مختصات مرکز دایره و شعاع آن را محاسبه کنید.**

الف) $x^2+y^2+2x-4y=3$ ب) $x^2+y^2-x-2y-3=0$

پ) $x^2+y^2+2x+3y=8$ ت) $x^2+y^2-x+3y-4/75=0$

**۱۲۶** **در هریک از حالت‌های زیر مختصات نقطه یا نقطه‌های برخورد دایره با محورهای مختصات را به‌دست آورید.**

الف) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ ب) $x^2+y^2-3x+y+2=0$

پ) $x^2+y^2-x-2y=1$

**۱۲۷** **مشخص کنید کدام‌یک از رابطه‌های زیر مربوط به یک دایره است.**

الف) $x^2+y^2-5x+2y+8=0$ ب) $2x^2+2y^2-2x-6y+5=0$

پ) $3x^2+3y^2-x+2y+1=0$

**۱۲۸** **در هریک از حالت‌های زیر حدود a را طوری تعیین کنید که رابطهٔ داده شده بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.**

الف) $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ کتاب درسی ب) $x^2+y^2-4x+3y+a=1$

پ) $x^2+y^2+2x+ay=-3$ ت) $2x^2+2y^2+ax-y=2$

ث) $2x^2+2y^2+2ax-2y+2a=1$

۱۲۹_ وضعیت هریک از نقطه‌های زیر را نسبت به دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-x+2y=5$ مشخص کنید.

الف) $A(0,0)$ ب) $B(1,1)$ پ) $C(2,1)$ ت) $D(-1,1)$ ث) $E(3,1)$

۱۳۰_ در هریک از موارد زیر معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ در ربع اول و

الف) بر محور xها مماس باشد. ب) بر محور yها مماس باشد.

۱۳۱_ وضعیت هریک از نقاط $A(-1,-1)$، $B(1,-2)$، $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

کتاب درسی

۱۳۲_ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که

الف) نقطهٔ $O(2,1)$ مرکز آن و بر خط $\ell:3x+4y=0$ مماس باشد. کتاب درسی

ب) نقطهٔ $O(1,-1)$ مرکز آن و بر خط $\ell:5x-12y=2$ مماس باشد.

۱۳۳_ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که

الف) نقطهٔ $O(-1,-1)$ مرکز آن باشد و روی خط به معادلهٔ $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند. کتاب درسی

ب) نقطهٔ $O(3,-1)$ مرکز آن باشد و روی خط به معادلهٔ $2x-5y+18=0$ وتری به طول ۶ ایجاد کند.

۱۳۴_ وضعیت هریک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید. کتاب درسی

الف) $x^2+y^2-4x-4y+7=0,\quad 3x+4y=0,$

ب) $x^2+y^2=2,\quad x+y=2,$

پ) $x^2+y^2-2x-2y=2,\quad x+y=1,$

۱۳۵_ وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید. کتاب درسی

الف) $x^2+y^2-10x-14y+73=0,\quad x^2+y^2-4x-6y=3,$

ب) $x^2+y^2-8x-4y+19=0,\quad x^2+y^2=4,$

پ) $x^2+y^2-2x=4,\quad x^2+y^2=4,$

ت) $(x-1)^2+y^2=1,\quad x^2+(y-1)^2=1,$

ث) $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0,\quad x^2+y^2=1,$

ج) $x^2+y^2-6x-2y+9=0,\quad x^2+y^2=1,$

۱۳۶_ در هریک از حالت‌های زیر مختصات نقطهٔ برخورد خط و دایره را به‌دست آورید.

الف) $x+y=0,\quad x^2+y^2+5x=0,$

ب) $x-3y+5=0,\quad x^2+y^2-2x-4y=5,$

۱۳۷_ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که

الف) دو خط به معادله‌های $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن و خط $\ell:4x+3y=6$ بر آن مماس باشد. کتاب درسی

ب) به‌ازای هر m، معادلهٔ $(2m-1)x+(m+3)y+7=0$، معادلهٔ خط شامل قطری از آن و بر خط $\ell:12y=5x-3$ مماس باشد.

۱۳۸_ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که

الف) دو خط به معادله‌های $2x+y=3$ و $x-2y=4$ شامل قطرهایی از آن باشند و از نقطهٔ $A(-1,0)$ بگذرد.

ب) به‌ازای هر m، معادلهٔ $(m-2)x+(m+1)y=6$، معادلهٔ خط شامل قطری از آن باشد و از نقطهٔ $A(-1,1)$ بگذرد.

۱۳۹_ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-1,1)$ و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ مماس بیرونی باشد. کتاب درسی

۱۴۰_ دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+12x+2y+27=0$ مفروض است.

الف) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(3,2)$ و مماس خارج بر دایرهٔ داده شده را بنویسید.

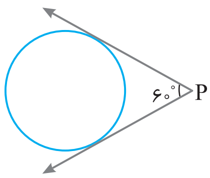
ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-\frac{20}{3},1)$ و مماس داخل بر دایرهٔ داده شده را بنویسید.

# تمرین‌های مهارتی فصل دوم

**۲۱۶** مکان هندسی هریک از مجموعهٔ نقاط زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ نقاطی که وتری به طول ثابت در دایرهٔ $C(O, R)$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

ب) مجموعهٔ نقاطی که اندازهٔ زاویهٔ دید آن‌ها نسبت به دایرهٔ $C(O, R)$ برابر $۶۰^\circ$ است. (منظور از زاویهٔ دید، زاویهٔ بین دو مماس رسم شده از آن نقطه بر دایره است.)




**۲۱۷** نشان دهید مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط $d_۱: ax+by+c=۰$ و $d_۲: ax+by+c'=۰$ به یک فاصله‌اند، خط $ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$ است. $(c \neq c')$

**۲۱۸** پاره‌خط $AB$ به طول ۱۰ ثابت است. مکان هندسی نقاطی مانند $P$ را با هریک از شرط‌های زیر بیابید.

الف) $PA^۲+PB^۲=۲۰۰$ ب) $۲PA^۲+۳PB^۲=۳۰۰$ پ) $PA^۲-PB^۲=۶$

**۲۱۹** تابع $f(x, y)=x^۲+y^۲+ax+by+c$ و نقطهٔ $A(m, n)$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x, y)=۰$ معادلهٔ دایره باشد، نشان دهید:

الف) $A$ درون دایره است اگر و تنها اگر $f(m, n)<۰$.

ب) $A$ روی دایره است اگر و تنها اگر $f(m, n)=۰$.

پ) $A$ بیرون دایره است اگر و تنها اگر $f(m, n)>۰$.

**۲۲۰** اگر $f(x, y)=x^۲+y^۲+ax+by+c$ و نقطهٔ $A(m, n)$ داخل دایرهٔ به معادلهٔ $f(x, y)=۰$ باشد، نشان دهید طول کوتاه‌ترین وتر دایره و گذرنده از $A$ برابر $۲\sqrt{|f(m, n)|}$ است.

**۲۲۱** اگر $f(x, y)=x^۲+y^۲+ax+by+c$ و نقطهٔ $A(m, n)$ خارج از دایرهٔ به معادلهٔ $f(x, y)=۰$ باشد، نشان دهید طول قطعه مماس رسم شده از نقطهٔ $A$ بر این دایره برابر $\sqrt{f(m, n)}$ است.

**۲۲۲** دو دایرهٔ $C: x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ و $C': x^۲+y^۲+mx+ny+p=۰$ مفروض‌اند. نشان دهید اگر دو دایره متقاطع باشند، معادلهٔ خط شامل وتر مشترک آن‌ها تفاضل معادلهٔ دو دایره، یعنی $(a-m)x+(b-n)y+(c-p)=۰$ است.[۱]

**۲۲۳** در هریک از حالت‌های زیر معادله‌های دو خط مماس از نقطهٔ $A$ بر دایرهٔ $C$ را به‌دست آورید.

الف) $C: (x-۵)^۲+y^۲=۸$ و $A(۰, ۰)$ ب) $C: x^۲+y^۲+۴x+۴y=۱۷$ و $A(۵, -۱)$

**۲۲۴** در هریک از حالت‌های زیر، معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از سه نقطهٔ $A$، $B$ و $C$ را بنویسید.

الف) $A(۱, ۳)$، $B(-۳, -۱)$، $C(-۳, ۵)$ ب) $A(۱, -۲)$، $B(۰, -۱)$، $C(-۳, ۰)$

**۲۲۵** معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $A(۳, ۴)$ بگذرد و بر دو خط $d_۱: ۲y-x=۷$ و $d_۲: ۲y-x=-۳$ مماس باشد.

**۲۲۶** سه نقطهٔ $A(۳, ۰)$، $B(۰, ۴)$ و $C(۰, ۰)$ رأس‌های مثلث $ABC$ هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی و دایره‌های محاطی داخلی و خارجی آن را به‌دست آورید.

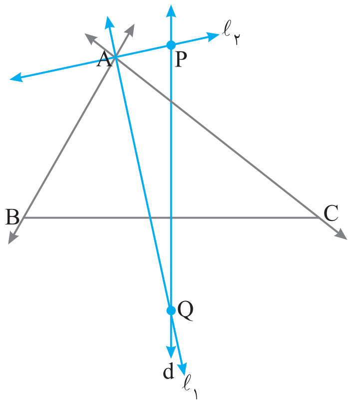
**۲۲۷** معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر محور $x$ها مماس باشد و از دو نقطهٔ $A(۱, ۵)$ و $B(۴, ۲)$ بگذرد.

**۲۲۸** (دایرهٔ آپولونیوس) فرض کنید $A(۱, ۱)$ و $B(۴, ۱)$. مکان هندسی نقاط $P(x, y)$ از صفحه را بیابید که $PA=۲PB$.

---

۱- علاقه‌مندان بدانند که این خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قوت آن‌ها نسبت به دو دایره برابر است. این نتیجه برای هر دو دایره‌ای (نه لزوماً متقاطع) برقرار است. به این خط محور اصلی دو دایره می‌گویند.

حالت دوم: مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست، یعنی دو ضلع AB و AC هم‌اندازه نیستند. اکنون بگویید که اشتراک d با دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ چیست؟ این دو مکان هندسی در چند نقطه اشتراک دارند؟ در این حالت اشتراک دو مکان هندسی، دو نقطهٔ P و Q است (شکل زیر را ببینید).




ب) این قسمت دقت بیشتری می‌طلبد. نقاط مطلوب در شرط‌های زیر صدق می‌کنند:

شرط ۱: از خط‌های شامل AB و AC به یک فاصله‌اند.

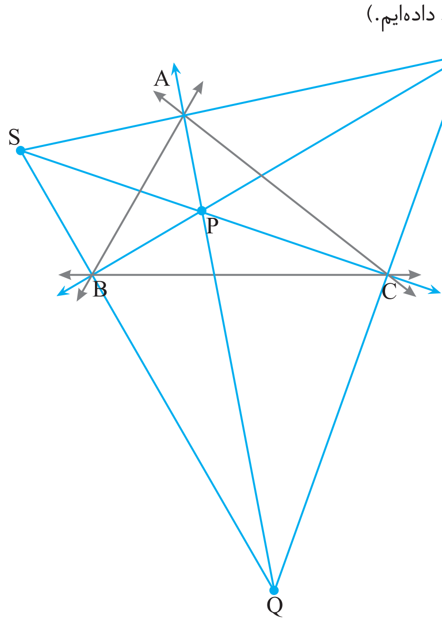
شرط ۲: از خط‌های شامل BC و BA به یک فاصله‌اند.

شرط ۳: از خط‌های شامل CB و CA به یک فاصله‌اند.

تمرین ۱۰۶ (ب) مکان هندسی مربوط به هریک از این شرط‌ها را مشخص می‌کند.

- مکان هندسی شرط ۱ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A در مثلث ABC است.
- مکان هندسی شرط ۲ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ B در مثلث ABC است.
- مکان هندسی شرط ۳ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ C در مثلث ABC است.

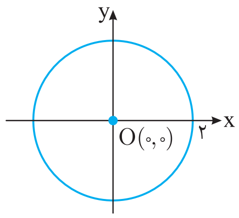
پس کافی است همهٔ نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC را رسم کنیم. از هندسهٔ ۲ می‌دانیم این نیمسازها در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند (نقطه‌های P، Q، R و S). آیا به یاد دارید که نام این نقاط چه بودند؟ در هندسهٔ ۲ آن‌ها را مراکز دایره‌های محاطی داخلی و خارجی می‌نامیدند (I، $I_a$، $I_b$ و $I_c$). هر کدام از این چهار نقطه از خط‌های شامل سه ضلع مثلث به یک فاصله‌اند. (برای جلوگیری از شلوغی شکل، نیمسازها را فقط از یک طرف امتداد داده‌ایم.)



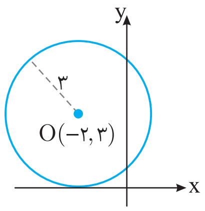

**۱۲۲** معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

الف) $x^۲+y^۲=۴$




ب) $(x+۲)^۲+(y-۳)^۲=۹$




**۱۲۳** الف) چون A روی دایره است، پس $OA=r$.

$$r=OA=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

مرکز دایره نقطهٔ $O(۱,۱)$ و شعاع دایره برابر $\sqrt{۵}$ است. در نتیجه معادلهٔ دایره بدین صورت است:

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵$$

ب) چون AB قطر دایره است، پس وسط آن مرکز و نصف طول آن شعاع دایره است.

$$O(\alpha,\beta)=(\frac{۲+(-۱)}{۲},\frac{۳+۱}{۲})=(\frac{۱}{۲},۲)$$

$$r=\frac{۱}{۲}AB=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(۳-۱)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

پس معادلهٔ دایره بدین‌صورت است:

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲+(y-۲)^۲=\frac{۱۳}{۴}$$

**۱۲۴** همان‌طور که در درس‌نامه بیان شد، باید مربع کامل سازی کنیم. اگر لازم است به مسئلهٔ ۱۱ درس‌نامه مراجعه کنید.

الف)

$$x^۲+y^۲+۲x-۱=۰\Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲=۱+۱$$

$$(x+۱)^۲+y^۲=۲\Rightarrow O(-۱,۰),\quad r=\sqrt{۲}$$

ب)

$$x^۲+y^۲+۳y=۲\Rightarrow x^۲+y^۲+۳y+\frac{۹}{۴}=۲+\frac{۹}{۴}$$

$$x^۲+(y+\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow O(۰,-\frac{۳}{۲}),\quad r=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

پ)

$$x^۲+y^۲-۴x+۵y=-۳\Rightarrow x^۲-۴x+۴+y^۲+۵y+\frac{۲۵}{۴}=-۳+۴+\frac{۲۵}{۴}$$

$$(x-۲)^۲+(y+\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۲۹}{۴}\Rightarrow O(۲,-\frac{۵}{۲}),\quad r=\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$$

ت)

$$x^۲+y^۲-۳x-۷y+۱۰=۰$$

$$x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}+y^۲-۷y+\frac{۴۹}{۴}=-۱۰+\frac{۹}{۴}+\frac{۴۹}{۴}$$

$$(x-\frac{۳}{۲})^۲+(y-\frac{۷}{۲})^۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow O(\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲}),\quad r=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

**۱۲۵** اگر $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ معادلهٔ ضمنی یک دایره باشد، آن‌گاه $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ مرکز و $r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}$ شعاع دایره است.

الف) $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۴y=۳\Rightarrow a=۲,b=-۴,c=-۳$

$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۱,۲)$

$r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۲^{۲}+(-۴)^{۲}-۴(-۳)}}{۲}=\frac{\sqrt{۳۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$

ب) $x^{۲}+y^{۲}-x-۲y-۳=۰\Rightarrow a=-۱,b=-۲,c=-۳$

$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۱}{۲},۱)$

$r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{(-۱)^{۲}+(-۲)^{۲}-۴(-۳)}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

پ) $x^{۲}+y^{۲}+۲x+۳y=۸\Rightarrow a=۲,b=۳,c=-۸$

$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۱,-\frac{۳}{۲})$

$r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۲^{۲}+۳^{۲}-۴(-۸)}}{۲}=\frac{\sqrt{۴۵}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$

ت) $x^{۲}+y^{۲}-x+۳y-۴/۷۵=۰\Rightarrow a=-۱,b=۳,c=-۴/۷۵$

$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۲})$

$r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{(-۱)^{۲}+۳^{۲}-۴(-۴/۷۵)}}{۲}=\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$

**۱۲۶** شاید در ابتدا معادلهٔ ضمنی را به استاندارد تبدیل کرده‌اید. آیا به نظرتان این کار لازم است؟ خیر. برای یافتن مختصات نقطه یا نقطه‌های برخورد دایره با محور xها در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم $y=۰$ و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. به همین ترتیب، برای یافتن مختصات نقطه یا نقطه‌های برخورد دایره با محور yها در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم $x=۰$ و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم.

الف)

$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰\xrightarrow{x=۰}y^{۲}+۴y+۱=۰$

$\Delta=۴^{۲}-۴(۱)(۱)=۱۲\Rightarrow y=\frac{-۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=-۲\pm\sqrt{۳}$

پس $(۰,-۲+\sqrt{۳})$ و $(۰,-۲-\sqrt{۳})$ مختصات نقطه‌های برخورد این دایره با محور yها هستند.

$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰\xrightarrow{y=۰}x^{۲}-۲x+۱=۰$

$(x-۱)^{۲}=۰\Rightarrow x=۱$

پس $(۱,۰)$ مختصات نقطهٔ برخورد دایره با محور xهاست، یعنی محور xها بر این دایره مماس است.

ب)

$x^{۲}+y^{۲}-۳x+y+۲=۰\xrightarrow{x=۰}y^{۲}+y+۲=۰$

$\Delta=۱^{۲}-۴(۱)(۲)=-۷<۰$

این معادله جواب حقیقی ندارد، یعنی چه؟ یعنی دایره با محور yها برخورد ندارد.

$x^{۲}+y^{۲}-۳x+y+۲=۰\xrightarrow{y=۰}x^{۲}-۳x+۲=۰$

$(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱$ یا ۲

پس مختصات نقاط برخورد دایره با محور xها $(۱,۰)$ و $(۲,۰)$ هستند.

پ)

$x^{۲}+y^{۲}-x-۲y=۱\xrightarrow{y=۰}x^{۲}-x-۱=۰$

$\Delta=(-۱)^{۲}-۴(۱)(-۱)=۵\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$

$x^{۲}+y^{۲}-x-۲y=۱\xrightarrow{x=۰}y^{۲}-۲y-۱=۰$

$\Delta=(-۲)^{۲}-۴(۱)(-۱)=۸\Rightarrow y=\frac{۲\pm۲\sqrt{۲}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲}$

پس $(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},۰)$ و $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},۰)$ مختصات نقطه‌های برخورد با محور xها و $(۰,۱+\sqrt{۲})$ و $(۰,۱-\sqrt{۲})$ مختصات نقطه‌های برخورد با محور yها هستند.

**۱۲۷** شرط لازم و کافی برای اینکه رابطهٔ ضمنی $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ مربوط به معادلهٔ دایره باشد این است که $a^{۲}+b^{۲}>۴c$. فقط توجه داشته باشید که باید ضریب‌های $x^{۲}$ و $y^{۲}$ برابر ۱ باشند.

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۵x+۲y+۸=۰\Rightarrow a=-۵,b=۲,c=۸$

$a^{۲}+b^{۲}-۴c=۲۵+۴-۳۲=-۳<۰\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}<۴c$

در نتیجه این رابطه هیچ نقطه‌ای را در صفحه مشخص نمی‌کند و مربوط به دایره نیست.

ب) $۲x^{۲}+۲y^{۲}-۲x-۶y+۵=۰\xrightarrow{\div۲}x^{۲}+y^{۲}-x-۳y+\frac{۵}{۲}=۰$

$a=-۱,b=-۳,c=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c=۱+۹-۴\times\frac{۵}{۲}=۰\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۴c$

بنابراین این رابطه فقط یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند. پس مربوط به یک دایره نیست. توجه کنید که مختصات این نقطه $(۱,\frac{۳}{۲})$ است.

پ) $۳x^{۲}+۳y^{۲}-x+۲y+۱=۰\xrightarrow{\div۳}x^{۲}+y^{۲}-\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}y+\frac{۱}{۳}=۰$

$a=-\frac{۱}{۳},b=\frac{۲}{۳},c=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c=\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۹}-\frac{۴}{۳}=-\frac{۷}{۹}<۰$

$a^{۲}+b^{۲}<۴c$

بنابراین این رابطه مربوط به دایره نیست. در واقع این رابطه هیچ نقطه‌ای از صفحه را نشان نمی‌دهد.

**۱۲۸** برای اینکه رابطهٔ ضمنی $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد، باید $a^{۲}+b^{۲}>۴c$ البته دقت کنید که در این نامساوی a ضریب x است و آن را با aی داده شده در سؤال اشتباه نگیرید.

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۳x+۵y+a=۰\Rightarrow ۹+۲۵>۴a\Rightarrow ۴a<۳۴\Rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$

ب) ابتدا توجه کنید که باید سمت راست تساوی صفر باشد.

$x^{۲}+y^{۲}-۴x+۳y+a-۱=۰\Rightarrow ۱۶+۹>۴(a-۱)\Rightarrow ۴a-۴<۲۵$

$a<\frac{۲۹}{۴}$

پ) $x^{۲}+y^{۲}+۲x+ay+۳=۰\Rightarrow ۴+a^{۲}>۱۲\Rightarrow a^{۲}>۸$

$a>۲\sqrt{۲}$ یا $a<-۲\sqrt{۲}$

ت) $۲x^{۲}+۲y^{۲}+ax-y-۲=۰\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+\frac{a}{۲}x-\frac{۱}{۲}y-۱=۰$

$\frac{a^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۴}>-۴\Rightarrow\frac{a^{۲}+۱۷}{۴}>۰$

توجه کنید که $\frac{a^{۲}+۱۷}{۴}$ همواره مثبت است. پس این رابطه به‌ازای هر عدد حقیقی a مربوط به دایره است.

ث) $x^{۲}+y^{۲}+ax-y+a-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow a^{۲}+۱>۴(a-\frac{۱}{۲})$

$a^{۲}-۴a+۳>۰\Rightarrow a<۱$ یا $a>۳$

**۱۲۹** همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم دو روش برای حل این تمرین وجود دارد.

روش اول (روش کتاب درسی): مختصات مرکز و شعاع دایره را محاسبه کنیم و فاصلهٔ هر نقطه از مرکز را با شعاع دایره مقایسه کنیم.

$$x^۲+y^۲-x+۲y-۵=۰\Rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۱}{۲},-۱)$$

$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱+۴-۴(-۵)}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

روش دوم: از نکته‌ای که در درس‌نامه گفتیم استفاده کنیم. کدام نکته؟

فرض کنید $f(x,y)=x^۲+y^۲-x+۲y-۵$

مختصات هر نقطه را در رابطهٔ $f(x,y)$ قرار می‌دهیم. اگر حاصل منفی شود، نقطه درون دایره است؛ اگر حاصل مثبت شود، نقطه بیرون دایره است؛ و اگر حاصل صفر شود، نقطه روی دایره است.

روش اول:

الف) $OA=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(-۱)^۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}<r\Rightarrow$ A درون دایره است.

ب) $OB=\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۱-(-۱))^۲}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}<r\Rightarrow$ B درون دایره است.

پ) $OC=\sqrt{(۲-\frac{۱}{۲})^۲+(۱-(-۱))^۲}=\frac{۵}{۲}=r\Rightarrow$ C روی دایره است.

ت) $OD=\sqrt{(-۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۱-(-۱))^۲}=\frac{۵}{۲}=r\Rightarrow$ D روی دایره است.

ث) $OE=\sqrt{(۳-\frac{۱}{۲})^۲+(۱-(-۱))^۲}=\frac{\sqrt{۴۱}}{۲}>r\Rightarrow$ E بیرون دایره است.

روش دوم: الف) $f(۰,۰)=-۵<۰\Rightarrow$ A درون دایره است.

ب) $f(۱,۱)=۱+۱-۱+۲\times۱-۵=-۲<۰\Rightarrow$ B درون دایره است.

پ) $f(۲,۱)=۴+۱-۲+۲\times۱-۵=۰\Rightarrow$ C روی دایره است.

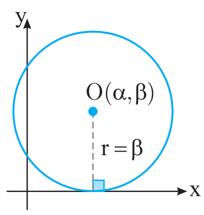
ت) $f(-۱,۱)=۱+۱-(-۱)+۲\times۱-۵=۰\Rightarrow$ D روی دایره است.

ث) $f(۳,۱)=۹+۱-۳+۲\times۱-۵=۴>۰\Rightarrow$ E بیرون دایره است.

**۱۳۰** الف) توجه کنید که چون دایره در ربع اول بر محور xها مماس است، پس $r=\beta$. در نتیجه معادلهٔ استاندارد دایره برابر است با

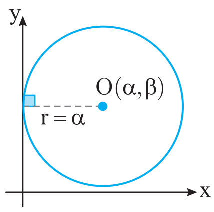
$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\beta^۲$$

و معادلهٔ ضمنی آن بدین صورت است: $x^۲+y^۲-۲\alpha x-۲\beta y+\alpha^۲=۰$




ب) چون دایره در ربع اول بر محور yها مماس است، پس $r=\alpha$. در نتیجه معادلهٔ استاندارد دایره برابر است با $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\alpha^۲$

و معادلهٔ ضمنی آن بدین صورت است: $x^۲+y^۲-۲\alpha x-۲\beta y+\beta^۲=۰$




**۱۳۱** مانند تمرین ۱۲۹ می‌توانیم به دو روش پاسخ دهیم.

روش اول (روش کتاب درسی): طول OA را با r مقایسه می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰\Rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۲)$$

$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲-۴(-۵)}}{۲}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

$OA=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۱-(-۲))^۲}=\sqrt{۵}<r\Rightarrow$ A درون دایره است.

نقطهٔ B همان O، مرکز دایره است. پس درون دایره است.

$OC=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳-(-۲))^۲}=\sqrt{۲۶}>r\Rightarrow$ C بیرون دایره است.

$OD=\sqrt{(۴-۱)^۲+(-۱-(-۲))^۲}=\sqrt{۱۰}=r\Rightarrow$ نقطهٔ D روی دایره است.

روش دوم: فرض کنید $f(x,y)=x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵$.

$f(-۱,-۱)=۱+۱-۲(-۱)+۴(-۱)-۵=-۵<۰\Rightarrow$ A درون دایره است.

$f(۱,-۲)=۱+۴-۲\times۱+۴(-۲)-۵=-۱۰<۰\Rightarrow$ B درون دایره است.

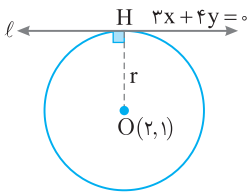
$f(۲,۳)=۴+۹-۲\times۲+۴\times۳-۵=۱۶>۰\Rightarrow$ C بیرون دایره است.

$f(۴,-۱)=۱۶+۱-۲\times۴+۴(-۱)-۵=۰\Rightarrow$ D روی دایره است.

**۱۳۲** الف) ابتدا شکل آن را رسم می‌کنیم (لزومی ندارد که دقیق باشد). اگر H نقطهٔ تماس خط و دایره باشد، چون شعاع OH بر خط مماس $\ell$ عمود است، پس $OH=r$ . به‌نظرتان طول OH را چگونه محاسبه کنیم؟ با استفاده از رابطهٔ فاصلهٔ نقطه از خط.

$$OH=\frac{|۳\times۲+۴\times۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\Rightarrow r=OH=۲$$

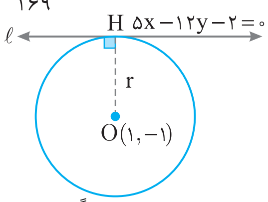
پس معادلهٔ استاندارد دایره بدین صورت است: $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۴$




ب) مشابه قسمت قبل، فرض کنید H نقطهٔ تماس خط و دایره باشد.

$$OH=\frac{|۵\times۱-۱۲\times(-۱)-۲|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۱۵}{۱۳}\Rightarrow r=OH=\frac{۱۵}{۱۳}$$

بنابراین معادلهٔ دایره بدین صورت است: $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۲۲۵}{۱۶۹}$




**۱۳۳** ابتدا شکل سؤال را رسم می‌کنیم (نه لزوماً دقیق). مختصات مرکز دایره داده شده است. پس برای نوشتن معادلهٔ دایره کافی است شعاع دایره را محاسبه کنیم. پس عمود OH را بر خط داده شده رسم می‌کنیم و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

الف) ابتدا طول OH را به‌دست می‌آوریم. بنابر رابطهٔ فاصلهٔ نقطه از خط داریم

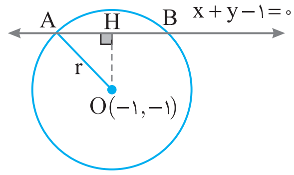
$$OH=\frac{|-۱-۱-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

توجه کنید که OH وتر AB را نصف می‌کند. بنابراین

$$AB=۲\Rightarrow AH=۱$$

$$\triangle OAH: r^۲=OA^۲=AH^۲+OH^۲=۱+\frac{۹}{۲}=\frac{۱۱}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ استاندارد دایره $(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{11}{2}$ است.




ب) همانند قسمت (الف)، ابتدا طول OH را با استفاده از رابطهٔ فاصلهٔ نقطه از خط به‌دست می‌آوریم.

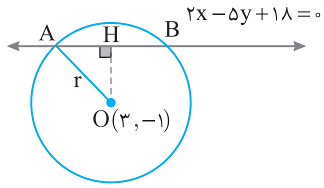
$$OH=\frac{|2\times3-5\times(-1)+18|}{\sqrt{4+25}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$$

چون OH وتر AB را نصف می‌کند، پس

$$AB=6\Rightarrow AH=3$$

$$\triangle OAH: r^2=OA^2=AH^2+OH^2=9+29=38$$

پس معادلهٔ استاندارد دایره $(x-3)^2+(y+1)^2=38$ است.




**۱۳۴** در درس‌نامه بیان کردیم که دو روش برای پاسخ به این نوع سؤالات وجود دارد. روش فاصلهٔ نقطه از خط و روش دلتا. آیا به یاد دارید؟

الف) روش اول (روش فاصلهٔ نقطه از خط): ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

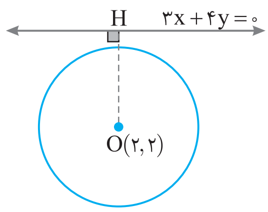
$$x^2+y^2-4x-4y+7=0\Rightarrow a=b=-4,\ c=7$$

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(2,2),\quad r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16+16-4\times7}}{2}=1$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $3x+4y=0$ را با r مقایسه می‌کنیم.

$$OH=\frac{|3\times2+4\times2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{14}{5}\Rightarrow OH>r$$

چون $OH>r$، پس خط و دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند.




روش دوم (روش دلتا): باید تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر را تعیین کنیم:

$$\begin{cases}3x+4y=0\\ x^2+y^2-4x-4y+7=0\end{cases}$$

چگونه این دستگاه را حل می‌کنید؟ می‌توانیم از معادلهٔ اول y را بر حسب x محاسبه کنیم و در معادلهٔ دوم جایگذاری کنیم. از معادلهٔ اول داریم $y=-\frac{3}{4}x$. پس

$$x^2+y^2-4x-4y+7=0\Rightarrow x^2+(-\frac{3}{4}x)^2-4x-4(-\frac{3}{4}x)+7=0$$

$$x^2+\frac{9}{16}x^2-4x+3x+7=0\Rightarrow\frac{25}{16}x^2-x+7=0$$

$$\xrightarrow{\times16}25x^2-16x+112=0$$

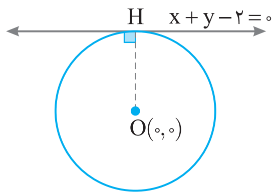
$$\Delta=(-16)^2-4(25)(112)=256-11200=-10944<0$$

بنابراین دستگاه معادلات بالا جواب ندارد. یعنی چه؟ یعنی خط و دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

ب) روش اول (روش فاصلهٔ نقطه از خط): در دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2=2$، مرکز $O(0,0)$ و شعاع $r=\sqrt{2}$ است.

$$OH=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow OH=r$$

چون $OH=r$، پس خط بر دایره مماس است.




روش دوم (روش دلتا): دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2=2\end{cases}$$

از معادلهٔ اول $y=2-x$. پس

$$x^2+y^2=2\Rightarrow x^2+(2-x)^2=2\Rightarrow x^2+4-4x+x^2=2$$

$$2x^2-4x+2=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=2-1=1$$

بنابراین دستگاه معادلات بالا فقط یک جواب $(1,1)$ دارد. یعنی چه؟ یعنی خط و دایره فقط یک نقطه برخورد دارند و در نتیجه خط بر دایره مماس است.

پ) روش اول (روش فاصلهٔ نقطه از خط): ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

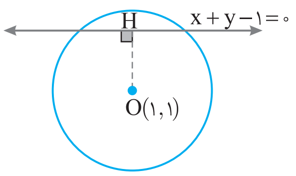
$$x^2+y^2-2x-2y=2\Rightarrow a=b=c=-2$$

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,1),\quad r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4+4-4(-2)}}{2}=2$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $x+y-1=0$ را با r مقایسه می‌کنیم.

$$OH=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OH<r$$

چون $OH<r$، پس دایره و خط متقاطع‌اند.




روش دوم (روش دلتا): باید تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر را مشخص کنیم:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x^2+y^2-2x-2y=2\end{cases}$$

با جایگذاری $y=1-x$ در معادلهٔ دوم داریم

$$x^2+(1-x)^2-2x-2(1-x)=2\Rightarrow x^2+1-2x+x^2-2x-2+2x=2$$

$$2x^2-2x-3=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4(2)(-3)=28\Rightarrow x=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

چون این معادله دارای دو جواب است، پس خط و دایره متقاطع‌اند. مختصات نقطه‌های برخورد آن‌ها چیست؟

### بحث دربارهٔ تعداد جواب‌های دستگاه دومعادله و دومجهولی

| دترمینان ماتریس ضرایب | $\|A\| \neq 0$ | $\|A\| = 0$ | $\|A\| = 0$ |
|---|---|---|---|
| رابطهٔ بین ضرایب | $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ | $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ | $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ |
| وضعیت هندسی دو خط $\ell_1$ و $\ell_2$ | $\ell_1$ $\ell_2$ | $\ell_1$ $\ell_2$ | $\ell_1, \ell_2$ |
| وضعیت دو خط $\ell_1$ و $\ell_2$ | متقاطع | موازی | یک خط هستند (منطبق) |
| تعداد جواب‌ها | یک $X = A^{-1}B$ | صفر | بی‌شمار |

## فصل دوم در یک قاب

### تعریف‌ها

سطح مخروطی (رویهٔ مخروطی) (ص ۶۰)

سطح استوانه‌ای (رویهٔ استوانه‌ای) (ص ۶۲)

مکان هندسی (ص ۶۳)

عمودمنصف پاره‌خط (ص ۶۴)

نیمساز زاویه (ص ۶۵)

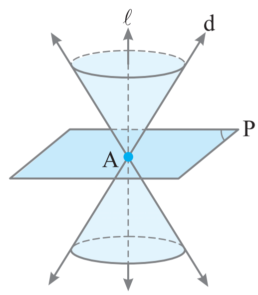
دایره (ص ۶۹)

بیضی (ص ۸۳)

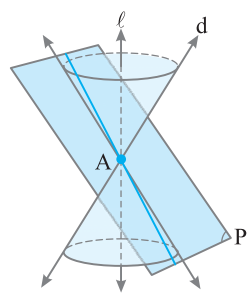
سهمی (ص ۹۶)

### مقاطع مخروطی

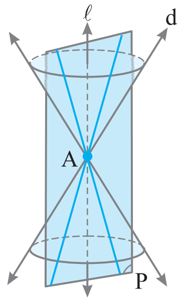
۱ یک نقطه - صفحه از رأس سطح مخروطی می‌گذرد و هیچ اشتراک دیگری با آن ندارد.



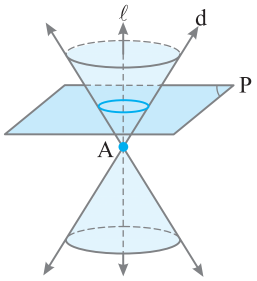

۲ یک خط - صفحه فقط شامل یک مولد سطح مخروطی است.



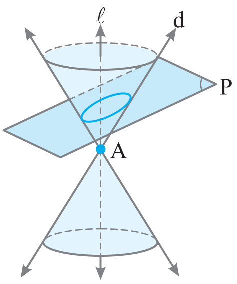

۳ دو خط متقاطع - صفحه شامل دو مولد سطح مخروطی است یا صفحه شامل محور سطح مخروطی است.



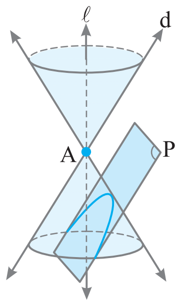

۴ دایره - صفحه بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن نمی‌گذرد.



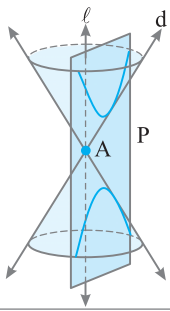

۵ بیضی - صفحه بر محور سطح مخروطی عمود نیست، با هیچ مولدی موازی نیست و تنها یکی از دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.




۶ سهمی - صفحه با مولد سطح مخروطی موازی است و تنها یکی از دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.

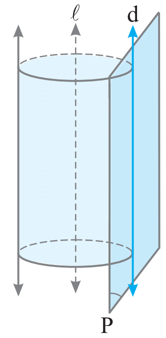



۷ هذلولی - صفحه هر دو نیمهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع می‌کند و شامل محور نیست.

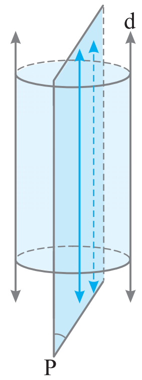


## مقاطع سطح استوانه‌ای

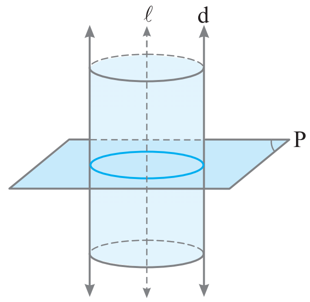
۱ یک خط – صفحه فقط شامل یک مولد سطح استوانه‌ای است.



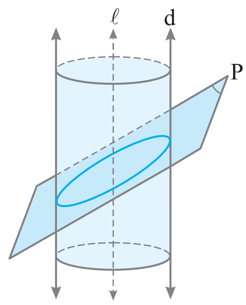

۲ دو خط موازی – صفحه شـامل محور یا موازی با محور است به طوری که شامل دو مولد است.




۳ دایره – صفحه عمود بر محور است.




۴ بیضی – صفحه عمود بر محور نیسـت، شـامل هیچ مولدی نیست و سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند.




## مکان هندسی‌های مهم[1]

۱ مـکان هندسـی نقاطـی کـه از دو سـر پاره‌خـط بـه یـک فاصله‌اند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

۲ مـکان هندسـی نقاطی کـه از دو ضلع یـک زاویه به یـک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

۳ مـکان هندسـی نقاطی کـه از یک نقطـهٔ ثابت O به فاصلـهٔ ثابت k هستند، دایرهٔ به مرکز O و شعاع k است.

۴ مـکان هندسـی نقاطی کـه از دو خط موازی به یـک فاصله‌اند، خطی موازی و در وسط آن‌ها است.

۵ مکان هندسـی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ثابت k هسـتند، دو خط موازی با d، به فاصلهٔ k از آن و در دو طرف آن است.

۶ مکان هندسـی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، دو خط عمود بر هم است (نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط).

## کاربرد مکان هندسی

شما باید بتوانید با استفاده از مکان هندسی به مسئله‌هایی که به صورت زیر هستند، پاسخ دهید.

- نقطه‌هایـی را بیابیـد که شـرط ۱ و شـرط ۲ را دارنـد. در مورد تعداد جواب‌ها بحث کنید.

## معادلهٔ دایره

۱ معادلهٔ استاندارد دایره

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ , \quad O(\alpha,\beta)$$

۲ معادلهٔ ضمنی دایره

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}), \quad r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$$

## نکته

رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ :

۱ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲-۴c>۰$.

۲ نشان دهندهٔ تنها یک نقطه است اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲=۴c$.

۳ هیچ نقطه‌ای را مشخص نمی‌کند اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲<۴c$.

## باید بتوانید

۱ وضعیت نقطه و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

۲ وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

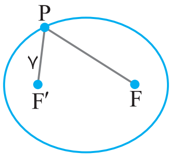
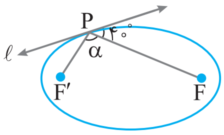
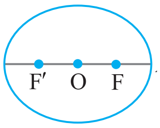
۳ وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

۱– همهٔ مکان هندسی‌ها در یک صفحه فرض شده‌اند که از بیان آن صرف نظر کرده‌ایم.

# نمونه سؤالات امتحانی فصل دوم

صفحات پاسخ: ۳۰۶ تا ۳۱۵

| ردیف | سؤالات | نمره |
| --- | --- | --- |
| ۱ | **مفاهیم زیر را تعریف کنید.**<br>**الف)** دایره **ب)** بیضی **پ)** سهمی<br>**ت)** سطح استوانه‌ای **ث)** سطح مخروطی | ۲/۵ |
| ۲ | **درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.**<br>**الف)** اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد، سطح مقطع آن نقطه یا دایره است.<br>**ب)** اگر صفحه شامل محور سطح استوانه‌ای باشد، سطح مقطع آن مستطیل است<br>**پ)** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $d$ به فاصلهٔ $5cm$ هستند، خطی موازی با $d$ است.<br>**ت)** شعاع دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ برابر ۱ است.<br>**ث)** معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+3x-5y+10=0$ مربوط به دایره است.<br>**ج)** هرچه خروج از مرکز بیضی به ۱ نزدیک‌تر شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود.<br>**چ)** در سهمی فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر با فاصلهٔ کانونی است.<br>**ح)** سطح مقطع یک سطح استوانه‌ای نمی‌تواند نقطه باشد. | ۲ |
| ۳ | **جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.**<br>**الف)** اگر صفحهٔ $P$ با مولد $d$ موازی باشد، آن‌گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی ......... است.<br>**ب)** اگر صفحهٔ $P$ هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، آن‌گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی ......... است.<br>**پ)** اگر صفحهٔ $P$ شامل محور سطح مخروطی باشد، آن‌گاه سطح مقطع آن ......... است.<br>**ت)** اگر صفحهٔ $P$ شامل محور سطح استوانه‌ای باشد، آن‌گاه سطح مقطع آن ......... است.<br>**ث)** نیمساز زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .........<br>**ج)** عمودمنصف پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .........<br>**چ)** دایرهٔ $C(O,R)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .........<br>**ح)** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $d$ به فاصلهٔ ثابت $k$ هستند، ......... است.<br>**خ)** اگر دو خط $d$ و $\ell$ موازی باشند، از دوران $d$ حول $\ell$ ......... ایجاد می‌شود.<br>**د)** مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه که در نقطهٔ $A$ بر خط $d$ مماس‌اند، ......... است.<br>**ذ)** مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه با شعاع ثابت $r$ که بر خط $d$ مماس‌اند، ......... است.<br>**ر)** مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه با شعاع ثابت $r$ که بر دایرهٔ $C(O,r)$ مماس‌اند، ......... است.<br>**ز)** مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه با شعاع ۱ که بر دایرهٔ $C(O,4)$ مماس داخل‌اند، ......... است.<br>**ژ)** رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مربوط به نقطه است هرگاه .........<br>**س)** معادلهٔ دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $r$ به صورت ......... است.<br>**ش)** اگر رابطهٔ $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ مربوط به دایره باشد، آن‌گاه حدود $a$ به صورت ......... است.<br>**ص)** مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌های گذرنده از نقطهٔ $A$ و مماس بر خط $\ell$ ......... است (نقطهٔ $A$ روی خط $\ell$ نیست).<br>**ض)** بازتاب هر پرتو نوری که از یک کانون بیضی به بدنهٔ داخلی و آینه‌ای آن می‌تابد، از ......... می‌گذرد.<br>**ط)** بازتاب هر پرتو نوری که موازی با محور به بدنهٔ داخلی و آینه‌ای سهمی می‌تابد، از ......... می‌گذرد. | ۹/۵ |

| ردیف | سؤالات | نمره |
|---|---|---|
| ۴ | **جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید.**<br>**الف)** مختصات مرکز دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-3y+1=0$ برابر ......... است.<br>**ب)** شعاع دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+3x-y+2=0$ برابر ......... است.<br>**پ)** مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ به ترتیب ......... و ......... است.<br>**ت)** در بیضی با طول قطرهای کوچک و بزرگ ۶ و ۸ فاصلهٔ کانونی برابر ......... است.<br>**ث)** در بیضی با طول قطرهای کوچک و بزرگ ۸ و ۱۰ خروج از مرکز برابر ......... است.<br>**ج)** در بیضی مقابل طول قطر بزرگ برابر ۲۰ است. اندازهٔ PF برابر ......... است.<br><br>**چ)** در بیضی مقابل مقدار $\alpha$ برابر ......... درجه است.<br><br>**ح)** در بیضی مقابل $OF=FA$. خروج از مرکز برابر ......... است.<br><br>**خ)** در بیضی با طول قطر بزرگ ۱۰ و فاصلهٔ کانونی ۸، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی تا یک کانون برابر ......... است.<br>**د)** فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^2=-3x$ برابر ......... است. | ۵/۵ |
| ۵ | **فرض کنید صفحهٔ P یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع‌های حاصل بحث کنید.** | ۲/۲۵ |
| ۶ | **نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).** | ۱/۵ |
| ۷ | **نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).**<br>خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۵ |
| ۸ | **نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.)**<br>دی ۱۴۰۲ | ۱/۵ |
| ۹ | **دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد.**<br>شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۵ |
| ۱۰ | **معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $O(2,-1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.** | ۲ |
| ۱۱ | **در دایرهٔ به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مختصات مرکز و شعاع را بیابید.** | ۱ |
| ۱۲ | **کدام‌یک از رابطه‌های ضمنی زیر مربوط به دایره است؟ کدام معرف یک نقطه است؟ کدام شامل هیچ نقطه‌ای از صفحه نیست؟**<br>**الف)** $x^2+y^2-x+3y=-3$ **ب)** $x^2+y^2+2x-7y=-13$<br>**پ)** $2x^2+2y^2+6x+10y+17=0$ | ۱/۷۵ |
| ۱۳ | **در هریک از موارد زیر حدود a را طوری تعیین کنید که رابطهٔ داده شده مربوط به دایره باشد.**<br>**الف)** $x^2+y^2-4x+5y+a=0$ **ب)** $2x^2+2y^2-x+2y+a=0$ | ۱/۲۵ |
| ۱۴ | **معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $O(1,-1)$ و گذرنده از نقطهٔ $A(-3,1)$ را بنویسید.** | ۰/۷۵ |
| ۱۵ | **معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $O(-1,2)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $3x-4y=-1$ را بنویسید.** | ۰/۷۵ |
| ۱۶ | **وضعیت هریک از نقطه‌های $A(1,-1)$، $B(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$ و $C(0,1)$ را نسبت به دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+3x-5y+4=0$ تعیین کنید.** | ۲/۷۵ |
| ۱۷ | **معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(0,1)$ را بنویسید که روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ ایجاد می‌کند.** | ۱/۲۵ |

# امتحان نیم‌سال اول (۳)

صفحات پاسخ: ۳۲۰ تا ۳۲۲

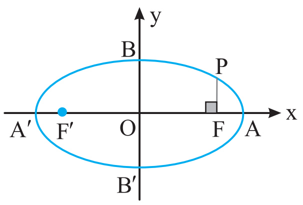
| امتحان نهایی: **هندسهٔ ۳** | رشته: **ریاضی و فیزیک** | **تألیفی** | مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه** |
|---|---|---|---|

| ردیف | سؤالات | نمره |
|---|---|---|
| | **سؤالات فصل اول** | |
| ۱ | الف) اگر $A=[i+j]_{۲×۲}$، آن‌گاه $\|A\|$ برابر ......... است.<br>ب) اگر $AB=\bar{O}$، آن‌گاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. (درست - نادرست)<br>پ) اگر $\|A_{۲×۲}\|=-۲$، آن‌گاه $\|۲A^{-۱}\|$ برابر ......... است.<br>ت) اگر یک سطر ماتریس $۳×۳$ را $k$ برابر کنیم، دترمینان $k$ برابر می‌شود. (درست - نادرست) | ۱ |
| ۲ | اگر $A=[j-i]_{۲×۲}$، آن‌گاه $A^{۱۴۰۴}$ را به دست آورید. | ۱/۵ |
| ۳ | فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} a & b+۲ \\ -a-۱ & -۶ \end{bmatrix}$ و $AB$ یک ماتریس قطری باشد. مقدار $a+b$ را به‌دست آورید. | ۱/۷۵ |
| ۴ | اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\|A^۲+I\|$ را به‌دست آورید. | ۱/۲۵ |
| ۵ | در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس $X$ را به‌دست آورید. | ۱/۲۵ |
| ۶ | مقدار $m$ را طوری بیابید که دستگاه دومعادله و دومجهولی $\begin{cases} ۲x-my=۱۰ \\ (m+۱)x-۳y=۷ \end{cases}$ جواب یکتا داشته باشد. | ۱ |
| ۷ | اگر $A$ یک ماتریس $۳×۳$ باشد و $\|A\|=۲$، آن‌گاه حاصل عبارت $\|-۳A\|+\|A^{-۱}\|$ را به دست آورید. | ۱/۲۵ |
| ۸ | اگر $A=\begin{bmatrix} \|A\|-۱ & -\|A\|-۱ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\|-۲A\|$ را به‌دست آورید. | ۱ |
| | **سؤالات فصل دوم** | |
| ۹ | الف) اگر صفحهٔ $P$ شامل مولد سطح استوانه‌ای باشد، فصل مشترک صفحه و سطح استوانه‌ای ......... است.<br>ب) مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌های با شعاع $r$ و مماس بر خط $d$ ......... است.<br>پ) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ ثابت $A$ و $B$ به یک فاصله‌اند، ......... است.<br>ت) نقطهٔ $A(۱,-۱)$ درون دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۳y+۱=۰$ قرار دارد. (درست - نادرست) | ۱/۲۵ |
| ۱۰ | نقاط $A$، $B$، $C$ و $D$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از $C$ و $D$ نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید). | ۱/۵ |
| ۱۱ | حدود $a$ را طوری تعیین کنید که رابطهٔ $x^۲+y^۲+۵x-۷y+a=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد. | ۰/۷۵ |
| ۱۲ | معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(-۲,۲)$ مرکز آن و بر خط به معادلهٔ $-۳x+۴y+۱=۰$ مماس باشد. سپس مختصات نقطه‌های برخورد این دایره و محور $x$ها را بیابید. | ۱/۵ |
| ۱۳ | وضعیت دو دایرهٔ $C:x^۲+y^۲-۳x+۲y=\frac{۲۳}{۴}$ و $C':x^۲+y^۲+۵x-۴y=\frac{۲۳}{۴}$ را نسبت به هم تعیین کنید. | ۱/۷۵ |
| ۱۴ | نقاط $A(-۱,-۱)$، $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رأس‌های مثلث $ABC$ هستند.<br>الف) معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث $ABC$ را بنویسید. ب) معادلهٔ خط مماس بر این دایره در رأس $B$ را بنویسید. | ۱/۵ |
| ۱۵ | معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ باشد و با دایرهٔ $C':x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس داخل باشد. | ۱/۷۵ |
| | موفق و سربلند باشید — جمع نمره | ۲۰ |

# امتحان جامع (۱)

صفحات پاسخ: ۳۲۲ تا ۳۲۳

| امتحان نهایی: هندسهٔ ۳ | رشته: ریاضی و فیزیک | تألیفی | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
|---|---|---|---|

| ردیف | سؤالات | نمره |
|---|---|---|
| | **سؤالات فصل اول** | |
| ۱ | الف) برای هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ $A$ و $B$ اگر $AB=\bar{O}$، آن‌گاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. (درست - نادرست)<br>ب) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ برابر ......... است. | ۰/۵ |
| ۲ | اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به‌طوری که $a_{ij}=\begin{cases} i^۲ & i<j \\ ۰ & i=j \\ -۱ & i>j \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lvert A^۲+۲I\rvert$ را به‌دست آورید. | ۱/۲۵ |
| ۳ | به‌ازای چه مقادیری از $m$ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۹ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m+۲ & ۹ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند. | ۱/۲۵ |
| ۴ | به‌ازای چه مقدارهایی از $m$ دستگاه معادلات $\begin{cases} -(m+۱)x+۲y=۳ \\ mx-(m-۱)y=۴ \end{cases}$ جواب یکتا دارد. | ۱/۲۵ |
| ۵ | فرض کنید $A$ یک ماتریس $۳\times ۳$ باشد و $\lvert A\rvert=-۲$. حاصل عبارت $\dfrac{\lvert ۲A^{-۱}\rvert}{\lvert ۳A\rvert+\lvert A^۲\rvert}$ را به‌دست آورید. | ۱/۷۵ |
| | **سؤالات فصل دوم** | |
| ۶ | الف) اگر صفحه‌ای شامل یک محور سطح مخروطی باشد، فصل مشترک حاصل ......... است.<br>ب) هرچه خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر شود، بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود. (درست - نادرست)<br>پ) در سهمی، بازتاب هر پرتو نوری که موازی محور سهمی به بدنهٔ داخلی و آینه‌ای آن بتابد، از ......... می‌گذرد. | ۰/۷۵ |
| ۷ | دو نقطهٔ $A$ و $B$ و خط $d$ که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و از خط $d$ به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد.<br>شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۵ |
| ۸ | معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $d_۱: x+y=۱$ و $d_۲: ۲x-y=-۷$ شامل قطرهایی از آن هستند و بر خط $\ell: ۳x-۴y=۲$ مماس است. | ۱/۲۵ |
| ۹ | به‌ازای چه مقادیری از $m$ دو دایرهٔ $C:(x+۱)^۲+y^۲=۹$ و $C': x^۲+y^۲+۲x+۲y+m=۰$ مماس داخل‌اند. | ۱/۵ |
| ۱۰ | در بیضی مقابل $A(۴,۰)$ و $A'(-۴,۰)$ دو سر قطر بزرگ و $F(۳,۰)$ و $F'(-۳,۰)$ کانون‌ها هستند. طول پاره‌خط $PF$ را که بر قطر بزرگ عمود است، به‌دست آورید.<br><br> | ۱/۲۵ |
| ۱۱ | سهمی به معادلهٔ $y^۲+۶y+۴x=۰$ داده شده است. مختصات رأس و کانون این سهمی و معادلهٔ خط هادی آن را به‌دست آورید. | ۱/۲۵ |
| ۱۲ | سهمی $P$ با کانون $F$ و خط هادی $d$ مفروض است. نشان دهید مرکز هر دایره که از $F$ بگذرد و بر خط $d$ مماس باشد، روی سهمی است. | ۰/۵ |

**۲۲** الف)

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ (۰/۵)

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$$ (۰/۲۵)

$$=\begin{bmatrix}-2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-4\\4&5\end{bmatrix}$$ (۰/۵)

ب)

$$\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\ -\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ (۰/۵)

$$A\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}^{-1}$$ (۰/۲۵)

$$=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1\\ -\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19&-8\\-26&-11\end{bmatrix}$$ (۰/۵)

## پاسخنامهٔ نمونه سؤالات امتحانی فصل دوم

**۱** الف) دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت در همان صفحه به فاصله‌ای معین باشند. (۰/۵)

ب) بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت در همان صفحه یک مقدار ثابت باشد. (۰/۵)

پ) سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند. (۰/۵)

ت) فرض کنید $d$ و $\ell$ دو خط موازی باشند. سطح حاصل از دوران $d$ حول $\ell$ را یک سطح استوانه‌ای (رویهٔ استوانه‌ای) می‌نامند. (۰/۵)

ث) فرض کنید $d$ و $\ell$ دو خط متقاطع غیرعمود باشند. سطح حاصل از دوران $d$ حول $\ell$ را یک سطح مخروطی (رویهٔ مخروطی) می‌نامند. (۰/۵)

**۲** الف) درست (۰/۲۵) – اگر صفحه از رأس سطح مخروطی بگذرد، سطح مقطع آن نقطه و در غیر این صورت، سطح مقطع آن دایره است.

ب) نادرست (۰/۲۵) – اگر صفحه شامل محور سطح استوانه‌ای باشد، سطح مقطع آن دو خط موازی است. سطح مقطع سطح استوانه‌ای هرگز نمی‌تواند مستطیل باشد.

پ) نادرست (۰/۲۵) – این مکان هندسی دو خط موازی با $d$ در دو طرف و به فاصلهٔ $5cm$ از آن است.

ت) درست (۰/۲۵) $r=\dfrac{\sqrt{2^2+(-2)^2-4\times 1}}{2}=1$

ث) نادرست (۰/۲۵) $a^2+b^2-4c=9+25-100<0$

ج) درست (۰/۲۵)

چ) نادرست (۰/۲۵) – در سهمی فاصلهٔ کانون تا خط هادی دو برابر فاصلهٔ کانونی است.

ح) درست (۰/۲۵) – سطح مقطع‌های یک سطح استوانه‌ای عبارت‌اند از یک خط، دو خط موازی، دایره و بیضی.

**۳** الف) سهمی (۰/۵)

ب) هذلولی (۰/۵)

پ) دو خط متقاطع (۰/۵)

ت) دو خط موازی (۰/۵)

ث) از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند. (۰/۵)

ج) از دو سر پاره‌خط به یک فاصله هستند. (۰/۵)

چ) از نقطهٔ $O$ به فاصلهٔ ثابت $R$ هستند. (۰/۵)

ح) دو خط موازی با $d$ در دو طرف آن و به فاصلهٔ $k$ از آن (۰/۵)

خ) سطح استوانه‌ای (۰/۵)

د) خطی عمود بر $d$ در نقطهٔ $A$ (غیر از $A$) (۰/۵)

ذ) دو خط موازی با $d$ در دو طرف آن و به فاصلهٔ $r$ از آن (۰/۵)

ر) دایرهٔ به مرکز $O$ و شعاع $2r$ یا $C(O,2r)$ (۰/۵)

ز) دایرهٔ به مرکز $O$ و شعاع ۳ یا $C(O,3)$ (۰/۵)

ژ) $a^2+b^2=4c$ (۰/۵)

س) $x^2+y^2=r^2$ (۰/۵)

ش) $a<\dfrac{17}{2}$ (۰/۵) $\quad a^2+b^2>4c\Rightarrow 9+25>4a\Rightarrow a<\dfrac{17}{2}$

ص) سهمی با کانون $a$ و خط هادی $\ell$ (۰/۵)

ض) کانون دیگر بیضی (۰/۵)

ط) کانون سهمی (۰/۵)

**۴** الف) $(-1,2)$ (۰/۵)

$$x^2+y^2+2x-3y+1=0\Rightarrow (x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}\Rightarrow O(-1,\frac{3}{2})$$

ب) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (۰/۵)

$$x^2+y^2+3x-y+2=0\Rightarrow r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{9+1-8}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پ) $(-1,2)$ (۰/۵) - ۲ (۰/۵)

$$x^2+y^2+2x-4y+1=0\Rightarrow\begin{cases}O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-1,2)\\ r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4+16-4}}{2}=2\end{cases}$$

ت) $2\sqrt{7}$ (۰/۵)

$$\text{قطر بزرگ}=8\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4,\quad \text{قطر کوچک}=6\Rightarrow 2b=6\Rightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 4^2=3^2+c^2\Rightarrow c=\sqrt{7}\Rightarrow 2c=2\sqrt{7}$$

ث) $\dfrac{3}{5}$ (۰/۵)

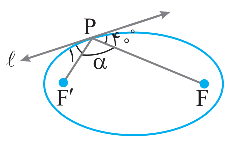
$$\text{قطر بزرگ}=10\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5,\quad \text{قطر کوچک}=8\Rightarrow 2b=8\Rightarrow b=4$$

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 5^2=4^2+c^2\Rightarrow c=3\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$$

ج) ۱۳ (۰/۵) $\quad PF+PF'=2a\Rightarrow PF+7=20\Rightarrow PF=13$

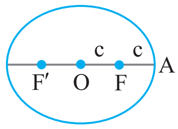
چ) ۱۰۰ (۰/۵) – بنابر ویژگی آینه‌ای بیضی داریم $\hat{P}_1=40^\circ$ . پس

$$\hat{P}_1+\alpha+40^\circ=180^\circ\Rightarrow \alpha+80^\circ=180^\circ\Rightarrow \alpha=100^\circ$$



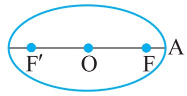
ح) $\frac{۱}{۲}$ (۰/۵)

$$OA=۲OF\Rightarrow a=۲c\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$




خ) ۲ (۰/۵)

$$\begin{cases}۲a=۱۰\Rightarrow a=۵\\ ۲c=۸\Rightarrow c=۴\end{cases}\Rightarrow AF=a-c=۵-۴=۱$$




د) $\frac{۳}{۴}$ (۰/۵)

$$y^۲=-۳x\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

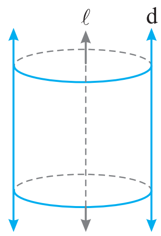
**۵** فرض کنید $\ell$ محور و d مولد این سـطح استوانه‌ای باشد. (۰/۲۵) چهار حالت پدید می‌آید:

حالت اول: اگر صفحهٔ P شامل d و موازی با $\ell$ باشد، سطح مقطع یک خط است. (۰/۵)

حالت دوم: اگر صفحهٔ P شامل d و $\ell$ باشد، سطح مقطع دو خط موازی است. (۰/۵)

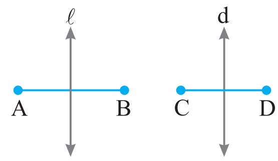
حالت سوم: اگر صفحهٔ P عمود بر $\ell$ باشد، سطح مقطع دایره است. (۰/۵)

حالت چهارم: اگر صفحهٔ P متقاطع و غیرعمود بر $\ell$ باشـد، سـطح مقطع بیضی است. (۰/۵)

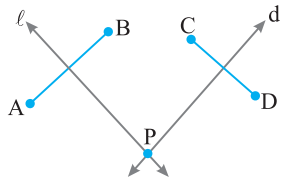



**۶** مـکان هندسـی نقاطـی از صفحـه کـه از A و B بـه یـک فاصله‌انـد، عمودمنصـف پاره‌خـط AB اسـت (خـط $\ell$). (۰/۲۵) مکان هندسـی نقاطی از صفحه که از C و D به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط CD است (خط d). (۰/۲۵) اشتراک $\ell$ و d جواب مسئله است. (۰/۲۵) سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

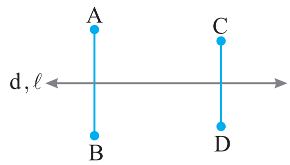
حالت اول: $\ell$ و d موازی‌اند. در این صورت مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)




حالت دوم: $\ell$ و d متقاطع‌اند. در این صورت مسئله یک جواب دارد. (۰/۲۵)

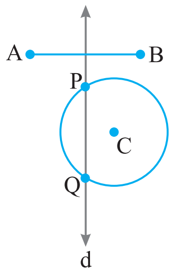



حالت سـوم: $\ell$ و d یک خط هسـتند. در این صورت مسـئله بی‌شـمار جواب دارد. (۰/۲۵)

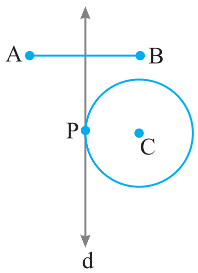



**۷** مـکان هندسـی نقاطـی کـه از A و B به یـک فاصله‌انـد، عمودمنصف پاره‌خـط AB اسـت. (۰/۲۵) مکان هندسـی نقاطی کـه از C به فاصلهٔ ۳cm هسـتند، دایرهٔ به مرکز C و شعاع ۳cm اسـت. (۰/۲۵) پس نقطه یا نقطه‌های برخورد خط عمودمنصف (d) و دایره جواب مسـئله اسـت. (۰/۲۵) سـه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

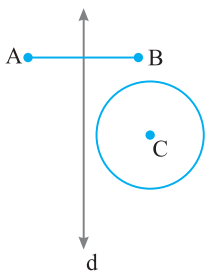
حالت اول: اگـر خـط عمودمنصف و دایـره یکدیگر را در دو نقطـه قطع کنند، مسئله دو جواب دارد. (۰/۲۵)




حالت دوم: اگر خط عمودمنصف و دایره یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند (خط بر دایره مماس باشد)، مسئله یک جواب دارد. (۰/۲۵)

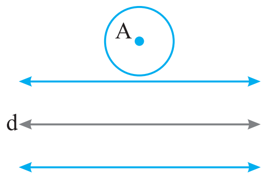



حالت سـوم: اگر خـط عمودمنصف و دایره یکدیگر را قطع نکنند، مسـئله جواب ندارد. (۰/۲۵)




**۸** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A به فاصلهٔ ۳cm باشند، دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۳cm است. (۰/۲۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از d به فاصلهٔ ۴cm باشـند، دو خط موازی با d، در طرفین خط d و به فاصلهٔ ۴cm از آن هسـتند. (۰/۵) اشـتراک دو مکان هندسـی را در نظر می‌گیریم. سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول: اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، مسئله جوابی نخواهد داشت. (۰/۲۵)




حالت دوم: اگر دایره بر یکی از دو خط موازی مماس باشـد، مسـئله یک جواب دارد. (۰/۲۵)