کتاب‌های سه‌بعدی

آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضیات گسسته

علیرضا علی‌پور

۱۲

نشر الگو

فصل سوم

ترکیبات (شمارش)

فصل سوم

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

در سال‌های قبل با اصول و روش‌های اولیهٔ شمارش آشنا شده‌اید. با حل چند مسئله این روش‌ها را یادآوری می‌کنیم.

مسئله ۱

در مجاورت دیوار حیاط مدرسه یازده صندلی در یک ردیف چیده شده است.

الف) پنج دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و شش دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند؟

ب) در چند حالت یازدهمی‌ها کنار یکدیگر قرار دارند؟

پ) در چند حالت دانش‌آموزان هر پایه کنار یکدیگر قرار دارند؟

ت) در چند حالت هیچ دو دانش‌آموزی از یک پایه کنار یکدیگر قرار ندارند؟

ث) در چند حالت هیچ دو دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم کنار یکدیگر قرار ندارند؟

ج) در چند حالت هر دانش‌آموز از پایهٔ یازدهم دقیقاً با یک دانش‌آموز از پایهٔ خودش مجاور است؟

راه‌حل برای سادگی دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم را با D و دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را با Y نشان می‌دهیم.

الف) پاسخ برابر تعداد جایگشت‌های یازده شیء متمایز

$$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$$

یعنی برابر $11!$ است.

ب) یازدهمی‌ها را در یک بسته به عنوان یک شیء در نظر می‌گیریم. این بسته به همراه پنج دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم، شش شیء متمایزند. بنابراین تعداد جایگشت‌های آنها برابر $6!$ است. توجه کنید که برای هر روش قرار دادن این شش شیء کنار یکدیگر، شش دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را به $6!$ طریق می‌توانیم در بستهٔ خود با یکدیگر جابه‌جا کنیم. در نتیجه پاسخ برابر $6! \times 6!$ است.

$$\underbrace{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, \underbrace{\boxed{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6}}_{6!}}_{6!}$$

پ) دانش‌آموزان هر پایه را در یک بسته به عنوان یک شیء در نظر می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های این دو بسته برابر $2!$ است و برای هر روش قرار دادن این دو بسته در کنار یکدیگر دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم را به $5!$ طریق و دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را به $6!$ طریق می‌توانیم در بستهٔ خود با یکدیگر جابه‌جا کنیم. بنابراین پاسخ برابر $6! \times 5! \times 2!$ است.

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5}}_{5!}, \underbrace{\boxed{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6}}_{6!}}_{2!}$$

ت) چون تعداد دانش‌آموزان پایه‌های یازدهم و دوازدهم به ترتیب برابر ۶ و ۵ است، به شرطی هیچ دو دانش‌آموزی از یک پایه کنار یکدیگر نیستند که به صورت زیر روی صندلی‌ها بنشینند:

Y D Y D Y D Y D Y D Y

یازدهمی‌ها به !۶ طریق می‌توانند روی صندلی‌های اول، سوم و ... بنشینند و دوازدهمی‌ها به !۵ طریق می‌توانند روی صندلی‌های دوم، چهارم و ... بنشینند. در نتیجه پاسخ برابر !۵×!۶ است.

ث) برای ایجاد آرایش مطلوب، ابتدا جایگشتی از شش دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را در نظر می‌گیریم، سپس پنج دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم را در ۵تا از هفت فضای ایجاد شده در جایگشت یازدهمی‌ها قرار می‌دهیم:

○Y○Y○Y○Y○Y○Y○

در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\underbrace{6!}_{\text{جایگشت یازدهمی‌ها}} \times \underbrace{\binom{7}{5}}_{\text{انتخاب ۵تا از هفت فضای خالی}} \times \underbrace{5!}_{\text{قرار دادن دوازدهمی‌ها در پنج فضای انتخاب شده}}$$

ج) طبق شرط مسئله دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم باید در سه دستهٔ دوتایی جدا از هم بیایند. بنابراین برای ایجاد آرایش مطلوب ابتدا جایگشتی از پنج دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم را در نظر می‌گیریم، سپس ۳تا از شش فضای ایجاد شده توسط این جایگشت را انتخاب و شش دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را در این سه فضا قرار می‌دهیم به‌طوری که در هر فضا دقیقاً دو دانش‌آموز قرار گیرد:

○D ○D ○D ○D ○D ○

↓

YY D D D YY D YY D

در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\underbrace{5!}_{\text{جایگشت دوازدهمی‌ها}} \times \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{انتخاب ۳تا از شش فضای خالی}} \times \underbrace{6!}_{\text{جایگشت یازدهمی‌ها در سه فضای انتخاب شده}}$$

تست ۱

در چند جایگشت از رقم‌های عدد ۲۴۳۶۷۵۹۸ رقم‌های زوج و فرد به صورت یکی در میان قرار دارند؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۱۰۸۰ ۳) ۱۱۵۲ ۴) ۱۲۹۶

راه‌حل

چون تعداد رقم‌های زوج و فرد در عدد ۲۴۳۶۷۵۹۸ برابر است، پس دو حالت وجود دارد که در یک جایگشت رقم‌های زوج و فرد به صورت یکی در میان باشند:

○○○○○○○○ ○○○○○○○○

ز ف ز ف ز ف ز ف ف ز ف ز ف ز ف ز

در هر یک از این دو حالت، رقم‌های زوج (یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸) را به !۴ طریق و رقم‌های فرد (یعنی ۳، ۵، ۷ و ۹) را نیز به !۴ طریق می‌توانیم در جایگاه‌های مربوطه قرار دهیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$2 \times 4! \times 4! = 1152$$

مسئله ۲

در چند عدد پنج رقمی با رقم‌های ناصفر دقیقاً دو رقم فرد و سه رقم زوج وجود دارد به شرطی که
الف) تکرار مجاز باشد؟
ب) تکرار مجاز نباشد؟

راه‌حل

الف) برای ساختن عددی مطلوب، ابتدا پنج جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم، دو تا از پنج جایگاه را انتخاب می‌کنیم و در هر کدام یکی از پنج رقم ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را قرار می‌دهیم و در نهایت در هر یک از سه جایگاه دیگر یکی از ۴ رقم ۲، ۴، ۶ و ۸ را قرار می‌دهیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

ف ۵ ، ز ۴ ، ف ۵ ، ز ۴ ، ز ۴

$$\binom{5}{2}\times 5^2\times 4^3=10\times25\times64=16000$$

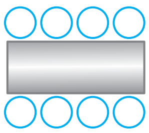
انتخاب دو تا از پنج جایگاه — جای‌گذاری رقم فرد در هر یک از دو جایگاه انتخاب شده — جای‌گذاری رقم زوج در هر یک از سه جایگاه باقی‌مانده

ب) برای ساختن عددی مطلوب، ابتدا سه تا از رقم‌های زوج و ناصفر، یعنی سه تا از ۲، ۴، ۶ و ۸ و دو تا از رقم‌های فرد، یعنی دو تا از ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹، را انتخاب می‌کنیم، سپس با رقم‌های انتخاب شده عدد پنج رقمی را می‌سازیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\binom{4}{3}\times\binom{5}{2}\times 5!=4\times10\times120=4800$$

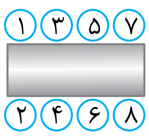
انتخاب سه رقم زوج — انتخاب دو رقم فرد — ساخت عدد

مسئله ۳



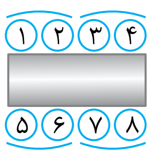
هشت صندلی در دو طرف مقابل از یک میز مستطیل شکل قرار دارند (مانند شکل مقابل). چهار زن و شوهر به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به‌طوری که
الف) هر کسی روبه‌روی همسر خود بنشیند؟
ب) هر کسی مجاور همسر خود بنشیند؟
پ) زن‌ها یک طرف و مردها طرف دیگر میز بنشینند؟
ت) زن‌ها یک طرف و مردها طرف دیگر میز بنشینند و هر کسی روبه‌روی همسر خود باشد؟
ث) هر کسی مجاور همسر خود بنشیند و در ضمن هیچ زن و مردی که همسر نیستند مجاور هم نباشند؟
ج) هر کسی مجاور همسر خود بنشیند و هیچ زن و مردی روبه‌روی هم نباشند؟

راه‌حل



الف) صندلی‌ها را مانند شکل مقابل با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای صندلی‌های ۱ و ۲، 4×2 انتخاب وجود دارد، زیرا یکی از چهار زن و شوهر باید روی این دو صندلی بنشینند، پس چهار روش برای انتخاب این زن و شوهر و دو روش برای نشستن آنها روی صندلی‌های ۱ و ۲ وجود دارد. به‌طور مشابه برای صندلی‌های ۳ و ۴، 3×2 انتخاب، برای صندلی‌های ۵ و ۶، 2×2 انتخاب و برای صندلی‌های ۷ و ۸، 1×2 انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$(4\times2)\times(3\times2)\times(2\times2)\times(1\times2)=4!\times2^4=384$$



ب) صندلی‌ها را مانند شکل مقابل با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری می‌کنیم و به چهار دستهٔ دوتایی تقسیم می‌کنیم. برای اینکه هر کسی مجاور همسر خود باشد، هر زن و شوهر باید روی دو صندلی یکی از این دسته‌ها بنشینند. با استدلالی مشابه استدلال قسمت قبل نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

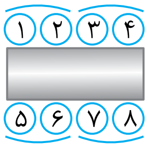
$$\overbrace{4\times2}^{1,2}\times\overbrace{3\times2}^{3,4}\times\overbrace{2\times2}^{5,6}\times\overbrace{1\times2}^{7,8}=4!\times2^4=384$$

پ) زن‌هـــا به دو طریق می‌توانند یکی از دو ســـمت میـــز را انتخاب کنند و به !۴ طریق می‌توانند روی چهار صندلی این سمت بنشینند. مردها نیز به !۴ طریق می‌توانند روی چهار صندلی سمت مقابل بنشینند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$۲\times ۴!\times ۴!=۲\times ۲۴\times ۲۴$$
$$=۱۱۵۲$$

ت) زن‌ها به دو طریق می‌توانند یکی از دو سمت میز را انتخاب کنند و به !۴ طریق می‌توانند روی چهار صندلی این سمت بنشینند. پس از آن هر مرد باید روبه‌روی همسر خود بنشیند، بنابراین برای مردها فقط یک انتخاب وجود دارد. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$۲\times ۴!=۴۸$$



ث) صندلی‌ها را مانند شـــکل مقابل با اعداد ۱ تا ۸ شـــماره‌گذاری می‌کنیم و به چهار دستهٔ دوتایی تقسیم می‌کنیم. هر زن و شوهر باید روی دو صندلیِ یکی از این دسته‌ها بنشـــینند. برای صندلی‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ به ترتیب ۸، ۱، ۳، ۱، ۴، ۱، ۱ و ۱ انتخاب وجود دارد، زیرا یکی از هشت نفر باید روی صندلی شمارهٔ ۱ بنشیند و پس از آن همسر این شخص روی صندلی شمارهٔ ۲؛ اگر روی صندلی شمارهٔ ۲ یک زن نشسته باشد، روی صندلی شمارهٔ ۳ با توجه به شرط مسئله یکی از سه زن دیگر باید بنشیند، در غیر این صورت یکی از ســـه مرد دیگر باید روی این صندلی بنشـــیند. پس در هر صورت برای صندلی شمارهٔ ۳، سه انتخاب وجود دارد و پس از آن همسر این شخص باید روی صندلی شـــمارهٔ ۴ بنشیند. به روش مشابه در مورد صندلی‌های شمارهٔ ۵، ۶، ۷ و ۸ نیز می‌توانیم استدلال کنیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$۸\times ۱\times ۳\times ۱\times ۴\times ۱\times ۱\times ۱=۹۶$$

ج) با توجه به شرط مسئله نحوهٔ نشستن مردها و زن‌ها به یکی از چهار صورت زیر است:

در هر یک از این چهار حالت مردها به !۴ طریق می‌توانند روی صندلی‌های مشخص شده بنشینند و پس از آن زن‌ها به صورت یکتا روی صندلی‌های باقی‌مانده می‌توانند بنشـــینند، زیرا هر یک باید کنار همســـر خود بنشینند. بنابراین پاسخ برابر است با

$$\underset{\text{انتخاب یک روش چینش مردها و زن‌ها}}{۴}\times \underset{\text{نشستن مردها روی صندلی‌های مربوطه}}{۴!}\times \underset{\text{نشستن زن‌ها روی صندلی‌های مربوطه}}{۱}=۹۶$$

مسئله ۴ **ده نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق سه نفره و یک اتاق چهار نفره قرار بگیرند؟**

راه‌حل به $\binom{10}{3}$ طریق می‌توانیم سه نفر را برای اتاق اول انتخاب کنیم، سپس به $\binom{7}{3}$ طریق می‌توانیم سه نفر را از بیـن هفت نفر باقی‌مانده برای اتاق دوم انتخـاب کنیم و در نهایت چهار نفر باقی‌مانده به یک طریق در اتاق چهار نفره قرار می‌گیرند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\binom{10}{3}\times\binom{7}{3}\times 1=\frac{10!}{3!\times 7!}\times\frac{7!}{3!\times 4!}=\frac{10!}{3!\times 3!\times 4!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{6\times 6\times 4!}$$

$$=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 5}{6}=15\times 8\times 7\times 5=4200$$

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است ولی اگر در بین آنها شیء تکراری وجود داشته باشد، دیگر این‌طور نیسـت. مثلاً تعداد جایگشـت‌های چهار حرف a، a، b و b برابر ۶ اسـت (aabb، abab، abba، baab، baba و bbaa) و نه $4!=24$. به سادگی می‌توان تعداد جایگشت‌های n شیء که بین آنها شیء تکراری نیز وجود داشته باشد حساب کرد.

مثلاً در مورد چهار حرف a، a، b و b؛ ابتدا چهار جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم، سـپس دو تا از چهار جایگاه را انتخاب می‌کنیم و در آنها حرف a قرار می‌دهیم و در نهایت در دو جایگاه باقی‌مانده حرف b را قرار می‌دهیم. در نتیجه تعداد جایگشت‌های حروف a، a، b و b برابر است با $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}$.

مسئله ۵ **تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ mississippi را تعیین کنید.**

راه‌حل کلمهٔ mississippi یازده حرف دارد، بنابراین برای تشـکیل جایگشـتی از حـروف این کلمه ابتدا یازده جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم. چون mississippi از یک حرف m، چهار حرف i، چهار حرف s و دو حرف p تشکیل شده است، یکی از یازده جایگاه را برای حرف m، چهار تا از ده جایگاه باقی‌مانده را بـرای چهار حرف i، چهار تا از شـش جایگاه باقی‌مانده را برای چهـار حرف s انتخاب می‌کنیم و در نهایت دو حرف p را در دو جایگاه باقی‌مانده قرار می‌دهیم. در نتیجه تعداد جایگشـت‌های حروف کلمهٔ mississippi برابر است با

$$\underbrace{\binom{11}{1}}_{m}\times\underbrace{\binom{10}{4}}_{i}\times\underbrace{\binom{6}{4}}_{s}\times\underbrace{1}_{p}=\frac{11!}{1!\times 10!}\times\frac{10!}{4!\times 6!}\times\frac{6!}{4!\times 2!}=\frac{11!}{1!\times 4!\times 4!\times 2!}$$

مشابه روشی که در حل این مسئله به‌کار بردیم، می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۱ **قضیهٔ جایگشـت با تکرار:** **تعداد جایگشت‌های n شیء به‌طوری که n_1 تای آنها از نوع اول (و یکسان)، n_2 تـای آنهـا از نـوع دوم (و یکسـان)، ... و n_k تـای آنهـا از نـوع kام (و یکسـان) باشـند $(n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$، برابر است با $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$.**

مثال: کلمهٔ mississippi از یک حرف m، چهار حرف i، چهار حرف s و دو حرف p تشکیل شده است، پس تعداد جایگشت‌های حروف این کلمه برابر $\frac{۱۱!}{۱!\times۴!\times۴!\times۲!}$ است و همچنین تعداد جایگشت‌های چهار حرف a، a، b و b برابر $\frac{۴!}{۲!\times۲!}$ است، همان‌طور که ملاحظه کردیم.

مسئله ۶

الف) تعداد جایگشت‌های رقم‌های عدد ۷۲۸۳۲۳۳۷۲۳ را تعیین کنید.

ب) چند جایگشت با رقم ۷ شروع می‌شوند؟

پ) چند جایگشت با رقم زوج شروع می‌شوند؟

ت) در چند جایگشت چهار رقم زوج در کنار هم قرار دارند؟

راه‌حل

الف) عدد داده شده دو رقم ۷، سه رقم ۲، یک رقم ۸ و چهار رقم ۳ دارد. بنابراین تعداد جایگشت‌های رقم‌های این عدد ده رقمی طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار برابر $\frac{۱۰!}{۲!\times۳!\times۱!\times۴!}$ است.

ب) رقم اول جایگشت را برابر ۷ قرار می‌دهیم. نُه رقم دیگر به صورت ۳، ۳، ۳، ۳، ۸، ۲، ۲، ۲ و ۷ هستند. بنابر قضیهٔ جایگشت با تکرار این نُه رقم را به $\frac{۹!}{۱!\times۳!\times۱!\times۴!}$ طریق می‌توانیم جلوی رقم ۷ بنویسیم. پس تعداد جایگشت‌هایی که با رقم ۷ شروع می‌شوند برابر $\frac{۹!}{۳!\times۴!}$ است.

پ) عدد داده شده ده رقم دارد که چهار رقم آن زوج و شش رقم دیگر فرد هستند. برای ساختن جایگشتی از این ده رقم که با رقم زوج شروع شود، ده جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم. غیر از جایگاه اول، در سه تا از نُه جایگاه دیگر باید رقم زوج قرار گیرد. این سه جایگاه را به $\binom{۹}{۳}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. رقم‌های زوج، یعنی ۸، ۲، ۲، ۲، را به $\frac{۴!}{۳!}$ طریق می‌توانیم در چهار جایگاه مخصوص رقم‌های زوج قرار بدهیم. در نهایت رقم‌های فرد، یعنی ۳، ۳، ۳، ۳، ۷، ۷، را به $\frac{۶!}{۲!\times۴!}$ طریق می‌توانیم در شش جایگاه باقی‌مانده قرار دهیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
ف ف ز ف ف ف ز ز ف ز

$$\binom{۹}{۳}\times\frac{۴!}{۳!}\times\frac{۶!}{۲!\times۴!}$$

ت) چهار رقم زوج را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم. طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار این بسته را به $\frac{۴!}{۳!}$ طریق می‌توانیم تشکیل دهیم. تعداد جایگشت‌های این بسته به همراه شش رقم فرد نیز برابر $\frac{۷!}{۲!\times۴!}$ است.

$$\boxed{۲,۲,۲,۸},۷,۷,۳,۳,۳,۳$$

در نتیجه پاسخ برابر $\frac{۴!}{۳!}\times\frac{۷!}{۲!\times۴!}$ است.

تست ۲ **در چند جایگشت از حروف کلمهٔ management عبارت get وجود دارد؟**

۱) $7!$ ۲) $\frac{7!}{2}$ ۳) $2\times 7!$ ۴) $4\times 7!$

راه‌حل: باید تعداد جایگشت‌های بستهٔ get به همراه بقیهٔ حروف را بیابیم:

$\boxed{get}, m, m, a, a, n, n, e$

طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد این جایگشت‌ها برابر است با

$$\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!}=\frac{8!}{8}=7!$$

مسئله ۷

در چند جایگشت از حروف کلمهٔ international

الف) حروف صدادار مجاور یکدیگر قرار دارند و حروف بی‌صدا نیز مجاور یکدیگر قرار دارند؟

ب) حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی در میان قرار دارند؟

پ) حرف اول صدادار و حرف آخر بی‌صدا است؟

ت) عبارت int دو بار ظاهر شده است؟

راه‌حل: الف) حروف صدادار را در یک بسته و حروف بی‌صدا را نیز در یک بسته قرار می‌دهیم:

$\boxed{a,a,i,i,e,o}\ ,\ \boxed{n,n,n,t,t,r,l}$

دو بسته را به $2!$ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم و به‌ازای هر یک، بستهٔ حروف صدادار را به $\frac{6!}{2!\times 2!}$ طریق و بستهٔ حروف بی‌صدا را به $\frac{7!}{3!\times 2!}$ طریق می‌توانیم تشکیل دهیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$2!\times\frac{6!}{2!\times 2!}\times\frac{7!}{3!\times 2!}$$

ب) چون کلمهٔ international شـش حرف صدادار و هفت حرف بی‌صدا دارد، پس در صورتی در یک جایگشــت حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی در میان قرار دارند که حروف بی‌صدا در جایگاه‌های اول، سوم، ... و سیزدهم و حروف صدادار در جایگاه‌های دوم، چهارم، ... و دوازدهم قرار گیرند:

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

ب ص ب ص ب ص ب ص ب ص ب ص ب

حروف بی‌صدا، یعنی l، r، t، t، n، n و n را به $\frac{7!}{3!\times 2!}$ طریق و حروف صدادار، یعنی o، e، a، a، i و i، را به $\frac{6!}{2!\times 2!}$ طریق می‌توانیم در جایگاه‌های مربوطه قرار دهیم. در نتیجه پاسخ برابر است با $\frac{6!}{2!\times 2!}\times\frac{7!}{3!\times 2!}$.

پ) کلمهٔ international سیزده حرف دارد که هفت تا از آنها بی‌صدا و شش تا صدادارند. برای تشکیل جایگشــتی که حرف اول صدادار و حرف آخر بی‌صدا باشـد، سیزده جایگاه در نظر می‌گیریم. هفت حرف بی‌صدا باید در جایگاه آخر و شـش تا از یازده جایگاه، جایگاه‌های دوم تا دوازدهم، قرار گیرند. پس برای حروف بی‌صدا $\frac{7!}{3!\times 2!}\times\binom{11}{6}$ انتخاب وجود دارد، زیرا به $\binom{11}{6}$ طریق می‌توانیم شش تا از یازده جایگاه را انتخــاب کنیــم و طبق قضیهٔ جایگشــت با تکــرار به $\frac{7!}{3!\times 2!}$ طریــق می‌توانیم حــروف بی‌صدا، یعنی l، r، t، t، n، n و n، را در جایگاه آخر و این شش جایگاه قرار دهیم.

در نهایت حروف صدادار، یعنی o، e، a، a، i و i را به $\frac{۶!}{۲!\times ۲!}$ طریق می‌توانیم در شش جایگاه باقی‌مانده، که یکی از آنها جایگاه ابتدایی است، قرار دهیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

ب ص ص ب ب ب ص ب ص ب ب ص ص

$$\binom{۱۱}{۶}\times\frac{۷!}{۳!\times ۲!}\times\frac{۶!}{۲!\times ۲!}$$

ت) پاسخ برابر تعداد جایگشت‌های حروف و بسته‌های زیر یعنی برابر $\frac{۹!}{۲!\times ۲!}$ است.

$$\boxed{\text{int}},\boxed{\text{int}},a,a,n,r,l,e,o$$

معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ را در نظر بگیرید. چند تا از جواب‌های این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی عبارت‌اند از

$$(۲,۲,۳)\,,\quad(۲,۵,۰)\,,\quad(۳,۰,۴)\,,\quad(۰,۰,۷)\,,\quad(۰,۷,۰)$$

نظیر هر جواب از معادله مانند $(x_۱,x_۲,x_۳)$ دنباله‌ای از توپ‌ها و دیوارها در نظر می‌گیریم، به این صورت که در ابتدای ردیف $x_۱$ توپ قرار می‌دهیم. بعد یک دیوار، سپس $x_۲$ توپ، بعد یک دیوار و در نهایت $x_۳$ توپ قرار می‌دهیم. مثلاً

(۲, ۲, ۳): ○ ○ | ○ ○ | ○ ○ ○

(۲, ۵, ۰): ○ ○ | ○ ○ ○ ○ ○ |

(۳, ۰, ۴): ○ ○ ○ | | ○ ○ ○ ○

(۰, ۰, ۷): | | ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

(۰, ۷, ۰): | ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ |

چون $x_۱+x_۲+x_۳=۷$، پس دنبالهٔ به‌دست آمده شامل هفت توپ و دو دیوار است. توجه کنید که هر دنبالهٔ شامل هفت توپ و دو دیوار، نظیر دقیقاً یک جواب از معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ است، زیرا دو دیوار، ردیف توپ‌ها را به سه قسمت تقسیم می‌کند. تعداد توپ‌های قسمت اول، دوم و سوم را به ترتیب برابر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ می‌گیریم و جوابی از معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی به‌دست می‌آوریم. به طور مثال دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

○ | ○ ○ | ○ ○ ○ ○

این دنباله نظیر جواب $(۱,۲,۴)$ است.

در نتیجه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ برابر تعداد دنباله‌های شامل هفت توپ و دو دیوار است. طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد این دنباله‌ها برابر $\binom{۹}{۲}=\frac{۹!}{۷!\times ۲!}$ است.

> در حالت کلی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر تعداد دنباله‌های شامل n توپ و $k-۱$ دیوار، یعنی برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}=\frac{(n+k-۱)!}{n!(k-۱)!}$ است.

قضیه ۲ **تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.**

مسئله ۸ **به چند طریق می‌توان از چهار نوع گل موجود در یک گل‌فروشی دسته‌گلی شامل نُه شاخه گل انتخاب کرد؟**

راه‌حل در تشکیل دسته‌گل تعداد شاخه‌های از هر نوع گل اهمیت دارد. فرض کنید تعداد شاخه‌های انتخاب شده از چهار نوع گل به ترتیب برابر x_1، x_2، x_3 و x_4 باشد. چون می‌خواهیم نُه شاخه گل انتخاب کنیم، پس $x_1+x_2+x_3+x_4=9$. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب نُه شاخه گل از چهار نوع گل برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ یعنی برابر $\binom{12}{3}=\binom{9+4-1}{4-1}$ است.

به‌طور کلی تعداد راه‌های انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل (یا n شیء از k نوع شیء) برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ است.

نتیجه **تعداد راه‌های انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.**

مسئله ۹ **به چند طریق می‌توان ده توپ یکسان را بین سه نفر توزیع کرد؟**

راه‌حل چون توپ‌ها یکسان‌اند، بنابراین در هر روش توزیع توپ‌ها تعداد توپ‌هایی که به هر نفر می‌رسد اهمیت دارد. فرض کنید به نفرات اول تا سوم به ترتیب x_1، x_2 و x_3 توپ برسد، در این صورت $x_1+x_2+x_3=10$. بنابراین تعداد راه‌های توزیع ده توپ یکسان بین سه نفر برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ یعنی برابر $\binom{12}{2}=\binom{10+3-1}{3-1}$ است.

به‌طور کلی تعداد راه‌های توزیع n شیء یکسان در k دستهٔ متمایز (مثلاً بین k نفر) برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ یعنی برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

مسئله ۱۰ **به چند طریق می‌توان از بین پنج نوع گل یازده شاخه گل انتخاب کرد به‌طوری که از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم حداقل سه شاخه انتخاب کرد؟**

راه‌حل ابتدا دو شاخه از گل نوع دوم و سه شاخه از گل نوع پنجم برمی‌داریم، زیرا این پنج شاخه به اجبار باید انتخاب شوند. اکنون باید $11-5$ شاخه گل یعنی شش شاخه گل را از بین پنج نوع گل انتخاب کنیم. این کار را به $\binom{10}{4}=\binom{6+5-1}{5-1}$ طریق می‌توانیم انجام دهیم.

مشابه راه‌حل این مسئله می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۳ فرض کنید c_1، ... و c_k عددهایی صحیح باشند. تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ به شرط آنکه $x_1\ge c_1$، ... و $x_k\ge c_k$، برابر $\binom{n-(c_1+\cdots+c_k)+k-1}{k-1}$ است.

در واقع تعداد جواب‌های معادله با شرایط گفته شده در صورت قضیه معادل با تعداد راه‌های انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل است به‌طوری که حداقل c_1 شاخه از گل نوع اول، حداقل c_2 شاخه از گل نوع دوم، ... و حداقل c_k شاخه از گل نوع kام انتخاب کنیم. برای این منظور مانند راه‌حل مسئلهٔ قبل ابتدا c_1 شاخه از گل نوع اول، ... و c_k شاخه از گل نوع kام انتخاب می‌کنیم، سپس $n-(c_1+\cdots+c_k)$ شاخه را باید از بین k نوع گل انتخاب کنیم که تعداد روش‌های انجام این کار را با توجه به قضایای قبل می‌دانیم.

قضیه ۴ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است.

اثبات تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر تعداد جواب‌های این معادله با شرایط $x_1\ge 1$، $x_2\ge 1$، ... و $x_k\ge 1$ است. طبق قضیهٔ قبل این تعداد برابر است با

$$\binom{n-\overbrace{(1+1+\cdots+1)}^{k}+k-1}{k-1}=\binom{n-k+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

تست ۳ تعداد راه‌های توزیع ده توپ یکسان بین پنج نفر به‌طوری که به هر نفر حداقل یک توپ برسد برابر کدام است؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۶ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۵۲

راه‌حل تعداد راه‌های توزیع ده توپ یکسان بین پنج نفر به‌طوری که به هر نفر حداقل یک توپ برسد، با توجه به توضیحات گذشته، برابر تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+\cdots+x_5=10$ یعنی برابر $\binom{9}{4}=\binom{10-1}{5-1}$ است. توجه کنید که

$$\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!\times 5!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=9\times 2\times 7=126$$

مسئله ۱۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ را بیابید به‌طوری که

الف) $x_1\ge 2$، $x_2>3$، $x_3>0$ و $x_4\ge 3$.
ب) هر x_i عددی زوج باشد.
پ) هر x_i عددی فرد باشد.
ت) x_4 بر ۵ بخش‌پذیر باشد.
ث) x_4 برابر مربع عددی طبیعی باشد.
ج) $x_4\le 3$.

راه‌حل الف) توجه کنید که گزارهٔ «$x_2>3$» با «$x_2\ge 4$» و گزارهٔ «$x_3>0$» با «$x_3\ge 1$» هم‌ارز است (زیرا x_2 و x_3 عددهایی صحیح‌اند). بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ را بیابیم به شرط آنکه $x_1\ge 2$، $x_2\ge 4$، $x_3\ge 1$ و $x_4\ge 3$. می‌دانیم این تعداد برابر است با

$$\binom{14-(2+4+1+3)+4-1}{4-1}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\times 4!}=35$$

ب) چون می‌خواهیم x_i عددی زوج باشد، پس قرار می‌دهیم $x_i=2y_i$ و چون x_i صحیح و نامنفی است، پس y_i نیز صحیح و نامنفی است.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=14 \Rightarrow 2y_1+2y_2+2y_3+2y_4=14 \Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=7$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ آخر برابر $\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$ اســت. پس پاســخ این قسمت برابر $\binom{10}{3}$ است.

پ) چون می‌خواهیم x_i عددی فرد باشــد، پس قرار می‌دهیم $x_i=2y_i+1$ و چون x_i صحیح و نامنفی است، پس y_i نیز صحیح و نامنفی است:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=14 \Rightarrow (2y_1+1)+(2y_2+1)+(2y_3+1)+(2y_4+1)=14$$

$$2y_1+2y_2+2y_3+2y_4=10 \Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=5$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ آخر برابر $\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}$ است، پس پاسخ این قسمت برابر $\binom{8}{3}$ است.

ت) چون می‌خواهیم x_4 بر ۵ بخش‌پذیر باشد، پس x_4 برابر ۰، ۵ یا ۱۰ است (توجه کنید که x_4 برابر ۱۵ یا عددی بزرگ‌تر نمی‌تواند باشــد، چون مجموع x_1 تا x_4 برابر ۱۴ اســت). اگر $x_4=0$، معادله به صورت $x_1+x_2+x_3=14$ درمی‌آید که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{14+3-1}{3-1}=\binom{16}{2}$ اســت. اگر $x_4=5$، معادله به صورت $x_1+x_2+x_3=9$ درمی‌آید که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{9+3-1}{3-1}=\binom{11}{2}$ اســت و اگر $x_4=10$، معادله به صورت $x_1+x_2+x_3=4$ درمی‌آید که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}$ اســت. در نتیجه پاســخ این قسمت برابر است با $\binom{6}{2}+\binom{11}{2}+\binom{16}{2}$.

ث) مانند قســمت قبل با حالت‌بندی روی مقادیر x_4 پاســخ را به دست می‌آوریم. چون می‌خواهیم x_4 برابر مربع عددی طبیعی باشد، پس x_4 برابر ۱، ۴ یا ۹ است. بنابراین

$$\text{جواب}=\overbrace{(x_1+x_2+x_3=13\ \text{تعداد جواب‌های})}^{x_4=1}+\overbrace{(x_1+x_2+x_3=10\ \text{تعداد جواب‌های})}^{x_4=4}$$

$$+\overbrace{(x_1+x_2+x_3=5\ \text{تعداد جواب‌های})}^{x_4=9}=\binom{13+3-1}{3-1}+\binom{10+3-1}{3-1}+\binom{5+3-1}{3-1}$$

$$=\binom{15}{2}+\binom{12}{2}+\binom{7}{2}$$

ج) علی‌رغم اینکه پاسخ این قسمت را نیز می‌توانیم مانند قسمت‌های (ت) و (ث) با حالت‌بندی روی مقادیر x_4 به‌دست بیاوریم ولی راه ساده‌تر این است که از روش شمارش تعداد حالت‌های نامطلوب کمک بگیریم.

تعــداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ برابر $\binom{17}{3}=\binom{14+4-1}{4-1}$ اســت.

یکی از این جواب‌ها را در نظر بگیرید. این جواب در صورتی مطلوب اســت که $x_4 \le 3$، پس در صورتی نامطلوب اســت که $x_4 \ge 4$. بنابراین تعداد جواب‌های نامطلوب، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ است به شرطی که $x_4 \ge 4$. می‌دانیم این تعداد برابر است با

$$\binom{14-(0+0+0+4)+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}$$

بنابراین پاسخ این قسمت برابر $\binom{17}{3}-\binom{13}{3}$ است.

تست ۴

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ y_1+y_2+y_3+y_4=9 \end{cases}$ **برابر کدام است؟**

۱) ۵۸۸ **۲)** ۷۳۵ **۳)** ۹۸۰ **۴)** ۱۱۷۶

راه‌حل: چون دو معادلهٔ داده شــده مستقل از یکدیگرند، بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد جواب‌های دستگاه، تعداد جواب‌های هر معادله را به‌دست آورده و اعداد به‌دست آمده را در یکدیگر ضرب می‌کنیم. تعداد جواب‌هــای صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=8$ برابــر $\binom{7}{2}$ و تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $y_1+y_2+y_3+y_4=9$ برابر $\binom{8}{3}$ است. بنابراین پاسخ برابر است با

$$\binom{7}{2}\times\binom{8}{3}=\frac{7!}{2!5!}\times\frac{8!}{3!5!}=21\times56=1176$$

مربع‌های لاتین

چهار معلم که آنها را با شــماره‌های ۱ تا ۴ مشــخص می‌کنیم قرار است طی یک روز که شامل چهار زنگ درســی اســت در چهار کلاس (الف)، (ب)، (ج) و (د) حضور پیدا کنند به‌طوری که هر معلم در هر کلاس دقیقاً یک زنگ درسی به تدریس بپردازد.

جدول زیر نشان می‌دهد که در هر زنگ، هر معلم در کدام کلاس حضور پیدا می‌کند. مثلاً طبق این جدول کلاس (ب) در زنگ سوم با معلم شمارهٔ ۴ کلاس دارد.

کلاس \ زنگ	اول	دوم	سوم	چهارم
الف	۱	۲	۳	۴
ب	۲	۳	۴	۱
ج	۳	۴	۱	۲
د	۴	۱	۲	۳

جدول فوق برای برنامه‌ریزی آنچه که می‌خواستیم مناسب است. ویژگی‌هایی از این جدول عبارت‌اند از

۱) در هر کلاس هر چهار معلم حضور پیدا کرده‌اند، زیرا در هر سطر از جدول نام همهٔ معلم‌ها آمده است.

تمرین

۱- الف) چند جایگشت از رقم‌های ۱ تا ۹ وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت رقم‌های زوج کنار یکدیگر قرار دارند؟

پ) در چند جایگشت رقم‌های زوج کنار یکدیگر قرار دارند و رقم‌های فرد نیز کنار یکدیگر قرار دارند؟

ت) در چند جایگشت رقم‌های زوج و فرد به صورت یکی در میان قرار دارند؟

ث) در چند جایگشت هیچ دو رقم زوجی مجاور یکدیگر قرار ندارند؟

ج) در چند جایگشت هر رقم زوج دقیقاً با یک رقم زوج دیگر مجاور است؟

۲- الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ mobile وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی در میان قرار دارند؟

پ) در چند جایگشت حروف b و i مجاور یکدیگر قرار دارند؟

ت) در چند جایگشت هیچ دو حرف صدادار مجاور یکدیگر قرار ندارند؟

ث) در چند جایگشت عبارت mo وجود ندارد؟

۳- الف) چند عدد چهار رقمی با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است)

ب) در چند عدد دقیقاً دو رقم زوج وجود دارد؟

پ) در چند عدد دو رقم زوج و دو رقم فرد وجود دارد و رقم‌های زوج و فرد به صورت یکی در میان قرار دارند؟

ت) در چند عدد هر چهار رقم فرد یا هر چهار رقم زوج‌اند؟

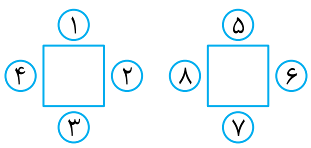
۴- الف) چند عدد پنج رقمی با رقم‌های متمایز با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ می‌توان نوشت؟

ب) در چند عدد دقیقاً دو رقم زوج وجود دارد؟

پ) در چند عدد دو رقم زوج و سه رقم فرد وجود دارد و رقم‌های زوج و فرد به صورت یکی در میان قرار دارند؟

ت) در چند عدد دقیقاً دو رقم زوج وجود دارد و این دو رقم مجاورند؟

۵- هشت صندلی با شماره‌های ۱ تا ۸ دور دو میز مربعی شکل قرار دارند (مانند شکل مقابل). چهار زن و شوهر به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به‌طوری که



الف) هر کسی روبه‌روی همسر خود بنشیند؟

ب) هر کسی مجاور همسر خود بنشیند؟

پ) زن‌ها دور یک میز و مردها دور میز دیگر بنشینند؟

ت) دور هر میز دقیقاً دو زن و شوهر بنشینند؟

ث) هر کسی مجاور همسر خود بنشیند و هیچ زن و مردی که همسر نیستند مجاور هم نباشند؟

ج) دور هر میز زن‌ها و مردها به صورت یکی در میان بنشینند؟

۶- الف) ده نفر با نام‌های a_1، a_2، ... و a_{10} به چند طریق می‌توانند در یک اتاق دو نفره، یک اتاق سه نفره و یک اتاق پنج نفره قرار بگیرند؟

ب) در چند حالت a_1 در اتاق پنج نفره قرار می‌گیرد؟

پ) در چند حالت a_1، a_2 و a_3 در سه اتاق مختلف قرار می‌گیرند؟

ت) در چند حالت a_1 و a_2 در یک اتاق قرار می‌گیرند؟

ث) در چند حالت هیچ‌یک از a_1، a_2 و a_3 در اتاق دو نفره قرار نمی‌گیرند؟

۷- الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ mississippi با حرف m شروع می‌شود؟

ب) در چند جایگشت هر چهار حرف s مجاورند؟

پ) در چند جایگشت هیچ دو حرف s مجاور نیستند؟

ت) در چند جایگشت هر حرف s فقط با یک حرف s مجاور است؟

ث) در چند جایگشت عبارت mis وجود دارد؟

ج) در چند جایگشت دو عبارت ips وجود دارد؟

۸- الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ isomorphism وجود دارد؟

ب) در چند جایگشت حروف صدادار مجاور یکدیگر قرار دارند و حروف بی‌صدا نیز مجاور یکدیگر قرار دارند؟

پ) در چند جایگشت حروف اول و آخر بی‌صدا هستند؟

ت) در چند جایگشت هر حرف صدادار فقط با یک حرف صدادار مجاور است؟

ث) در چند جایگشت عبارت pir وجود دارد؟

۹- الف) به چند طریق می‌توان دوازده شاخه گل از چهار نوع گل انتخاب کرد؟

ب) در چند حالت از هر یک از چهار نوع حداقل یک شاخه انتخاب می‌شود؟

پ) در چند حالت از هر یک از چهار نوع حداقل دو شاخه انتخاب می‌شود؟

ت) در چند حالت حداقل سه شاخه از نوع اول و حداقل دو شاخه از نوع دوم انتخاب می‌شود؟

ث) در چند حالت از هر یک از چهار نوع تعداد زوجی شاخه انتخاب می‌شود؟

۱۰- الف) به چند طریق می‌توان یازده توپ یکسان را بین بابک، مانی و پویا تقسیم کرد؟

ب) در چند حالت بابک حداقل دو توپ و پویا حداقل سه توپ دریافت می‌کنند؟

پ) در چند حالت به هر یک از سه نفر تعداد فردی توپ می‌رسد؟

ت) در چند حالت به پویا حداکثر چهار توپ می‌رسد؟

۱۱- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+3x_4=10$ را بیابید.

۱۲- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4^2=10$ را بیابید.

۱۳- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+\sqrt{x_4}=10$ را بیابید.

۱۴- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=11$ را بیابید، به شرطی که $x_1\geq 2$، $x_2\geq 3$ و $x_3\geq 2$.

۱۵- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادلهٔ $x_1+x_2+x_3\leq 7$ را بیابید.

۱۶- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ y_1+y_2+y_3=10 \end{cases}$ را بیابید.

۱۷- پنج خانواده قرار است به مدت پنج روز به مسافرت بروند و پنج ماشین کرایه کنند. قرار است هر ماشین در هر یک از روزها در اختیار یکی از خانواده‌ها باشد و طی پنج روز هر خانواده سوار همهٔ ماشین‌ها شده باشد. برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید که مشخص باشد در هر روز هر خانواده کدام ماشین را در اختیار داشته باشد؟

۱۸- الف) مربعی لاتین از مرتبهٔ ۶ ارائه دهید.

ب) مربعی لاتین از مرتبهٔ ۶ ارائه دهید با این ویژگی که بتوان خانه‌های آن را به نُه مربع 2×2 تقسیم کرد که مجموع چهار عدد واقع در هر کدام از آنها برابر ۱۴ باشد.

پ) مربعی لاتین از مرتبهٔ ۶ ارائه دهید با این ویژگی که بتوان خانه‌های آن را به چهار مربع 3×3 تقسیم کرد که در هر کدام دقیقاً سه عدد مختلف ظاهر شده باشند.

ت) مربعی لاتین از مرتبهٔ ۶ ارائه دهید با این ویژگی که بتوان خانه‌های آن را به شش مستطیل 2×3 تقسیم کرد که در هر کدام هر شش عدد ظاهر شده باشند.

فصل سوم

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- هشت صندلی در دو ردیف چهارتایی چیده شده است. پنج مرد و سه زن به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به‌طوری که زن‌ها همگی در ردیف جلو باشند؟

۱) ۳!×۵!　　۲) ۴!×۵!　　۳) ۴!×۴!　　۴) ۳!×۶!

۲- در چند جایگشت از ارقام عدد ۲۸۳۴۵۷۱ رقم‌های فرد در کنار یکدیگر قرار دارند؟

۱) ۴!×۴!　　۲) ۳!×۴!　　۳) ۳!×۵!　　۴) ۴!×۵!

۳- هفت دانش‌آموز پایهٔ دهم، شش دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به‌طوری که دهمی‌ها کنار هم باشند و یازدهمی‌ها نیز کنار هم باشند؟

۱) ۳!×۴!×۶!×۷!　　۲) ۶!×۶!×۷!　　۳) ۴!×۶!×۷!　　۴) ۵!×۶!×۷!

۴- شش آلمانی و شش سوئدی به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به‌طوری که آلمانی‌ها و سوئدی‌ها در صف به صورت یکی در میان قرار گیرند؟

۱) ۶!×۶!　　۲) $\frac{۶!×۶!}{۲}$　　۳) ۲×۶!×۶!　　۴) $\frac{۱۲!}{۲}$

۵- به چند طریق می‌توان هر عضو از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۷\}$ را آبی، قرمز یا سبز کرد به‌طوری که دقیقاً دو عضو مجموعه آبی شوند؟

۱) ۶۷۲　　۲) ۸۹۶　　۳) ۴۸۰　　۴) ۶۴۰

۶- در چند عدد شش رقمی با ارقام ناصفر و متمایز، رقم‌ها یکی در میان زوج و فرد هستند؟

۱) ۲۶۴۰　　۲) ۲۸۸۰　　۳) ۳۱۲۰　　۴) ۳۲۸۰

۷- ده جعبه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ در یک ردیف چیده شده‌اند. به چند طریق می‌توان هر جعبه را آبی، قرمز یا سبز کرد به‌طوری که سه تا از جعبه‌ها آبی، سه تا قرمز و چهار تا سبز شوند و در ضمن هیچ‌یک از جعبه‌های ۱، ۲ و ۳ آبی نشود؟

۱) ۷۰۰　　۲) ۹۸۰　　۳) ۱۲۲۵　　۴) ۱۹۶۰

۸- از جابه‌جایی حروف کلمهٔ abbasali چند کلمهٔ هشت حرفی مختلف می‌توان به‌دست آورد؟

۱) ۳۳۶۰　　۲) ۴۹۶۰　　۳) ۶۴۸۰　　۴) ۷۷۲۰

۹- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ bandarabbas هر دو عبارت ban و sar وجود دارند؟

۱) ۹۶۰　　۲) ۱۰۲۰　　۳) ۱۰۸۰　　۴) ۱۲۶۰

۱۰- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ sistanian حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی در میان قرار دارند؟

۱) ۱۸۰　　۲) ۲۴۰　　۳) ۳۰۰　　۴) ۳۶۰

۱۱- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ khorramabad حروف صدادار مجاور یکدیگر قرار دارند و حروف بی‌صدا نیز مجاور یکدیگر قرار دارند؟

۱) ۷!　　۲) ۲×۷!　　۳) ۴×۷!　　۴) ۶×۷!

۱۲- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mazandaran هیچ دو تا از حروف a مجاور نیستند؟

۱) $\frac{۵×۷!}{۲}$　　۲) ۵×۷!　　۳) ۳×۷!　　۴) $\frac{۳×۷!}{۲}$

۱۳- به چند طریق می‌توان دوازده شاخه گل از بین هفت نوع گل انتخاب کرد؟

۱) $\binom{۱۱}{۶}$　　۲) $\binom{۱۷}{۶}$　　۳) $\binom{۱۸}{۶}$　　۴) $\binom{۱۸}{۱۱}$

۱۴- به چند طریق می‌توان هشـــت اســـکناس یکسان را بین آرش، آریا، پارسا و پدرام تقسیم کرد به‌طوری که آرش حداقل دو و پارسا حداقل یک اسکناس دریافت کند؟

۱) ۳۵ ۲) ۵۶ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

۱۵- معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

۱) ۴۹۵ ۲) ۵۰۵ ۳) ۵۱۵ ۴) ۵۲۵

۱۶- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $8\le x_1+x_2+x_3\le 10$ برابر کدام است؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۶۶ ۴) ۱۷۸

۱۷- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+4x_4=15$ برابر کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

۱۸- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ با شرط $x_1\ge 3$ و $4\le x_2\le 8$ برابر کدام است؟

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۵۵ ۴) ۵۶

۱۹- تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1x_2x_3x_4=2^{10}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۲۰ ۴) ۲۸۶

۲۰- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1x_2x_3x_4x_5=2^8\times 3^4$ برابر کدام است؟

۱) $\binom{12}{4}\binom{8}{4}$ ۲) $\binom{7}{4}$ ۳) $\binom{8}{4}$ ۴) $\binom{8}{4}\binom{7}{4}$

۲۱- کدام جدول مربعی لاتین از مرتبهٔ ۴ است؟

۱)

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲

۲)

۳	۱	۲	۴
۴	۲	۳	۱
۱	۳	۴	۲
۲	۴	۱	۳

۳)

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱

۴)

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۱	۲	۴
۱	۴	۱	۳

۲۲- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A مانند شکل زیر داده شده است. حاصل $x+y$ برابر کدام است؟

A=

			۳
	۳	x	۴
۱			
y			

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳- کدام مربع را نمی‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱)

	۲		
			۱
۳			
	۴		

۲)

			۱
			۲
		۴	۳

۳)

۳		۲	
	۴		۱

۴)

	۴		
۳		۲	
	۱		

۲۴- کدام مربع را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱)

۲			
		۳	۱
۴			

۲)

۱			
	۲	۳	
			۱

۳)

۱			
			۱
	۲		
		۳	

۴)

۱			
		۱	
	۲		
			۱

۲۵- فرض کنید A مربعی لاتین از مرتبهٔ ۵ باشـــد. به چند طریق می‌توان پنج خانه از A انتخاب کرد به‌طوری که هیچ دو تا در یک ســطر نباشند و عددهای واقع در آنها دوبه‌دو متمایز باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۲۵

راه‌حل تمرین‌ها

۱ الف) $9!$

ب) $\boxed{2,4,6,8},1,3,5,7,9$

جایگشت کل اشیا — تشکیل بستهٔ ارقام زوج

$6! \times 4!$

پ) $\boxed{2,4,6,8},\boxed{1,3,5,7,9}$

جایگشت دو بسته — تشکیل بستهٔ ارقام فرد — تشکیل بستهٔ ارقام زوج

$2! \times 5! \times 4!$

ت)

ف ز ف ز ف ز ف ز ف

قرار دادن ارقام زوج در جایگاه‌های مربوطه — قرار دادن ارقام فرد در جایگاه‌های مربوطه

$4! \times 5!$

ث) ابتدا پنج رقم فرد را به یکی از $5!$ طریق ممکن در یک ردیف می‌نویسیم. سپس ۴تا از شش فضای خالی ایجاد شده را به یکی از $\binom{6}{4}$ طریق ممکن انتخاب می‌کنیم و ارقام زوج را به یکی از $4!$ طریق ممکن در این چهار فضا قرار می‌دهیم.

پس پاسخ برابر $4!\times\binom{6}{4}\times5!$ است.

ف ف ف ف ف

ج) طبق شرط مسئله، چهار رقم زوج باید در دو بستهٔ دوتایی در دو جای مختلف جایگشت قرار گیرند. بنابراین پاسخ به صورت زیر می‌شود:

قرار دادن ارقام زوج در دو فضای انتخاب شده — انتخاب دو تا از شش فضای ایجاد شده — جایگشت ارقام فرد

$4! \times \binom{6}{2} \times 5!$

ز ز ف ف ف ز ز ف ف

۲ الف) $6!$

ب)

ص ب ص ب ص ب   ب ص ب ص ب ص

$=2\times3!\times3! = 3!\times3! + 3!\times3!$

پ) $5!\times2!$ $m,o,\boxed{b,i},l,e$

ت)

قرار دادن حروف صدادار در سه فضای انتخاب شده — انتخاب ۳تا از چهار فضای ایجاد شده — جایگشت حروف بی‌صدا

$3! \times \binom{4}{3} \times 3!$

ب ب ب

ث) $\boxed{mo},b,i,l,e$ — کل جایگشت‌ها

$6! - 5!$

۳ الف) $7\;7\;7\;7 = 7^4$

ب)

قرار دادن رقم فرد در دو جایگاه دیگر — قرار دادن رقم زوج در دو جایگاه انتخاب شده — انتخاب ۲تا از چهار جایگاه برای ارقام زوج

$4^2 \times 3^2 \times \binom{4}{2}$

پ) $4\;3\;4\;3 + 3\;4\;3\;4 = 2\times3^2\times4^2$

ف ز ف ز   ز ف ز ف

ت) $4\;4\;4\;4 + 3\;3\;3\;3 = 4^4+3^4$

ف ف ف ف   ز ز ز ز

۴ الف)

$7\;6\;5\;4\;3 = \frac{7!}{2!}$

ب)

جایگشت پنج رقم انتخاب شده — انتخاب ۳تا از چهار رقم فرد — انتخاب ۲تا از سه رقم زوج

$5! \times \binom{4}{3} \times \binom{3}{2}$

پ)

قرار دادن پنج رقم انتخاب شده در جایگاه‌های مربوطه — انتخاب ۳تا از چهار رقم فرد — انتخاب ۲تا از سه رقم زوج

$3!\times2! \times \binom{4}{3} \times \binom{3}{2}$

ف ز ف ز ف

ت)

جایگشت پنج رقم انتخاب شده به‌طوری که دو رقم زوج مجاور باشند — انتخاب ۳تا از چهار رقم فرد — انتخاب ۲تا از سه رقم زوج

$4!\times2! \times \binom{4}{3} \times \binom{3}{2}$

ف ، ف ، ف ، $\boxed{\text{ز ، ز}}$

۵ الف)

صندلی ۸		صندلی ۶		صندلی ۷		صندلی ۵		صندلی ۴		صندلی ۲		صندلی ۳		صندلی ۱
۱	×	۲	×	۱	×	۴	×	۱	×	۶	×	۱	×	۸

ب) ابتدا یکی از هشـــت نفر را روی صندلی شمارهٔ ۱ و یکی از شـــش نفر غیر از نفر اول و همســـرش را روی صندلی شمارهٔ ۳ می‌نشـــانیم. سپس همسرهای این دو نفر را روی صندلی‌های ۲ و ۴ می‌نشـــانیم. پس چهار صندلـــی اول را به ۲×۶×۸ طریق می‌توانیـــم پر کنیم و به‌طور مشـــابه چهـــار صندلی بعدی را به ۲×۲×۴ طریق می‌توانیم پر کنیم.

صندلی ۶ و ۸		صندلی ۷		صندلی ۵		صندلی ۲ و ۴		صندلی ۳		صندلی ۱
۲	×	۲	×	۴	×	۲	×	۶	×	۸

پ)

نشستن مردها دور میز دیگر		نشستن زن‌ها دور میز انتخاب شده		انتخاب یک میز برای زن‌ها
!۴	×	!۴	×	۲

ت)

نشستن دو زن و شوهر دیگر دور میز دوم		نشستن دو زن و شوهر انتخاب شده دور میز اول		انتخاب دو زن و شوهر برای میز اول
!۴	×	!۴	×	$\binom{4}{2}$

ث) ابتدا یکی از هشـــت نفر را برای صندلی ۱ انتخاب می‌کنیم و همســـر این نفر را روی یکی از دو صندلی ۲ و ۴ می‌نشـــانیم. یکی از سه زن و شوهر دیگر را برای دو صندلی باقی‌ماندهٔ میز اول انتخاب می‌کنیم و توجه کنید که با توجه به شـــرط مسئله ایـــن زن و شـــوهر فقط به یـــک طریق می‌تواننـــد روی این دو صندلی بنشـــینند. پس میز اول را به ۳×۲×۸ طریق می‌توانیم پر کنیم. به‌طور مشـــابه میز دوم را به ۲×۴ طریق می‌توانیم پر کنیم. پس پاسخ برابر ۲×۴×۳×۲×۸ است.

ج) دو تـــا از چهـــار زن و دو تا از چهار مـــرد را برای میز اول انتخاب می‌کنیم. این چهار نفر با توجه به شکل زیر به ۲×۲×۲ طریق می‌توانند دور این میز بنشـــینند. چهـــار نفر دیگر نیز به ۲×۲×۲ طریق می‌توانند دور میز دوم بنشینند. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)$$

مرد
زن ☐ زن
مرد

زن
مرد ☐ مرد
زن

۶ الف)

اتاق پنج نفره		اتاق سه نفره		اتاق دو نفره
$\binom{5}{5}$	×	$\binom{8}{3}$	×	$\binom{10}{2}$

ب)

اتاق دو نفره		اتاق سه نفره		اتاق پنج نفره
$\binom{2}{2}$	×	$\binom{5}{3}$	×	$\binom{9}{4}$

توجه کنید که چون a_1 باید در اتاق پنج نفره قرار بگیرد، برای این اتاق باید چهار نفر از نُه نفر دیگر را انتخاب کنیم.

پ)

اتاق پنج نفره		اتاق سه نفره		اتاق دو نفره		قرار دادن a_1، a_2 و a_3 در سه اتاق مختلف
$\binom{4}{4}$	×	$\binom{6}{2}$	×	$\binom{7}{1}$	×	!۳

ت) ســـه حالت در نظر می‌گیریم کـــه a_1 و a_2 در کدام اتاق قرار گیرند.

		اتاق پنج نفره		اتاق سه نفره		اتاق دو نفره
دو نفره $\boxed{a_1, a_2}$	←	$\binom{5}{5}$	×	$\binom{8}{3}$	×	$\binom{8}{0}$
سه نفره $\boxed{a_1, a_2}$	←	$\binom{5}{5}$	×	$\binom{6}{1}$	×	$\binom{8}{2}$ +
پنج نفره $\boxed{a_1, a_2}$	←	$\binom{3}{3}$	×	$\binom{6}{3}$	×	$\binom{8}{2}$ +

ث)

اتاق پنج نفره		اتاق سه نفره		اتاق دو نفره
$\binom{5}{5}$	×	$\binom{8}{3}$	×	$\binom{7}{2}$

۷ الـــف) حرف اول را m می‌گذاریم و ده حرف دیگر را به $\frac{10!}{4!4!2!}$ طریق می‌توانیم جلوی m بنویسیم.

ب) $\frac{8!}{4!\times2!}$ $\qquad m,\boxed{s,s,s,s},i,i,i,i,p,p$

پ) ابتـــدا حـــروف m, i, i, i, i, p, p را بـــه $\frac{7!}{4!\times2!}$ طریـــق می‌توانیـــم در یک ردیف بنویســـیم، ســـپس بـــه $\binom{8}{4}$ طریق می‌توانیم چهار حرف s را در ۴تا از هشـــت فضای ایجاد شده قرار دهیم. پس پاسخ برابر $\binom{8}{4}\times\frac{7!}{4!\times2!}$ است.

☐ m ☐ i ☐ i ☐ i ☐ i ☐ p ☐ p ☐

فصل سوم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ به $\binom{4}{3}$ طریق می‌توانیم ۳تا از چهار صندلی ردیف جلو را انتخاب کنیم و زن‌ها به !۳ طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند. سپس مردها را به !۵ طریق می‌توانند روی پنج صندلی باقی‌مانده بنشینند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\binom{4}{3}\times 3!\times 5! = 4\times 3!\times 5! = 4!\times 5!$$

۲- گزینهٔ ۱ سه رقم زوج به همراه بستهٔ ارقام فرد را به !۴ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم. پس از آن چهار رقم فرد را به !۴ طریق می‌توانیم در بستهٔ خود با هم جابه‌جا کنیم. پس پاسخ برابر !۴×!۴ است.

$$\boxed{3,5,7,1},2,8,4$$

۳- گزینهٔ ۲ دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم را به ترتیب با A_i، B_i و C_i نشان می‌دهیم.

$$\boxed{A_1,\dots,A_7},\boxed{B_1,\dots,B_6},C_1,C_2,C_3,C_4$$

چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به همراه دستهٔ دهمی‌ها و دستهٔ یازدهمی‌ها را به !۶ طریق می‌توانیم در یک ردیف قرار دهیم. پس از آن دهمی‌ها به !۷ طریق و یازدهمی‌ها به !۶ طریق می‌توانند در بستهٔ خود جابه‌جا شوند. پس پاسخ برابر !۷×!۶×!۶ است.

۴- گزینهٔ ۳ اگر نفر اول صف آلمانی باشد، آلمانی‌ها به !۶ طریق و سوئدی‌ها نیز به !۶ طریق می‌توانند در صف بایستند و اگر نفر اول صف سوئدی باشد نیز سوئدی‌ها به !۶ طریق و آلمانی‌ها به !۶ طریق می‌توانند در صف بایستند. پس پاسخ برابر است با !۶×!۶×۲.

S A S A ⋯

A S A S ⋯

۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دو تا از هفت عضو مجموعه را انتخاب می‌کنیم و آن را به رنگ آبی درمی‌آوریم. برای هر یک از پنج عضو دیگر مجموعه دو انتخاب وجود دارد که قرمز شود یا سبز. بنابراین تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی برابر است با

$$\binom{7}{2}\times 2^5 = 21\times 32 = 672$$

۶- گزینهٔ ۲ برای ساخت عدد شش رقمی با ارقام ناصفر و متمایز که رقم‌ها یکی در میان زوج و فرد باشند، به سه رقم زوج و سه رقم فرد نیاز داریم. پس سه تا از چهار رقم ۲، ۴، ۶ و ۸ و سه تا از پنج رقم ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را انتخاب می‌کنیم. سپس به !۳×!۳×۲ طریق می‌توانیم عدد مورد نظر را با رقم‌های انتخاب شده بسازیم. پس پاسخ برابر است با

ز ف ز ف ز ف　　ف ز ف ز ف ز

$$\binom{4}{3}\times\binom{5}{3}\times\left(3!\times 3! + 3!\times 3!\right)$$

$$= 4\times 10\times 72 = 2880$$

۷- گزینهٔ ۳ به $\binom{7}{3}$ طریق می‌توانیم سه تا از هفت جعبهٔ شماره‌های ۴ تا ۱۰ را آبی کنیم، به $\binom{7}{3}$ طریق می‌توانیم سه تا از هفت جعبهٔ باقی‌مانده را قرمز کنیم و در نهایت به یک طریق می‌توانیم چهار جعبهٔ باقی‌مانده را سبز کنیم. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\binom{7}{3}\times\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\times 4!}\times\frac{7!}{3!\times 4!} = 35\times 35 = 1225$$

۸- گزینهٔ ۱ طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار پاسخ برابر است با

a, a, a, b, b, s, l, i

$$\frac{8!}{3!\times 2!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{6\times2} = 8\times7\times5\times4\times3 = 3360$$

۹- گزینهٔ ۴ طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار پاسخ برابر است با

$\boxed{\text{ban}}, \boxed{\text{sar}}$, a, a, b, b, d

$$\frac{7!}{2!\times 2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{2\times2} = 1260$$

۱۰- گزینهٔ ۱ کلمهٔ داده شده چهار حرف صدادار و پنج حرف بی‌صدا دارد. بنابراین اگر در جایگشتی حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی در میان قرار داشته باشند، جایگشت به صورت زیر است:

ب ص ب ص ب ص ب ص ب

حروف بی‌صدا، یعنی s, s, t, n, n، را بــه $\frac{5!}{2!\times 2!}$، و حروف صــدادار، یعنــی i, i, a, a، را به $\frac{4!}{2!\times 2!}$ طریــق می‌توانیم در جایگاه‌های مربوطه قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\frac{5!}{2!\times 2!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=30\times 6=180$$

۱۱- گزینهٔ ۳ به !۲ طریق می‌توانیم بستهٔ حروف صدادار و بستهٔ حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار دهیم، پس از آن حــروف بی‌صدا به $\frac{7!}{2!}$ طریق می‌توانند در بســتهٔ خود جابه‌جا شــوند و حروف صدادار نیز به $\frac{4!}{3!}$ طریق می‌توانند در بســتهٔ خود جابه‌جا شوند. پس پاسخ برابر است با

$$\boxed{r,r,k,h,m,b,d},\boxed{a,a,a,o}$$

$$2!\times\frac{7!}{2!}\times\frac{4!}{3!}=7!\times 4$$

۱۲- گزینهٔ ۱ بــه $\frac{6!}{2!}$ طریق می‌توانیم حــروف غیر از a، یعنی m, z, d, r, n, n را در یک ردیف بنویسیم. ســپس به $\binom{7}{4}$ طریق می‌توانیم چهار حرف a را در ۴تا از هفت فضای خالی ایجاد شده قرار دهیم. پس پاسخ برابر است با

$$\bigcirc m\bigcirc z\bigcirc d\bigcirc r\bigcirc n\bigcirc n\bigcirc$$

$$\frac{6!}{2!}\times\binom{7}{4}=\frac{6!}{2!}\times\frac{7!}{3!\times 4!}=\frac{720}{2\times 6\times 24}\times 7!=\frac{5\times 7!}{2}$$

۱۳- گزینهٔ ۳ تعداد راه‌های انتخاب n شــاخه گل از بین k نوع گل برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا دو اسکناس به آرش و یک اسکناس به پارسا می‌دهیم. اکنون باید پنج اسکناس باقی‌مانده را بین چهار نفــر توزیع کنیــم. تعداد روش‌های انجام ایــن کار برابر تعداد جواب‌های صحیــح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times 5!}=56$$

۱۵- گزینهٔ ۱ تعــداد جواب‌هــای صحیــح و مثبــت معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است. پس پاسخ برابر است با

$$\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!\times 8!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9}{4!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9}{24}$$

$$=11\times 5\times 9=495$$

۱۶- گزینهٔ ۳ تعداد جواب‌هــای صحیــح و نامنفی معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

اگر $8\le x_1+x_2+x_3\le 10$، آن‌گاه $x_1+x_2+x_3$ برابر ۸، ۹ یا ۱۰ اســت. پس برای محاسبهٔ تعداد جواب‌های نامعادله، سه حالت در نظر می‌گیریم. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$x_1+x_2+x_3=\quad 8\qquad 9\qquad 10$$

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{10}{2}+\binom{11}{2}+\binom{12}{2}=45+55+66=166$$

۱۷- گزینهٔ ۴ تعــداد جواب‌هــای صحیح و مثبــت معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ اســت. با حالت‌بندی روی مقادیــر x_4 تعــداد جواب‌هــای صحیــح و مثبــت معادلــهٔ $x_1+x_2+x_3+4x_4=15$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\underset{\substack{x_4=1\\x_1+x_2+x_3=11}}{\binom{10}{2}}+\underset{\substack{x_4=2\\x_1+x_2+x_3=7}}{\binom{6}{2}}+\underset{\substack{x_4=3\\x_1+x_2+x_3=3}}{\binom{2}{2}}$$

$$=45+15+1=61$$

۱۸- گزینهٔ ۳ تعداد جواب‌هــای صحیــح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ بــا شــرط $x_1\ge 3$ و $x_2\ge 4$ برابر است با

$$\binom{12-(3+4)+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times 5!}=56$$

از ایــن تعداد، جواب‌هایی که $x_2\ge 9$ نامطلوب هســتند، یعنی تعــداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ با شــرط $x_1\ge 3$، $x_2\ge 9$، $x_3\ge 0$ و $x_4\ge 0$ را بایــد از عــدد ۵۶ کم کنیم. این تعداد برابر است با

$$\binom{12-(3+9)+4-1}{4-1}=\binom{3}{3}=1$$

در نتیجه پاسخ برابر ۵۵=۱−۵۶ است.

۱۹- گزینهٔ ۴ چون حاصل‌ضرب اعــداد طبیعی x_1، x_2، x_3 و x_4 برابر 2^{10} شــده است، پس هر x_i برابر توانی از ۲ است، مثلاً $x_i=2^{y_i}$. بنابراین

$$x_1x_2x_3x_4=2^{10}\Rightarrow 2^{y_1}\times 2^{y_2}\times 2^{y_3}\times 2^{y_4}=2^{10}$$

$$2^{y_1+y_2+y_3+y_4}=2^{10}\Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=10$$