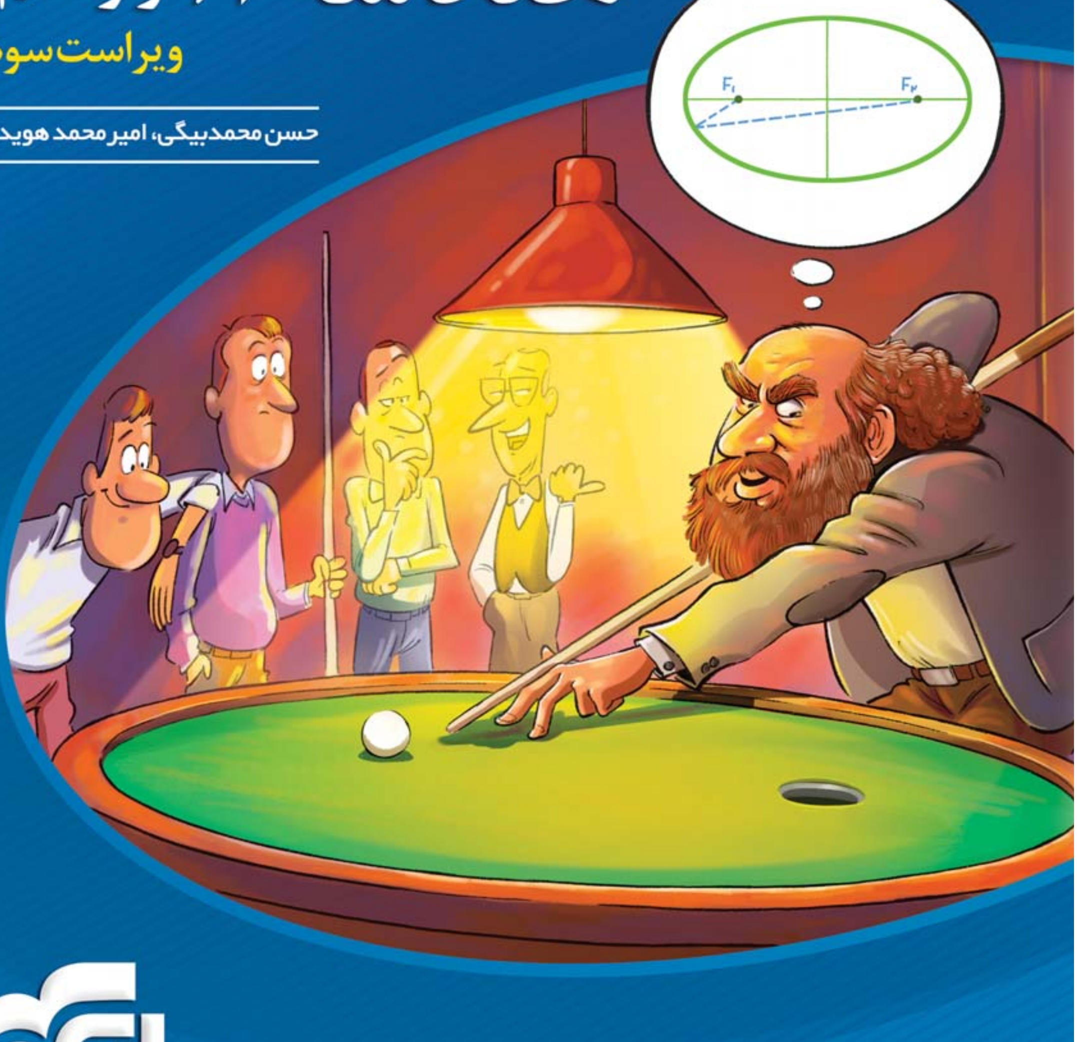
درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۳ (دوازدهم)

ویراست سوم

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی



نشر الگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای کتاب درسی هندسهٔ ۳ نوشته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده و هر درس از یک یا چند بخش تشکیل شده است:

۱. خلاصهٔ درس: در این بخش، ضمن مرور مطالب کتاب درسی، نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای را هم حل کرده‌ایم تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این‌گونه پرسش‌ها آشنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای: در پایان هر بخش مجموعه‌ای از پرسش‌های چهارگزینه‌ای مربوط به آن بخش را آورده‌ایم. در این قسمت، از همهٔ مطالب کتاب درسی پرسش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرسش تألیفی به همراه سؤالات کنکورهای سال‌های قبل را هم آورده‌ایم. پاسخ تشریحی همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای در فصل چهارم قرار دارد.

برای مطالعهٔ این کتاب، ابتدا باید خلاصهٔ درس را با دقت بخوانید و مطمئن شوید که روش‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای آن را یاد گرفته‌اید. سپس به حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای انتهای هر بخش بپردازید. با این کار، علاوه بر اینکه مطالب درسی را به‌طور کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوید.

در این ویراست تعدادی زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش از درس را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم. در سطح ۱، پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن بخش مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح ۲، پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شوند. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح ۱ است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در سطح ۳، پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح ۲ است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این سطح از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است. در ضمن در آخر هر فصل، ۳ آزمون از کل مطالب فصل قرار داده‌ایم که مرور مناسبی برای آن فصل است.

به یاد داشته باشید که سرعت مطالعهٔ هندسه کمتر از درس‌های دیگر است. سعی کنید دربارهٔ آنچه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه اینکه سرسری مطالب را حفظ کنید. حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه‌حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشه کاغذ و قلم کنار خود داشته باشید و هرگاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از اینکه راه‌حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه‌حلش را ببینید.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعهٔ هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «هندسهٔ ۳ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

در پایان، وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس، دکتر ابوالفضل علی بمانی و خانم عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر کنیم.

به امید موفقیت شما عزیزان – مؤلفان

فهرست

فصل اول: ماتریس و کاربردها

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل اول

درس اول / بخش اول : معرفی ماتریس

ماتریس و درایه

- هر آرایش مستطیل شکل از عددهای حقیقی، که شامل تعدادی سطر و ستون است یک **ماتریس** است.
- به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس یک **درایهٔ** آن ماتریس می‌گوییم.

درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور می‌کنیم و معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مرتبهٔ یک ماتریس

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریس از **مرتبهٔ** $m\times n$ (بخوانید m در n) است.

حاصل‌ضرب $m\times n$ تعداد درایه‌های ماتریس را نشان می‌دهد.

ماتریس‌های هم‌مرتبه

اگر تعداد سطرهای دو ماتریس با هم و تعداد ستون‌های آن دو ماتریس نیز با هم برابر باشند، آن دو ماتریس را **هم‌مرتبه** می‌گوییم.

نمایش کلی درایه‌های ماتریس

در ماتریس دلخواه A، درایهٔ واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهیم. در حالت کلی، ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اغلب ماتریس بالا را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ می‌نویسیم $(1\le i\le m$ و $1\le j\le n)$. به a_{ij} **درایهٔ عمومی** ماتریس A می‌گوییم.

تست ۱

اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$، مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) ۸　　۲) ۱۳　　۳) ۱۵　　۴) ۱۷

راه‌حل با توجه به اطلاعات سؤال درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. اکنون می‌نویسیم

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A = 7-2+5+7=17$$

تست ۲

مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=[2i^2-3j]_{3\times 3}$ چقدر است؟

۱) ۱۰　　۲) ۸　　۳) ۱۶　　۴) ۱۲

راه‌حل با توجه به تعریف، $a_{ij}=2i^2-3j$. بنابراین $a_{12}=2-6=-4$، $a_{22}=8-6=2$ و $a_{32}=18-6=12$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس } A = a_{12}+a_{22}+a_{32}=-4+2+12=10$$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس صفر ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

مثال:

$$\bar{O}=\begin{bmatrix}۰\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۰,\quad \bar{O}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}_{۲\times۳},\quad \bar{O}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۲) ماتریس سطری ماتریسی است که یک سطر دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس سطری به صورت $۱\times n$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر سطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix}۴\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix}۱&-۱&۳\end{bmatrix}_{۱\times۳},\quad C=\begin{bmatrix}۰&-۱&\pi&\sqrt{۲}\end{bmatrix}_{۱\times۴}$$

۳) ماتریس ستونی ماتریسی است که یک ستون دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس ستونی به صورت $m\times۱$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر ستونی‌اند.

$$A=\begin{bmatrix}-۱\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۲\end{bmatrix}_{۳\times۱},\quad C=\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۲\\۳\\۴\end{bmatrix}_{۵\times۱}$$

۴) ماتریس مربعی ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

◈ اگر یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، به جای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$، می‌گوییم «ماتریس مربعی از مرتبهٔ n».

نکته

در ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ درایه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

$$a_{ij}\begin{cases} i=j \rightarrow \text{روی قطر اصلی است } a_{ij} \\ i<j \rightarrow \text{بالای قطر اصلی است } a_{ij} \\ i>j \rightarrow \text{پایین قطر اصلی است } a_{ij} \\ i+j=n+۱ \rightarrow \text{روی قطر فرعی است } a_{ij} \end{cases}$$

مثال: ماتریس‌های زیر مربعی‌اند.

$$A=\begin{bmatrix}۴\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۰\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad C=\begin{bmatrix}-۱&۳&۰\\۲&۱&۴\\۰&۵&۷\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۵) ماتریس قطری ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است. به عبارت دیگر،

ماتریس قطری است $A \Leftrightarrow A=[a_{ij}]_{n\times n},\quad (i\neq j \Rightarrow a_{ij}=۰)$

نکته

در ماتریس قطری درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

مثال: ماتریس‌های زیر قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix}۴\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad C=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۶) ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

مثال: ماتریس‌های زیر اسکالرند.

$$A=\begin{bmatrix}-۶\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad C=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۷) ماتریس همانی (واحد) ماتریس اسکالری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ است. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $\delta_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۰ & i\neq j\end{cases}$ ، آن‌گاه $I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$.

مثال: ماتریس‌های زیر همانی‌اند.

$$I_۱=\begin{bmatrix}۱\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B مساوی هستند اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱- ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند.

۲- درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

به عبارت دیگر، دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ مساوی هستند اگر

۱- $m=p$ و $n=q$.

۲- به‌ازای هر i و j ، $a_{ij}=b_{ij}$.

در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

تست ۳

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y & ۹\\ ۲ & z-۱\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}۳ & x+y\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ **مساوی باشند، مقدار** $x+y+z$ **چقدر است؟**

۱) -۱ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

راه‌حل چون $A=B$ ، پس $z-۱=۵$ ، $x+y=۹$ و $x-y=۳$ ، بنابراین $z=۶$ ، $y=۳$ و $x=۶$ ، در نتیجه $x+y+z=۱۵$.

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر را با هم جمع یا از هم کم کنیم. به عبارت دیگر، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، آن‌گاه

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}\ ,\quad A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

تست ۴

اگر $[i]_{2\times 2}+\begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix}=[i^2-3j]_{2\times 2}$، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) -5 ۳) -7 ۴) صفر

راه‌حل از تساوی داده شده به‌دست می‌آید $\begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix}=[i^2-3j]-[i]=[i^2-i-3j]$. اگر $A=\begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix}$، چون $a_{11}=m$ و $a_{22}=n$، پس $m=1-1-3=-3$ و $n=4-2-6=-4$، بنابراین $m+n=-3-4=-7$.

ضرب عدد حقیقی در ماتریس

برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در ماتریس A، یعنی rA، یک ماتریس هم‌مرتبه با ماتریس A است، به طوری که اگر $rA=[d_{ij}]$، آن‌گاه $d_{ij}=ra_{ij}$. یعنی هر درایهٔ ماتریس rA از ضرب عدد حقیقی r در درایهٔ نظیرش در ماتریس A به‌دست می‌آید.

مثال:

- $2\times\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
- $(-1)\times\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
- $0\times\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}_{3\times 3}$
- $\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$

قرینهٔ یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. قرینهٔ A ماتریسی $m\times n$ است که از حاصل‌ضرب عدد -1 در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A=(-1)A$.

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد حقیقی در ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)،

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$،

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$،

۷) $(rs)A=r(sA)$،

۸) $1A=A$،

۹) $0A=\bar{O}$ و $r\bar{O}=\bar{O}$،

۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq 0$، آن‌گاه $A=B$.

۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

تست ۵

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $۲A-B=I$، ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

راه‌حل از برابری $۲A-B=I$ به‌دست می‌آید: $B=۲A-I=۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$.

تست ۶

اگر $A=[i-j]_{۲\times۲}$، $B=[i+j]_{۲\times۲}$ و ماتریس‌های X و Y جواب‌های دستگاه $\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا دو معادلهٔ داده شده را با هم جمع می‌کنیم: $۲X=A+B$. اکنون دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$۲Y=A-B \Rightarrow Y=\frac{A-B}{۲}$$

در نتیجه $۲X+Y=A+B+\frac{A-B}{۲}=\frac{۳A+B}{۲}$، یعنی $۲X+Y=[\frac{۳(i-j)+i+j}{۲}]_{۲\times۲}=[۲i-j]_{۲\times۲}$

پس $۲X+Y=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$. در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر است با $۱+۰+۳+۲=۶$.

ترانهادهٔ یک ماتریس

اگر جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم جابه‌جا کنیم، به ماتریس به‌دست آمده **ترانهادهٔ ماتریس** A می‌گوییم و آن را با نماد A^T نمایش می‌دهیم.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \Leftrightarrow A^T=[a_{ji}]_{n\times m}$$

مثال: الف) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$، آن‌گاه $A^T=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$.

ب) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow B^T=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

پس

$$A^T-B^T=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

نکته

۱- اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد، آن‌گاه $(A^T)^T=A$.

۲- اگر A ماتریسی مربعی باشد، آن‌گاه A^T هم‌مرتبه با A است.

معرفی ماتریس

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱- ماتریس‌های A و B تعداد قبولی و مردودی در درس هندسه و گسسته در دو مدرسه را نشان می‌دهند. چند درصد از دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس هندسه قبول شده‌اند؟

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{قبول} & \text{مردود}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{هندسه}\\ \text{گسسته}\end{array} & \begin{bmatrix} 90 & 10 \\ 89 & 11 \end{bmatrix}\end{array} \qquad B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{قبول} & \text{مردود}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{هندسه}\\ \text{گسسته}\end{array} & \begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}\end{array}$$

۱) ٪۱۴ ۲) ٪۸۶ ۳) ٪۸۸ ۴) ٪۱۲/۴

۲- در ماتریس $A=[2i-j^2]_{2\times 2}$ مجموع درایه‌ها برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳- اگر $A=[ij-1]_{3\times 2}$ و $B=[(i-j)^2]_{3\times 3}$، مقدار $2a_{21}b_{12}-3a_{32}b_{31}$ کدام است؟

۱) ۵۸− ۲) ۱۰− ۳) ۶۲− ۴) ۲۰−

۴- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} 5 & i>j \\ 7 & i=j \\ -2 & i<j \end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۵- درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^2+2j & i\geq j \\ 2j-i & i<j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۶- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 7 & i=j \\ i^2-1 & i<j \end{cases}$ مفروض است. مقدار $2a_{24}-3a_{31}+4a_{33}$ برابر کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۷- اگر در ماتریس $A_{3\times 4}$ بدانیم $a_{ij}=\begin{cases} -i & i>j \\ 0 & i=j \\ j & i<j \end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۸

۸- چند تا از ماتریس‌های زیر قطری هستند؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- کدام‌یک از ماتریس‌های زیر ماتریس اسکالر نیست؟

۱) $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۱۰- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $\frac{x}{۲}-y+۲z$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) -۴

۱۱- درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} j-۲i & i<j \\ i-j & i>j \\ ۲ij & i=j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی A برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۲- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱+۲x & y+x \\ ۳ & k \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x-y & ۳y-۱ \\ ۱-z & x^۲+y \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $z+k$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۳- اگر $\begin{bmatrix} c & -۵ \\ d & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & b \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & a \end{bmatrix}$، مقدار $ac-bd$ برابر کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۱ ۳) ۸۱ ۴) ۷۹

۱۴- مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $[i^۲+۳j-۱]_{۳\times۳}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۰

۱۵- اگر $A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}$ و $B=[i^۲-۳j]_{۳\times۳}$، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۱۶- اگر $A=[۲^{i-j}]_{۲\times۲}$ و $B=[(-۱)^{i+j}]_{۲\times۲}$، ماتریس $۲A+B$ کدام است؟

۱) $۳I_۲$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ ۴) $I_۲$

۱۷- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، که در آن $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$، که در آن $b_{ij}=\begin{cases} j-i & i<j \\ i+j & i\geq j \end{cases}$، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۱

۱۸- با توجه به دستگاه ماتریسی زیر، درایهٔ واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

$$A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix},\quad ۲A-۳B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) -۲

سطح ۲

۱۹- ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض است. کدام‌یک از تعاریف زیر می‌تواند مشخص‌کنندهٔ این ماتریس باشد؟

۱) $a_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i<j \\ j+i & i\geq j \end{cases}$

۲) $a_{ij}=\begin{cases} j-i & i>j \\ i+۱ & i=j \\ ۲j+۱ & i<j \end{cases}$

۳) $a_{ij}=\begin{cases} j+۱ & i<j \\ j-۱ & i\geq j \end{cases}$

۴) $a_{ij}=\begin{cases} j+۱ & i\leq j \\ i+j & i>j \end{cases}$

۲۰- اگر $A=[۲i-j]_{۲\times۲}$، $B=[۴i+۳j]_{۲\times۲}$، $X+Y=A$ و $X-Y=B$، مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۵۲

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $mA-nB=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ، زوج مرتب (m,n) کدام است؟

۱) $(-3,-2)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(2,3)$ ۴) چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix} a-1 & m^2 \\ 3 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -a & m+1 \\ a & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C=2A-B$ ، $c_{21}=2c_{32}$ و $c_{11}=-c_{22}$ ، مقدار $a-m$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۲۳- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ با تعریف $a_{ij}=2j-i$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases} 2j-3i & i<j \\ i-2j & i\geq j \end{cases}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A-2B$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱−

۲۴- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} 2j-i^2 & i<j \\ -m & i=j \\ i^2+3 & i>j \end{cases}$ مفروض است. به‌ازای کدام مقدار m مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۴۴ است؟

۱) ۱− ۲) ۲− ۳) ۱ ۴) ۲

۲۵- ماتریس $A=[n+i^2j]_{(2n-1)\times(5-n)}$ مربعی است. نسبت مجموع درایه‌های روی قطر اصلی به مجموع درایه‌های روی قطر فرعی آن کدام است؟

۱) $\frac{20}{13}$ ۲) $\frac{21}{13}$ ۳) $\frac{21}{17}$ ۴) $\frac{20}{11}$

۲۶- اگر $A_{2m\times3n}$ ماتریسی سطری و $B_{k\times p}$ ماتریسی ستونی باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) ماتریس $\begin{bmatrix} 2m-1 & p \\ p-1 & 0 \end{bmatrix}$ صفر است.

۲) ماتریس $\begin{bmatrix} k & 0 & p-1 \\ 0 & p & 0 \\ p & p-1 & m \end{bmatrix}$ اسکالر است.

۳) ماتریس $\begin{bmatrix} p-1 & 0 & n \\ 0 & k & 0 \\ n & 0 & m-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ قطری است.

۴) ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 2m-1 & p-1 \\ p-1 & 0 & 2m-p \end{bmatrix}$ صفر است.

۲۷- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} n+2 & m & -1 \\ 3 & 0 & 2n \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ برابر هستند. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس B برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۸- اگر $A=[i^2+j]_{3\times3}$ ، $B=[2-i+j^2]_{3\times3}$ و $C=3A-2B$ ، آن‌گاه بزرگ‌ترین درایهٔ قطر فرعی ماتریس C کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۸−

۲۹- مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر 3×3 برابر ۲ است. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{27}{8}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۰- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} -2 & 3b \\ 4-c & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & b-2 \\ 2c & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس $A+B$ اسکالر باشد، حاصل $2a-4b+c$ برابر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۳۱- ماتریس A دارای $n-3$ سطر و $2n+1$ ستون است. اگر A ماتریس سطری باشد، آن‌گاه کدام‌یک از ماتریس‌های زیر قطری است؟

۱) $\begin{bmatrix} n-1 & n-4 \\ n+1 & 4n \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2n-8 & n \\ n-1 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} n+1 & 0 \\ n & n-1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} n & \frac{n}{2}-2 \\ 4-n & n+1 \end{bmatrix}$

۳۲- دو ماتریس $A=[2j-3i]_{3\times 2}$ و $B=[i-2j]_{3\times 2}$ مفروض‌اند. اگر $C=A-2B$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

۱) -6 ۲) صفر ۳) 2 ۴) -2

۳۳- اگر $A=[2^{i-j}]_{2\times 2}$ و $B=[(-1)^{i+j}]_{2\times 2}$، آن‌گاه کوچک‌ترین درایهٔ قطر فرعی ماتریس $A-2B$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 4 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{2}$

۳۴- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} z-1 & 9 \\ 2 & x-y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 5 & x+y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی‌اند. در مورد ماتریس $\begin{bmatrix} y-3 & 0 & x-3 \\ 0 & y & x-z \\ z-3 & 6-x & 3-y \end{bmatrix}$ کدام گزینه درست است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس همانی ۳) ماتریس اسکالر ۴) ماتریس غیرقطری

سطح ۳

۳۵- درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس $A=[ki^2-j^3]_{2\times 2}$ برابر $3k$ است. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر کدام است؟

۱) ۱۵۸ ۲) ۱۶۲ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۶۸

۳۶- ماتریس A از مرتبهٔ $(3n-4)\times(2n+3)$ مفروض است. اگر تعداد ستون‌های ماتریس A پنج تا بیشتر از تعداد سطرهای آن باشد، آن‌گاه سطر دوم A چند درایه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۷- در ماتریس $B=[3i-ij-5j]_{m\times n}$ درایهٔ واقع در سطر آخر و ستون آخر برابر صفر است. این ماتریس چند درایه دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۳۸- در کدام‌یک از ماتریس‌های زیر همواره تساوی $a_{ij}=-a_{ji}$ برقرار است؟

۱) $A=\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & j \end{bmatrix}$ ۲) $A=[\cos(i-j)]_{3\times 3}$ ۳) $A=[\sin(i-j)]_{3\times 3}$ ۴) $A=[-(i+j)^{-1}]_{3\times 3}$

۳۹- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} 2 & i+j=3k \\ -1 & i+j\neq 3k \end{cases}$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟ $(k\in\mathbb{N})$

۱) -1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 8

۴۰- در ماتریس مربعی $A=[3j+2i-1]$ درایهٔ سطر اول و ستون آخر $\frac{4}{3}$ برابر درایهٔ سطر آخر و ستون اول است. ماتریس A چند درایه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۴۱- ماتریس اسکالر A از مرتبهٔ ۳ و ماتریس $B=[ijm]$ در رابطهٔ $2A+B=I$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس A برابر کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۴۲- اگر $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ و $a_{ij}=\begin{cases} j^2-i & i+j=2k \\ i^2-j & i+j=2k+1 \end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A کدام است؟ $(k\in\mathbb{N})$

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶

۴۳- ماتریس اسکالر A از مرتبهٔ ۳ مفروض است به طوری که $3A=4B=-\frac{3}{4}C$. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A+B+C$ برابر -27 باشد، آن‌گاه ماتریس A کدام است؟

۱) I ۲) $3I$ ۳) $4I$ ۴) $9I$

۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A^T)^T+A^T$ برابر کدام است؟

۱) 8 ۲) -8 ۳) 7 ۴) -7

پاسخ‌های تشریحی

۱ (۳) در ماتریس A، تعداد دانش‌آموزان $۱۰۰=۱۰+۹۰$ و در ماتریس B تعداد دانش‌آموزان $۵۰=۸+۴۲$ است. همچنین،

تعداد کل دانش‌آموزان $=۱۰۰+۵۰=۱۵۰$

تعداد دانش‌آموزان قبول شده در درس هندسه $=۹۰+۴۲=۱۳۲$

بنابراین درصد دانش‌آموزان قبول شده در درس هندسه در دو مدرسه برابر است با $\frac{۱۳۲}{۱۵۰}\times ۱۰۰=۸۸٪$

۲ (۳) درایه‌های ماتریس $A=[۲i-j^۲]_{۲\times ۲}$ را تعیین می‌کنیم:

$$A=[۲i-j^۲]_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر $۱-۲+۳+۰=۲$ است.

۳ (۱) با توجه به تعریف دو ماتریس A و B،

$$a_{۲۱}=۲-۱=۱,\quad a_{۳۲}=۶-۱=۵,\quad b_{۱۲}=۱,\quad b_{۳۱}=۴$$

بنابراین

$$۲a_{۲۱}b_{۱۲}-۳a_{۳۲}b_{۳۱}=۲(۱)(۱)-۳(۵)(۴)=۲-۶۰=-۵۸$$

۴ (۴) بنابر تعریف درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$a_{۱۱}=۷,\quad a_{۱۲}=-۲,\quad a_{۱۳}=-۲$$
$$a_{۲۱}=۵,\quad a_{۲۲}=۷,\quad a_{۲۳}=-۲$$
$$a_{۳۱}=۵,\quad a_{۳۲}=۵,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ & -۲ \\ ۵ & ۷ & -۲ \\ ۵ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$۳(۵)+۳(۷)+۳(-۲)=۱۵+۲۱-۶=۳۰$$

۵ (۴) ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۳,\quad a_{۱۲}=۳,\quad a_{۱۳}=۵,\quad a_{۲۱}=۶,\quad a_{۲۲}=۸,\quad a_{۲۳}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}$. اکنون به‌دست می‌آید

مجموع درایه‌های ماتریس A $=۳+۳+۵+۶+۸+۴=۲۹$

۶ (۱) با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A،

$$a_{۲۴}=۲^۲-۱=۳,\quad a_{۳۱}=۳+۱=۴,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین

$$۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}=۲(۳)-۳(۴)+۴(۷)=۲۲$$

۷ (۱) درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۰,\quad a_{۱۲}=۲,\quad a_{۱۳}=۳,\quad a_{۱۴}=۴$$
$$a_{۲۱}=-۲,\quad a_{۲۲}=۰,\quad a_{۲۳}=۳,\quad a_{۲۴}=۴$$
$$a_{۳۱}=-۳,\quad a_{۳۲}=-۳,\quad a_{۳۳}=۰,\quad a_{۳۴}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ & ۴ \\ -۳ & -۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲ است.

۸ (۴) ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. پس ماتریس‌های $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۹ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}$ قطری هستند و بقیه قطری نیستند.

۹ (۲) ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند. پس ماتریس گزینهٔ (۲) ماتریس اسکالر نیست.

۱۰ (۴) دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. چون $A=B$، پس

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \end{cases}\Rightarrow ۲x=۱۲\Rightarrow x=۶,\ y=۳$$
$$z-۱=-۳\Rightarrow z=-۲$$

بنابراین $\frac{x}{۲}-y+۲z=\frac{۶}{۲}-۳-۴=-۴$.

۱۱ (۲) درایه‌های پایین قطر اصلی در کادر خط‌چین مشخص شده‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های پایین قطر اصلی A به صورت زیر هستند:

$$a_{۲۱}=۲-۱=۱,\quad a_{۳۱}=۳-۱=۲,\quad a_{۳۲}=۳-۲=۱$$

پس

$$a_{۲۱}+a_{۳۱}+a_{۳۲}=۱+۲+۱=۴$$

۱۲ (۱) چون دو ماتریس از مرتبهٔ ۲ هستند می‌توان نتیجه گرفت که شرط اول تساوی دو ماتریس را دارند. اکنون باید تساوی درایه‌های نظیر به نظیر را بررسی کنیم:

$$a_{۱۱}=b_{۱۱}\Rightarrow x-y=۱+۲x$$
$$a_{۱۲}=b_{۱۲}\Rightarrow ۳y-۱=y+x$$
$$\Rightarrow\begin{cases} x+y=-۱ \\ x-۲y=-۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-۱ \\ y=۰ \end{cases}$$
$$a_{۱۳}=b_{۱۳}\Rightarrow ۱-z=۳\Rightarrow z=-۲$$
$$a_{۱۴}=b_{۱۴}\Rightarrow x^۲+y=k\xrightarrow{x=-۱,\ y=۰}k=۱$$

در نتیجه $z+k=-۲+۱=-۱$.

۱۳ **۲** در دو ماتریس مساوی درایه‌های نظیر هم مساوی‌اند، پس

$$\begin{bmatrix}-۲&۳\\۴&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵&b\\۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&-۵\\d&۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۳&۳+b\\۷&a-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&-۵\\d&۱\end{bmatrix}$$

در نتیجه $c=۳,\ \ ۳+b=-۵\Rightarrow b=-۸,\ \ d=۷,\ \ a-۴=۱\Rightarrow a=۵$

بنابراین $ac-bd=(۵)(۳)-(-۸)(۷)=۷۱$.

۱۴ **۳** با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس $A=[i^{۲}+۳j-۱]_{۳\times۳}$، درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به‌دست می‌آوریم.

$$a_{۱۲}=۱^{۲}+۳\times۲-۱=۶,\quad a_{۲۲}=۲^{۲}+۳\times۲-۱=۹$$

$$a_{۳۲}=۳^{۲}+۳\times۲-۱=۱۴$$

مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A $=۶+۹+۱۴=۲۹$

۱۵ **۴** با تعریف ماتریس‌های A و B درایه‌های آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۱&۳&۵\\۳&۷&۱۱\\۵&۱۱&۱۷\end{bmatrix},\quad B=[i^{۲}-۳j]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}-۲&-۵&-۸\\۱&-۲&-۵\\۶&۳&۰\end{bmatrix}$$

بنابراین $۲A-B=۲\begin{bmatrix}۱&۳&۵\\۳&۷&۱۱\\۵&۱۱&۱۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲&-۵&-۸\\۱&-۲&-۵\\۶&۳&۰\end{bmatrix}$. فقط ستون دوم ماتریس $۲A-B$ را لازم داریم، پس $۲A-B=\begin{bmatrix}?&۱۱&?\\?&۱۶&?\\?&۱۹&?\end{bmatrix}$.

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر است با $۱۱+۱۶+۱۹=۴۶$

۱۶ **۲** با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B، درایه‌های این دو ماتریس را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_{۱۱}=۲^{۰}=۱, & a_{۱۲}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}\\ a_{۲۱}=۲^{۱}=۲, & a_{۲۲}=۲^{۰}=۱\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&\frac{۱}{۲}\\۲&۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}b_{۱۱}=(-۱)^{۲}=۱, & b_{۱۲}=(-۱)^{۳}=-۱\\ b_{۲۱}=(-۱)^{۳}=-۱, & b_{۲۲}=(-۱)^{۴}=۱\end{cases}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۱&۱\end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم ماتریس $۲A+B$ را به‌دست آوریم:

$$۲A+B=۲\begin{bmatrix}۱&\frac{۱}{۲}\\۲&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۳&۳\end{bmatrix}$$

۱۷ **۱** درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_{۱۲}=۱-۲=-۱\\ a_{۱۳}=۱-۳=-۲\\ a_{۲۳}=۲-۳=-۱\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}&-۱&-۲\\?&&-۱\\?&?&\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}b_{۱۲}=۲-۱=۱\\ b_{۱۳}=۳-۱=۲\\ b_{۲۳}=۳-۲=۱\end{cases}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}&۱&۲\\?&&۱\\?&?&\end{bmatrix}$$

پس $A+B=\begin{bmatrix}&۰&۰\\?&&۰\\?&?&\end{bmatrix}$. بنابراین مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر صفر است.

۱۸ **۲** از دستگاه داده‌شده ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$۳\times\begin{cases}A+B=\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۰\end{bmatrix}\\ ۲A-۳B=\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۳\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳A+۳B=\begin{bmatrix}۹&-۶\\۳&۰\end{bmatrix}\\ ۲A-۳B=\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۳\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}۵A=\begin{bmatrix}۱۱&-۵\\۳&۳\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{۱۱}{۵}&-۱\\\frac{۳}{۵}&\frac{۳}{۵}\end{bmatrix}$$

بنابراین درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس A برابر -۱ است.

۱۹ **۴** در گزینهٔ (۱)، درایهٔ $a_{۱۲}$ از رابطهٔ $i+۱$ به‌دست می‌آید، پس $a_{۱۲}=۲$، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

در گزینهٔ (۲)، درایهٔ $a_{۱۲}$ از رابطهٔ $۲j+۱$ به‌دست می‌آید، پس $a_{۱۲}=۵$، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

در گزینهٔ (۳)، درایهٔ $a_{۱۱}$ از رابطهٔ $j-۱$ تعیین می‌شود، پس $a_{۱۱}=۰$ که در ماتریس A این درایه برابر ۲ است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۰ **۳** ابتدا ماتریس $۲X+Y$ را برحسب ماتریس‌های A و B به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}X+Y=A\\ X-Y=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\frac{A+B}{۲}\\ Y=\frac{A-B}{۲}\end{cases}\Rightarrow ۲X+Y=A+B+\frac{A-B}{۲}\qquad(۱)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+B=[۲i-j]_{۲\times۲}+[۴i+۳j]_{۲\times۲}=[۶i+۲j]_{۲\times۲}\qquad(۲)$$

$$A-B=[۲i-j]_{۲\times۲}-[۴i+۳j]_{۲\times۲}=[-۲i-۴j]_{۲\times۲}\qquad(۳)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$۲X+Y=[۶i+۲j]_{۲\times۲}+[-i-۲j]_{۲\times۲}=[۵i]_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۵&۵\\۱۰&۱۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر $۵+۵+۱۰+۱۰=۳۰$ است.

۲۱ **۴** ماتریس‌های A و B را در معادلهٔ زیر قرار می‌دهیم:

$$mA-nB=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۵&۰\end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix}۰&-۲\\۱&۲\end{bmatrix}-n\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۵&۰\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-n&-۲m\\m+n&۲m-۳n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۵&۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-n=-۳\Rightarrow n=۳\\ -۲m=-۴\Rightarrow m=۲\\ m+n=۵\\ ۲m-۳n=۰\end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به‌دست آمده در معادلهٔ چهارم صدق نمی‌کنند، پس $m=۲$ و $n=۳$ قابل‌قبول نیست.

۲۲ (۲) ابتدا درایه‌های ماتریس $C=۲A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$C=۲A-B=۲\begin{bmatrix} a-۱ & m^۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -a & m+۱ \\ a & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳a-۲ & ۲m^۲-m-۱ \\ ۶-a & -۴ \\ ۰ & ۲m+۱ \end{bmatrix}$$

اکنون بنابر فرض سؤال،

$$c_{۱۱}=-c_{۲۲}\Rightarrow ۳a-۲=-(-۴)\Rightarrow ۳a-۲=۴\Rightarrow a=۲$$

$$c_{۲۱}=۲c_{۳۲}\Rightarrow ۶-a=۲(۲m+۱)\Rightarrow ۴m+a=۴$$

$$\xrightarrow{a=۲} ۴m+۲=۴\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a-m=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$.

۲۳ (۱) درایه‌های ماتریس‌های A و B را با تعریف‌های داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$A=[۲j-i]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A-۲B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۶ & ۴ \\ -۳ & ۳ & ۹ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A-۲B$ برابر است با $۱+۴-۱=۴$.

۲۴ (۱) ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -m & ۳ & ۵ \\ ۷ & -m & ۲ \\ ۱۲ & ۱۲ & -m \end{bmatrix}$$

اکنون با استفاده از فرض سؤال می‌نویسیم.

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A=۴۴\Rightarrow -۳m+۴۱=۴۴$$

$$-۳m=۳\Rightarrow m=-۱$$

۲۵ (۲) چون ماتریس A ماتریس مربعی است، پس تعداد سطرها و تعداد ستون‌های این ماتریس مساوی‌اند. پس

$$۲n-۱=۵-n\Rightarrow ۳n=۶\Rightarrow n=۲$$

بنابراین ماتریس A که از مرتبهٔ ۳×۳ است، به صورت زیر خواهد بود:

$$A=[۲+i^۲j]=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & a_{۱۲} & ۵ \\ a_{۲۱} & ۱۰ & a_{۲۳} \\ ۱۱ & a_{۳۲} & ۲۹ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های روی قطر اصلی}}{\text{مجموع درایه‌های روی قطر فرعی}}=\frac{۳+۱۰+۲۹}{۵+۱۰+۱۱}=\frac{۴۲}{۲۶}=\frac{۲۱}{۱۳}$$

۲۶ (۴) ماتریس سطری فقط دارای یک سطر است. چون $A_{۲m\times۳n}$ سطری است، پس $۲m=۱$. در نتیجه $m=\frac{۱}{۲}$ و ماتریس ستونی فقط دارای یک ستون است. چون $B_{k\times p}$ ستونی است، پس $p=۱$. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $\left.\begin{matrix} m=\frac{۱}{۲} \\ p=۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ این ماتریس صفر نیست

گزینهٔ (۲): $\left.\begin{matrix} m=\frac{۱}{۲} \\ p=۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ این ماتریس اسکالر نیست

گزینهٔ (۳): $\left.\begin{matrix} m=\frac{۱}{۲} \\ p=۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & n \\ ۰ & k & ۰ \\ n & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ این ماتریس قطری نیست

گزینهٔ (۴): $\left.\begin{matrix} m=\frac{۱}{۲} \\ p=۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ این ماتریس صفر است

۲۷ (۲) ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۳ است. چون $A=B$، پس ماتریس B هم از مرتبهٔ ۲×۳ است. بنابراین

$$B=[b_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{۲\times۳}\Rightarrow m=۲,n=۳$$

پس درایه‌های ماتریس A به صورت $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ است. در نتیجه ماتریس B هم دارای همین درایه‌ها است. پس بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس B برابر ۶ است.

۲۸ (۳) در این سؤال فقط درایه‌های قطر فرعی ماتریس C را به‌دست می‌آوریم، یعنی درایه‌های $c_{۱۳}$ و $c_{۲۲}$ و $c_{۳۱}$. با توجه به تعریف ماتریس C که برابر $۳A-۲B$ است، می‌نویسیم

$$c_{۱۳}=۳a_{۱۳}-۲b_{۱۳}=۳(۱^۲+۳)-۲(۲-۱+۳^۲)=۱۲-۲۰=-۸$$

$$c_{۲۲}=۳a_{۲۲}-۲b_{۲۲}=۳(۲^۲+۲)-۲(۲-۲+۲^۲)=۱۸-۸=۱۰$$

$$c_{۳۱}=۳a_{۳۱}-۲b_{۳۱}=۳(۳^۲+۱)-۲(۲-۳+۱^۲)=۳۰-۰=۳۰$$

بنابراین بزرگ‌ترین درایهٔ قطر فرعی ماتریس C برابر ۳۰ است.

۲۹ (۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر ۳×۳ است.

بنابر فرض سؤال مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۲ است، پس

$$۳k=۲\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس $(\frac{۲}{۳})^۳=\frac{۸}{۲۷}$ است.

۳۰ (۲) ابتدا ماتریس $A+B$ را پیدا می‌کنیم.

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 3b\\ 4-c & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b-2\\ 2c & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-2 & 4b-2\\ 4+c & 4\end{bmatrix}$$

چون ماتریس $A+B$ اسکالر است، پس لازم است درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر باشند و درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند.

$$4b-2=0\Rightarrow b=\frac{1}{2},\quad 4+c=0\Rightarrow c=-4,\quad a-2=4\Rightarrow a=6$$

بنابراین

$$2a-4b+c=2(6)-4(\frac{1}{2})+(-4)=12-2-4=6$$

۳۱ (۴) ماتریس سطری ماتریسی است که از یک سطر تشکیل شده باشد و فرم کلی یک ماتریس سطری مثل ماتریس A به صورت $A=[a_{ij}]_{1\times m}$ است.

پس لازم است تعداد سطرهای ماتریس A برابر ۱ باشد. پس

$$n-3=1\Rightarrow n=4$$

اکنون گزینه‌ها را به‌ازای $n=4$ بررسی می‌کنیم

گزینهٔ (۱): $n=4\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 20\end{bmatrix}$ قطری نیست

گزینهٔ (۲): $n=4\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 4\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ قطری نیست

گزینهٔ (۳): $n=4\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ قطری نیست

گزینهٔ (۴): $n=4\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ قطری است

۳۲ (۱) راه‌حل اول ابتدا ضابطهٔ پیدا کردن درایه‌های ماتریس C را پیدا می‌کنیم.

$$C=A-2B=[2j-3i]_{3\times 2}-2[i-2j]_{3\times 2}$$

$$=[2j-3i]_{3\times 2}-[2i-4j]_{3\times 2}=[-5i+6j]_{3\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ -4 & 2\\ -9 & -3\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس C برابر $1+7-4+2-9-3=-6$ است.

راه‌حل دوم ابتدا ماتریس‌های A و B را مشخص می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -4 & -2\\ -7 & -5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$C=A-2B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -4 & -2\\ -7 & -5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ -4 & 2\\ -9 & -3\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس C برابر $1+7-4+2-9-3=-6$ است.

۳۳ (۴) ابتدا ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A-2B=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{2}\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایهٔ قطر فرعی ماتریس $A-2B$ برابر $\frac{5}{2}$ است.

۳۴ (۳) می‌توان نوشت

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}x-y=3\\ x+y=9\\ z-1=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\\ z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow$$ ماتریس اسکالر

۳۵ (۴) درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس A برابر $3k$ است. پس

$$a_{22}=3k\Rightarrow 4k-8=3k\Rightarrow k=8$$

پس $A=[8i^2-j^3]$. بنابراین

$$\text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی}=a_{11}\times a_{22}=(8-1)(32-8)$$
$$=7\times 24=168$$

۳۶ (۴) تعداد سطرهای ماتریس A برابر $3n-4$ و تعداد ستون‌های آن برابر $2n+3$ است. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم

$$\text{تعداد ستون‌ها}=\text{تعداد سطرها}+5\Rightarrow 2n+3=3n-4+5\Rightarrow n=2$$

بنابراین مرتبهٔ ماتریس A برابر $(3n-4)\times(2n+3)=2\times 7$ است. پس سطر دوم آن ۷ درایه دارد.

۳۷ (۲) درایهٔ سطر آخر و ستون آخر ماتریس B درایهٔ b_{mn} است. پس

$$b_{mn}=0\Rightarrow 3m-mn-5n=0\Rightarrow m(3-n)=5n\Rightarrow m=\frac{5n}{3-n}\qquad(1)$$

می‌دانیم m و n اعداد طبیعی هستند. بنابراین $3-n>0$ پس $n<3$. چون n طبیعی است، در نتیجه $1\leq n<3$. بنابراین حالت‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم:

$$n=1\xrightarrow{\text{از }(1)}m=\frac{5}{2}\ (\text{غ.ق.ق}),\quad n=2\xrightarrow{\text{از }(1)}m=\frac{10}{3-2}=10$$

پس ماتریس B از مرتبهٔ 2×10 است. پس این ماتریس $2\times 10=20$ درایه دارد.

۳۸ (۳) توجه کنید که همهٔ درایه‌های ماتریس مطلوب A در رابطهٔ $a_{ij}=-a_{ji}$ صدق می‌کنند، پس $a_{12}=-a_{21}$ و $a_{13}=-a_{31}$ و $a_{23}=-a_{32}$. به عبارت دیگر درایه‌های متناظر بالا و پایین قطر اصلی قرینهٔ یکدیگر هستند. در ضمن درایه‌های روی قطر اصلی در رابطهٔ $a_{ii}=-a_{ii}$ صدق می‌کنند، پس درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس صفر هستند. این ویژگی‌ها تنها در ماتریس گزینهٔ (۳) برقرار است.

$$A=[\sin(i-j)]_{3\times 3}=\begin{bmatrix}\sin(1-1) & \sin(1-2) & \sin(1-3)\\ \sin(2-1) & \sin(2-2) & \sin(2-3)\\ \sin(3-1) & \sin(3-2) & \sin(3-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin 0 & \sin(-1) & \sin(-2)\\ \sin 1 & \sin 0 & \sin(-1)\\ \sin 2 & \sin 1 & \sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\sin 1 & -\sin 2\\ \sin 1 & 0 & -\sin 1\\ \sin 2 & \sin 1 & 0\end{bmatrix}$$

دقت کنید که درایه‌های سایر گزینه‌ها در رابطهٔ $a_{ij}=-a_{ji}$ صدق نمی‌کنند. در واقع هیچ درایه‌ای روی قطر اصلی آن‌ها برابر صفر نیست.