نشر الگو

موج ۲۰

مرحله‌ای و جامع

ویژهٔ آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

حسابان دوازدهم

(ریاضی)

شیدا شاداب

- درس‌نامه برای مرور مطالب
- امتحان‌های درس به درس
- امتحان‌های فصل به فصل
- امتحان‌های نیم‌سال اول و دوم
- امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی
- امتحان‌های نهایی اخیر
- نکات آموزشی برای مرور
- پاسخ‌های تشریحی + کلید تصحیح

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خداقوت جانانه به شما دانش‌آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمرهٔ مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعهٔ آن، کسب نمرهٔ ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ دارای درس‌نامه‌ای مختصر، کامل و مفید با عنوان مرورنامه است. مرورنامه به شما کمک می‌کند تمام مطالب کتاب درسی را به آسانی مرور کنید. همچنین در مرورنامه مثال‌های خوب و کاربردی آورده شده است تا بتوانید مفاهیم و نکات را بهتر درک کنید.

۲ آزمون‌محور است، بدین صورت که با آزمون‌های مختلف مطالب کتاب درسی بیان می‌شود؛

۳ پاسخنامهٔ آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعهٔ دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۴ همهٔ مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۵ این کتاب برای هر دانش‌آموز در هر سطحی مناسب است. دانش‌آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمرهٔ مناسبی کسب کنند.

این کتاب دارای ۳۶ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس و آزمون‌های فصل ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	توضیحات
درس به درس	۱۲	هر درس ۱ آزمون
آزمون فصل	۵	هر فصل ۱ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول، فصل دوم و فصل سوم
نیم‌سال دوم	۲	فصل چهارم و فصل پنجم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۳	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۴	۲	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی حسابان ۲ است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

شیدا شاداب

فهرست مطالب

مرورنامه

فصل اول - درس دوم

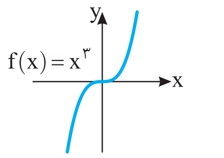
تابع درجهٔ سوم، توابع یکنوا، بخش‌پذیری و تقسیم

توابع چندجمله‌ای

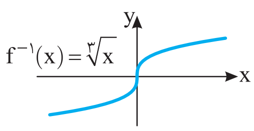
تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n

هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ است، که در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است، a_0، a_1، ... و a_n عددهایی حقیقی هستند و $a_n\neq 0$، تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

تذکر توجه کنید که برای $f(x)=0$ درجه تعریف نمی‌شود.



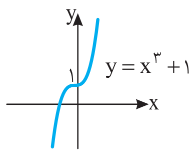
نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ ۳ با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ به‌صورت روبه‌رو است. چون هر خط موازی محور x نمودار این تابع را قطع می‌کند، پس برد این تابع $\mathbb{R}$ است (توجه کنید که طبق تعریف، دامنهٔ این تابع هم $\mathbb{R}$ است). همین‌طور چون هر خط موازی محور x این نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع یک‌به‌یک نیز هست. به این ترتیب، تابع f وارون‌پذیر است و چون $y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$



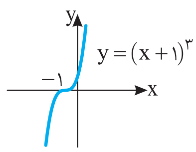
پس $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. توجه کنید که چون $D_f=R_f=\mathbb{R}$، پس $D_{f^{-1}}=R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است، که در شکل روبه‌رو نشان داده شده است.

مثال



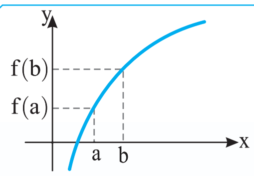
برای رسم نمودار تابع $y=x^3+1$، ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^3+1$ به‌دست بیاید.



برای رسم نمودار تابع $y=(x+1)^3$، ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=(x+1)^3$ به‌دست بیاید.

توابع صعودی و توابع نزولی

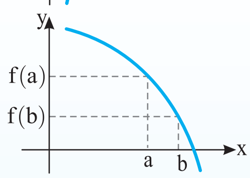
توابع اکیداً یکنوا و یکنوا



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

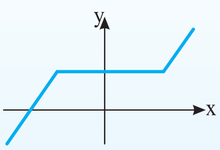


- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً نزولی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

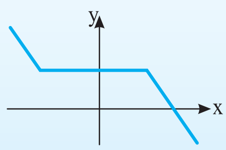
- اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A اکیداً یکنوا است.



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\leq f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش صعودی است.



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ نزولی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\geq f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش نزولی است.

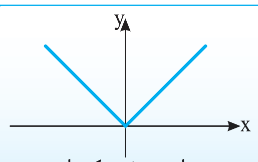
- اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A یکنوا است. اگر $A=D_f$ می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش یکنوا است.

تذکر تابع ثابت روی هر زیرمجموعه از دامنه‌اش هم صعودی است و هم نزولی. همچنین تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

تذکر وقتی می‌گوییم «تابع f صعودی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش صعودی است و وقتی می‌گوییم «تابع f نزولی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش نزولی است.

تابع غیریکنوا

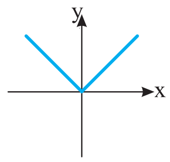
اگر تابع f روی مجموعهٔ $A \subseteq D_f$ نه صعودی باشد نه نزولی، روی این مجموعه تابعی غیریکنواست.

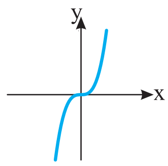


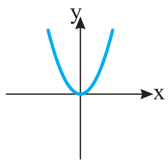
تابعی غیریکنوا

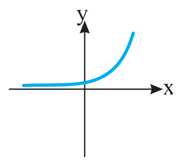
مثال

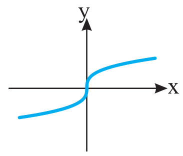
نمودار توابع معروف را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم. با توجه به نمودار آنها صعودی (اکید)، نزولی (اکید) یا غیریکنوا بودن هر تابع مشخص است.

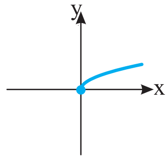

$y=|x|$، غیریکنوا

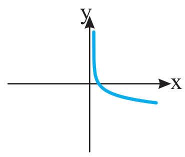

$y=x^{۳}$، اکیداً صعودی

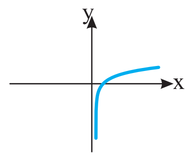

$y=x^{۲}$، غیریکنوا

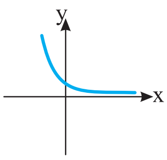

$y=a^x\ ,\ a>۱$، اکیداً صعودی

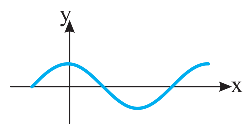

$y=\sqrt[۳]{x}$، اکیداً صعودی

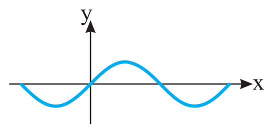

$y=\sqrt{x}$، اکیداً صعودی

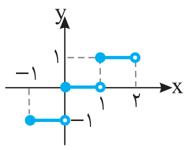

$y=\log_a x\ ,\ ۰<a<۱$، اکیداً نزولی


$y=\log_a x\ ,\ a>۱$، اکیداً صعودی


$y=a^x\ ,\ ۰<a<۱$، اکیداً نزولی


$y=\cos x$، غیریکنوا

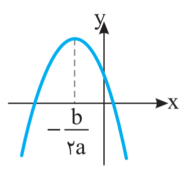

$y=\sin x$، غیریکنوا



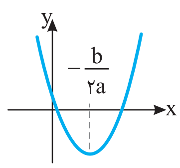
$y=[x]$، صعودی

تذکر تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

- اگر $a>۰$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, -\frac{b}{۲a}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{۲a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
- اگر $a<۰$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, -\frac{b}{۲a}]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{۲a}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



$f(x)=ax^{۲}+bx+c\ ,\ a<۰$



$f(x)=ax^{۲}+bx+c\ ,\ a>۰$

توابع اکیداً یکنوا و نابرابری‌ها

اگر تابع f روی بازهٔ I اکیداً صعودی باشد، به‌ازای هر a و b در I، $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$ و اگر تابع f روی بازهٔ I اکیداً نزولی باشد، به‌ازای هر a و b در I، $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

- تابع‌های $y=x^3$ و $y=\sqrt[3]{x}$ و در حالت کلی تابع‌های $y=x^{2n+1}$ و $y=\sqrt[2n+1]{x}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند. پس

$$\begin{cases} a<b \Rightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1} \\ a<b \Rightarrow \sqrt[2n+1]{a}<\sqrt[2n+1]{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} a<b \Rightarrow a^3<b^3 \\ a<b \Rightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b} \end{cases}$$

در واقع می‌توان دو طرف نابرابری را (بدون تغییر جهت نابرابری) به توان فرد رساند و یا از آن ریشهٔ فرد گرفت.

- تابع‌های $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ و در حالت کلی تابع‌های $y=x^{2n}$ و $y=\sqrt[2n]{x}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی هستند. پس به‌ازای هر دو عدد حقیقی و نامنفی مانند a و b،

$$\begin{cases} 0\le a<b \Rightarrow a^{2n}<b^{2n} \\ 0\le a<b \Rightarrow \sqrt[2n]{a}<\sqrt[2n]{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le a<b \Rightarrow a^2<b^2 \\ 0\le a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b} \end{cases}$$

- تابع $y=x^2$ و در حالت کلی تابع $y=x^{2n}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی هستند. پس به‌ازای هر دو عدد حقیقی و غیرمثبت مانند a و b،

$$a<b\le 0 \Rightarrow a^{2n}>b^{2n} \qquad a<b\le 0 \Rightarrow a^2>b^2$$

- اگر $a>1$، تابع $y=\log_a x$ روی $(0,+\infty)$ و تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند. پس

$$x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2} \qquad 0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$$

- اگر $0<a<1$، تابع $y=\log_a x$ روی $(0,+\infty)$ و تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند. پس

$$x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2} \qquad 0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$$

نکته

الف) اگر تابع f صعودی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a<b$.
ب) اگر تابع f نزولی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a>b$.
پ) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.
ت) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.

بخش‌پذیری و تقسیم

قضیه — تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

فرض کنید $p(x)$ و $s(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $s(x)$ ثابت نباشد. در این صورت چندجمله‌ای‌هایی منحصربه‌فرد مانند $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $s(x)$ کمتر است یا $r(x)=0$ و $p(x)=s(x)q(x)+r(x)$. $q(x)$ را خارج‌قسمت تقسیم $p(x)$ بر $s(x)$ و $r(x)$ می‌نامند و باقی‌ماندهٔ این تقسیم است.

اگر در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $s(x)$ باقی‌مانده برابر صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $s(x)$ بخش‌پذیر است.

قضیه

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $ax+b$ برابر است با $p(-\frac{b}{a})$.

مثال

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=9x^3+3x^2+x+2$ بر $3x-1$ برابر است با $p(\frac{1}{3})=9(\frac{1}{3})^3+3(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}+2=3$.

چند اتحاد مهم

اگر x و y عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه
$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

و اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه
$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

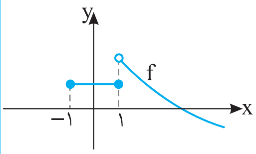
و اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه
$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

آزمون ۲

موضوع آزمون: فصل اول - درس دوم

صفحات پاسخ: ۸۱ تا ۸۲

امتحان نهایی: **حسابان ۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۷۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** تابع f در بازهٔ شامل a و b صعودی است. در این صورت اگر $f(a)<f(b)$ آن‌گاه $a<b$. **ب)** چندجمله‌ای $p(x)=(2-x)^2(x+1)^3$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ است. (شهریور ۹۹) **پ)** تابع $y=-x^2+2x$ روی بازهٔ $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی است.	۰/۷۵
۲	**جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** **الف)** برای آنکه تابع $y=ax+b$ در دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار a باید برابر با .... باشد. (خرداد ۹۹ - خارج) **ب)** اگر چندجمله‌ای $p(x)=8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه مقدار k برابر با .... است. **پ)** نمودار تابع f در بازهٔ $[1,+\infty)$، .... است. (یکنوا - غیریکنوا)  	۰/۷۵
۳	**در چندجمله‌ای $p(x)=x^3+ax^2+b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر -1 و $p(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد.** (دی ۱۴۰۱)	۱
۴	**الف)** چندجمله‌ای x^6-1 را بر حسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید. (خرداد ۹۸) **ب)** عبارت $\dfrac{x^5+1}{x+1}$ را ساده کنید. (دی ۱۴۰۱)	۱
۵	**الف)** در $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-2x}\leq\left(\dfrac{1}{81}\right)$، حدود x را به‌دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰) **ب)** اگر $\log(x+1)\leq\log(2x-3)$، حدود x را مشخص کنید. (شهریور ۹۸)	۱
۶	**نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی، در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت است.** **الف)** $f(x)=x+\|x+1\|$ **ب)** $g(x)=\begin{cases}\|x-2\| & x\geq 1\\ -2 & -1\leq x<1\\ (x+2)^3 & x<-1\end{cases}$	۲
۷	**الف)** تابع نمایی $f(x)=(3k+1)^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود k را مشخص کنید. **ب)** تابع $f(x)=2x^2-10x$ روی بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a را بیابید. **پ)** تابع لگاریتمی $f(x)=-\log_2(x+1)-1$ روی بازهٔ $(a,+\infty)$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a را بیابید.	۱/۵
۸	**الف)** تابعی مانند f با دامنهٔ $[0,+\infty)$ مثال بزنید که $f(2)=3$ و تابع روی بازهٔ $[0,2]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد. **ب)** نمودار تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را رسم کنید که در هریک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، اما روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی نباشد.	۱
۹	**اگر تابع‌های f و g در یک بازه اکیداً صعودی باشند، نشان دهید تابع $f+g$ هم در این بازه اکیداً صعودی است.**	۱
	موفق و سربلند باشید. جمع نمره	۱۰

آزمون ۳

موضوع آزمون	صفحات پاسخ
فصل اول	۸۲ تا ۸۵

امتحان نهایی: **حسابان ۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۷۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره

۱ **درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** — نمره: ۱

الف) اگر نمودار تابع $y=x^2$ را سه واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=x^2+6x+10$ به‌دست می‌آید.

ب) نقطهٔ $(-x_0, -y_0)$ از نمودار تابع $y=-f(x)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

پ) ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا اما روی زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش یکنوا باشد.

ت) باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=9x^3+3x^2+x+2$ بر $3x-1$ برابر $P(-\frac{1}{3})$ است.

۲ **جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** — نمره: ۱

الف) نقطهٔ $(-x_0, -y_0)$ از نمودار تابع .... متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

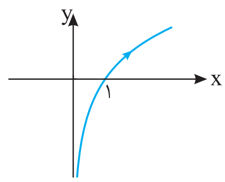
ب) اگر $0<k<1$ آن‌گاه نمودار تابع $y=f(kx)$ از .... نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. (انبساط افقی – انقباض عمودی)

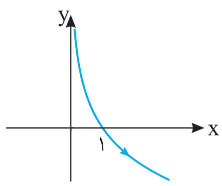
پ) تابع ثابت روی هر زیرمجموعه از دامنه‌اش .... است. (هم صعودی و هم نزولی – نه صعودی و نه نزولی)

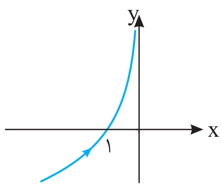
ت) اگر $k=\cdots\cdots\cdots$، آن‌گاه چندجمله‌ای $P(x)=8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است.

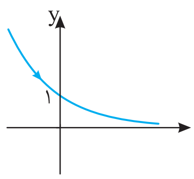
۳ **گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.** — نمره: ۱

الف) تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $y=-f(x)$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

ب) دامنهٔ تابع $y=3f(2x-1)+2$ بازهٔ $[-1, 2]$ است. دامنهٔ تابع $y=f(x)$ کدام است؟

۱) $[-2, 4]$ ۲) $[-3, 3]$ ۳) $[-1, 5]$ ۴) $[\frac{1}{2}, 2]$

پ) تجزیهٔ عبارت x^5+32 به کدام صورت است؟

۱) $(x-2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$ ۲) $(x+2)(x^4-2x^3-4x^2-8x-16)$

۳) $(x+2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$ ۴) $(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

ت) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$ در آن اکیداً یکنوا است کدام است؟

۱) $[0, +\infty)$ ۲) $(-\infty, 0]$ ۳) $(-\infty, +\infty)$ ۴) $[1, +\infty)$

۴ **تابع زیر را رسم کنید و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f در آن صعودی است را مشخص کنید.** — نمره: ۱

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leq -5 \\ \sqrt{x+5} & -5<x\leq 4 \\ -x+1 & x>4 \end{cases}$$

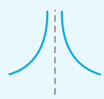
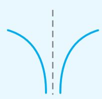
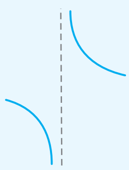
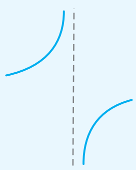
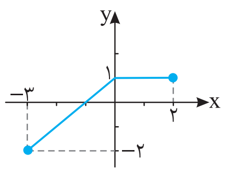
۵ **تابع $f(x)=-\cos(x+\frac{\pi}{3})$ روی بازهٔ $[0, a]$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a را بیابید.** — نمره: ۰/۷۵

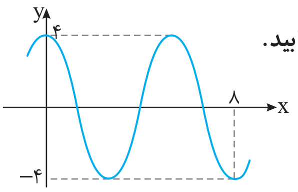
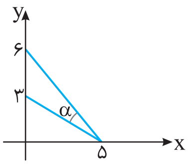
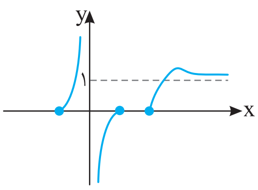
آزمون ۱۳

موضوع آزمون: نیمسال اول (۴)

صفحات پاسخ: ۱۰۱ تا ۱۰۳

امتحان نهایی: **حسابان ۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** اگر f و g در یک بازه اکیداً صعودی باشند، آن‌گاه $f-g$ نیز در آن بازه اکیداً صعودی است. **ب)** دورهٔ تناوب تابع $y=\|\tan x\|$ برابر 2π است. **پ)** اگر n عددی فرد باشد، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ برابر $-\infty$ است. **ت)** نمودار تابع $y=\dfrac{x^2+x}{x^2}$ مجانب قائم ندارد.	۱
۲	**جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** **الف)** اگر f تابعی صعودی باشد و $k<0$، آن‌گاه تابع $y=kf(x)$ تابعی .... است. **ب)** دامنهٔ تابع $f(x)=\tan 2x$ برابر .... است. **پ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+2}$ برابر است با .... **ت)** اگر $\tan a=3$ و $\tan(a+b)=2$، مقدار $\tan b$ برابر .... است.	۱
۳	**گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.** **الف)** نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف و عرض آن‌ها را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟ ۱) $y=2f(4x-2)-1$ ۲) $y=2f(4x-2)-2$ ۳) $y=2f(4x-1)-1$ ۴) $y=2f(4x-1)-2$ **ب)** نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ در اطراف نقطهٔ $x=1$ به کدام شکل است؟ ۱)  ۲)  ۳)  ۴) 	۰/۵
۴	نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(-2x)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را مشخص کنید و تعیین کنید تابع در کدام بازه هم صعودی است و هم نزولی؟ 	۱/۵
۵	**الف)** نمودار تابع $f(x)=-2\sin(\frac{x}{2})+1$ را در بازهٔ $[-3\pi, 3\pi]$ رسم کنید. **ب)** دو بازه را که تابع f در آن‌ها صعودی است مشخص کنید.	۱/۵

ردیف	سؤالات	نمره
۶	باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^{۲}-۶x+۸$ برابر $x-۳$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ چقدر است؟	۱
۷	اگر x و y عددهایی متمایز باشند و $x^{۶}-y^{۶}=۲(x-y)$، حاصل عبارت $(x+y)(x^{۴}+y^{۴}+x^{۲}y^{۲})$ را حساب کنید.	۱
۸	الف) a عددی صحیح و تابع $f=\{(-a^{۲}-۱, a), (۰, ۲), (a^{۲}+۱, ۲a+۱)\}$ اکیداً صعودی است. مقدار a را بیابید. ب) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{۰/۵}(x+۴)\leq\log_{۰/۵}(۲x+۲)$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۹	مقدار تابع $f(x)=-۴\cos(\frac{x}{۲})$ الف) در چه نقاطی حداقل است؟ این مقدار را مشخص کنید. ب) در چه نقاطی حداکثر است؟ این مقدار را مشخص کنید. پ) در چه نقاطی صفر است؟	۱/۲۵
۱۰	قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\sin((\frac{۵}{۲}+bx)\pi)$ به صورت مقابل است. مقدار a و b را بیابید. 	۱/۲۵
۱۱	الف) جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos^{۴}x-\sin^{۴}x=\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. ب) جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x\tan ۲x=۱$ را به‌دست آورید.	۲
۱۲	در شکل مقابل $\tan\alpha$ را محاسبه کنید. 	۱
۱۳	حاصل حدهای خواسته شده را به‌دست آورید. ۱) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\frac{۱-\tan x}{۱+\sin x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to۰^{-}}\frac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x}$ ۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x(x+۱)}{(x+۱)^{۲}+(x-۱)^{۲}}$	۲
۱۴	الف) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to۳}\frac{x-۴}{x^{۲}+ax+b}=-\infty$. ب) به ازای چه مقداری از k تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-kx+۱}{x-۱}$ مجانب قائم ندارد؟	۱/۵
۱۵	مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}-۶x+۹}}{x+۲}$ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۶	با توجه به نمودار داده شده، حاصل حدهای مورد نظر را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to۰^{-}}f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to۰^{+}}f(x)$ 	۰/۷۵
	موفق و سربلند باشید. جمع نمره	۲۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	اگر $f(x)=\tan^{۲} x$، مقدار $f''(\frac{\pi}{۳})$ را تعیین کنید.	۱
۱۲	مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}$ را روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},۱]$ بیابید.	۱
۱۳	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+b$ نقطهٔ $(-۲,۱۵)$ باشد.	۱
۱۴	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}$ را رسم کنید.	۲
	موفق و سربلند باشید. جمع نمره	۲۰

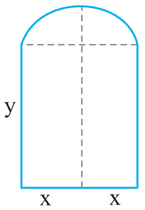
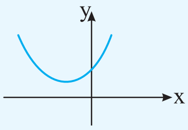
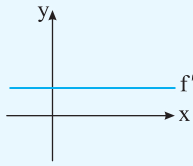
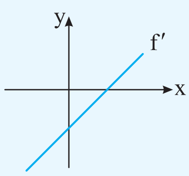
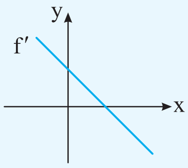
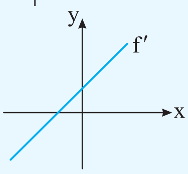
آزمون ۲۳

موضوع آزمون: نیمسال دوم (۲)

صفحات پاسخ: ۱۱۶ تا ۱۱۸

امتحان نهایی: حسابان ۲	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتق‌پذیر برابر حاصل‌ضرب مشتق‌های آن‌هاست. **ب)** مقدار مشتق در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی برابر صفر است. **پ)** ماکزیمم مطلق تابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ در یکی از دو سر بازه به‌دست می‌آید. **ت)** اگر در یک بازه همهٔ خط‌های مماس بر نمودار تابع زیر منحنی باشند، جهت تقعر تابع روی این بازه رو به بالاست.	۱
۲	**در جای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.** **الف)** تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر .... **ب)** اگر $f'(۵)=۲$ و $g'(۵)=-۱$، آن‌گاه $(۲f-g)'(۵)$ برابر با .... است. **پ)** مجموع طول نقطه‌های بحرانی تابع $y=x^{۳}-۶x^{۲}+x-۱$ برابر با .... است. **ت)** نقطهٔ عطف تابع $y=\sqrt[۳]{x-۱}$ نقطهٔ .... است.	۱
۳	**الف)** مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۱)^{۳} & x\leq ۰\\ ax+a+b & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد. **ب)** اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ و $g(-۱)=g'(-۱)=\frac{۱}{۲}$، مشتق تابع $y=(fog)(x)$ را به ازای $x=-۱$ حساب کنید.	۳
۴	نشان دهید نقطه به طول $x=-۱$، نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع $f(x)=\|x^{۲}+x\|$ است.	۲
۵	معادلهٔ نیم‌مماس راست تابع $f(x)=\|x^{۲}-۱\|$ را در نقطهٔ $x=۱$ بنویسید.	۱/۲۵
۶	اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ سه برابر آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۲,a]$ باشد، مقدار a را به‌دست آورید.	۱/۵
۷	**مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)** **الف)** $f(x)=\frac{۶x+۲}{x(۳x-۱)}$ **ب)** $f(x)=\frac{\sin x}{۲+\cos ۲x}$	۱/۷۵

ردیف	سؤالات	نمره
۸	نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt{-x^3+3x^2}$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۹	ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$ روی بازهٔ $[0,3]$ چقدر است؟	۱
۱۰	مطابق شکل مقابل می‌خواهیم پنجره‌ای به محیط ۴ متر بسازیم که از یک مستطیل و یک نیم‌دایره تشکیل شده است. مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که بیشترین میزان نور از پنجره به درون بتابد. 	۱/۵
۱۱	با توجه به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید. (دی ۱۴۰۱)  الف)  ب)  پ)  ت) 	۰/۷۵
۱۲	جهت تقعر و مختصات نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x(x^2-3)+1$ را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۱)	۱
۱۳	a را طوری مشخص کنید که نمودار تابع $f(x)=ax^4+(a-1)x^3-x+1$ نقطهٔ عطف نداشته باشد.	۱
۱۴	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1-3x}{2-2x}$ را رسم کنید.	۲
	موفق و سربلند باشید. جمع نمره	۲۰

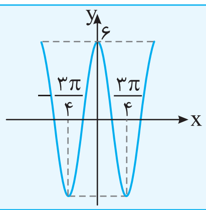
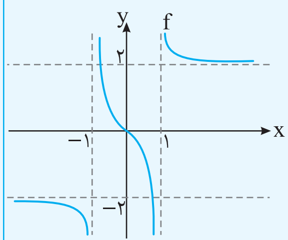
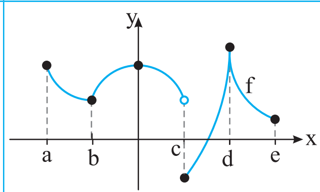
آزمون ۲۴

موضوع آزمون: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی

صفحات پاسخ: ۱۱۸ تا ۱۲۱

امتحان نهایی: **حسابان ۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

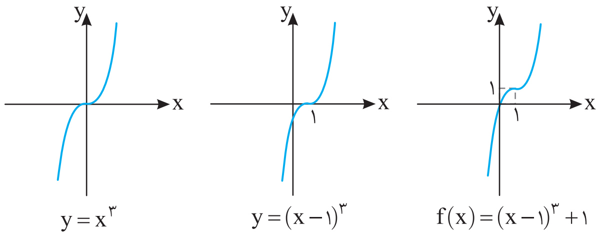
ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** تابع $f(x)=-x^3+x^2-5$ روی بازهٔ $(0,a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a برابر $\frac{2}{3}$ است. **ب)** خط $x=1$ مماس قائم بر نمودار تابع $y=\sqrt[3]{1-x}$ در نقطهٔ $(1,0)$ است. **پ)** اگر $f(x)=x^3-4x^2+3x-1$، مقدار $f''(2)$ برابر ۴ است.	۰/۷۵
۲	**جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** **الف)** اگر $\tan(a-b)=\frac{1}{3}$ و $\tan(a+b)=2$، مقدار $\tan 2a$ برابر با .... است. **ب)** اگر f یک تابع باشد و $I\subseteq D_f$ یک همسایگی نقطهٔ c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک .... تابع f می‌نامیم. **پ)** اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $g(x)=x^3-3x$، مقدار $(fog)'(-1)$ برابر با .... است.	۰/۷۵

ردیف	سؤالات	نمره
۳	الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+1}+2$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=-(x-1)^3$ را قطع می‌کند؟ (با رسم نمودار) ب) طول نقاط روی نمودار تابع f را دو برابر و عرض آن‌ها را نصف می‌کنیم. سپس نمودار حاصل را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و در آخر آن را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی را که نمودار آن رسم شده است، بنویسید.	۱/۲۵
۴	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^3-ax^2+bx-1$ بر $x-1$ برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)=ax^2-2bx+1$ بر $x-2$ را تعیین کنید.	۰/۵
۵	الف) شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\cos bx$ است. ضابطهٔ تابع را کامل کنید.  ب) نمودار تابع $y=\lvert\cos x\rvert$ را در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید و دورهٔ تناوب آن را مشخص کنید.	۱/۲۵
۶	معادلهٔ $\sqrt{3}\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-1=0$ را حل کنید.	۱
۷	الف) حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. ۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{2-\sqrt{x+2}}$ ب) با توجه به نمودار تابع f، مقدار حدهای زیر را مشخص کنید.  ۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$	۱/۵
۸	نشان دهید $x=1$ برای تابع $f(x)=2\lvert\sqrt{x}-1\rvert$ یک نقطهٔ گوشه‌ای است. (رسم نمودار تابع الزامی نیست.)	۱/۲۵
۹	الف) اگر $f(x)=(x^3-x^2-1)(x-\sqrt{x}+5)$، مشتق تابع f را بنویسید. ب) اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مقدار $g(-2)$ را بیابید.	۱
۱۰	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\geq 1 \\ x^3-x^2 & x<1 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی کنید.	۱
۱۱	اگر $f(x)=x$، $g(x)=x^2$ و $h(x)=\sqrt{x}$، مقدار مشتق $(f+h)og$ در نقطهٔ $x=-1$ را به‌دست آورید.	۱
۱۲	خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطهٔ $(2,\frac{1}{2})$ محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟	۱
۱۳	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^3-3x$ در بازهٔ $[0,1]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در چه نقطه‌ای از این بازه برابر است؟	۱
۱۴	نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.  الف) طول یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f را مشخص کنید. ب) طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f را مشخص کنید.	۱/۵
۱۵	اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2+a$ برابر ۳ باشد، مقدار ماکزیمم نسبی آن را به‌دست آورید.	۱/۲۵

۶ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم و با قرینه کردن آن نسبت به خط $y=x$، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+3x-1+1$$

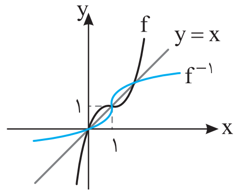
$$f(x)=(x-1)^3+1$$



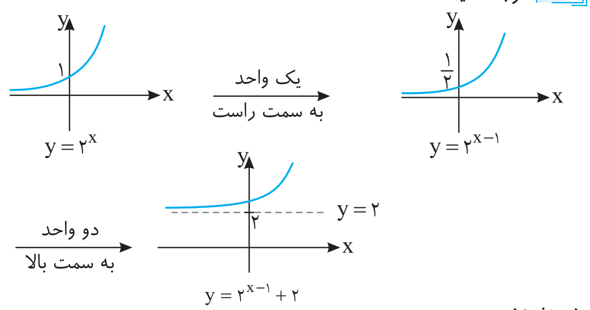
همچنین ضابطهٔ f^{-1} را به‌صورت زیر می‌یابیم.

$$y=(x-1)^3+1 \Rightarrow y-1=(x-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=x-1$$

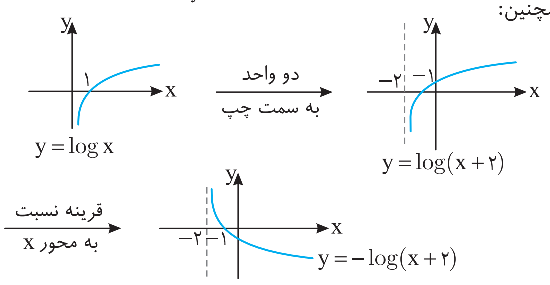
$$\sqrt[3]{y-1}+1=x \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}} y=\sqrt[3]{x-1}+1$$



۷ توجه کنید که:

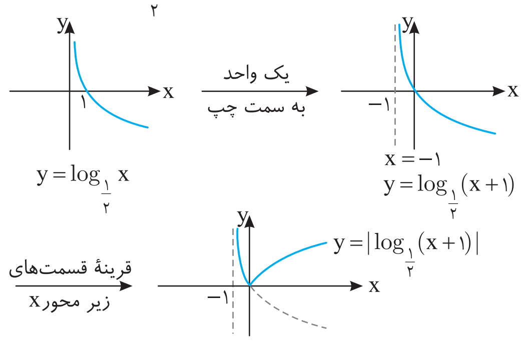


همچنین:



۸ توجه کنید که دامنهٔ f برابر است با $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

برای به‌دست آوردن برد ابتدا این تابع را به کمک تابع $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ رسم می‌کنیم.



بنابراین: $D_f=(-1,+\infty)$, $R_f=[0,+\infty)$

۹ توجه کنید که

$$f(x)=4x^2+4x+1 \Rightarrow f(x)=(2x+1)^2 \xrightarrow{\text{۲واحد به بالا}}$$

$$y=(2x+1)^2+2 \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}$$

$$y=(2(x+1)+1)^2+2=(2x+3)^2+2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}}$$

$$g(x)=-((2x+3)^2+2)=-(2x+3)^2-2$$

۱۰ نقطهٔ (x_0,y_0) روی نمودار تابع f متناظر با نقطهٔ (x_0,y_0+a) روی نمودار تابع $f+a$ است. بنابراین نقطهٔ به عرض ۱− روی نمودار تابع f متناظر با نقطهٔ به عرض $-1+a$ روی نمودار تابع $f+a$ است. در نتیجه

$$-1+a=-3 \Rightarrow a=-2$$

پاسخ تشریحی آزمون (۲)

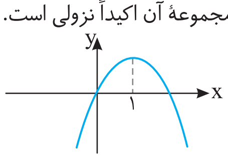
۱ الف) درست. توجه کنید که اگر خلاف حکم درست باشد، آن‌گاه $a\ge b$، در این صورت چون f صعودی است. پس $f(a)\ge f(b)$ که تناقض است. بنابراین $a<b$. ب) درست.

$$p(x)=(x^2-4x+4)(x^3+3x^2+3x+1)=x^5+\cdots$$

پ) نادرست. توجه کنید که

$$y=-(x^2-2x)=-((x-1)^2-1)=-(x-1)^2+1$$

بنابراین تابع در بازهٔ $(-\infty,1]$ یا هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً صعودی است و روی بازهٔ $[1,+\infty)$ یا هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است.



۲ الف) صفر. تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابعی ثابت است. بنابراین باید $a=0$. ب) ۱۲−.

$$p(\tfrac{1}{2})=0 \Rightarrow 8(\tfrac{1}{2})^3+4(\tfrac{1}{2})^2-k(\tfrac{1}{2})-8=0$$

$$1+1-\frac{k}{2}-8=0 \Rightarrow k=-12$$

پ) غیریکنوا. اگر تابع f یکنوا باشد، چون در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=1$ مقادیر f بیشتر از $f(1)$ هستند، پس تابع صعودی است. اما از روی نمودار معلوم است که مقدار تابع f به‌ازای مقادیری بزرگ‌تر از ۱ منفی است، که تناقض است.

۳

$$\begin{cases}p(-2)=-1\\p(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-8+4a+b=-1\\1+a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=7\\a+b=-1\end{cases}\xrightarrow{\times(-1)}$$

$$+\begin{cases}4a+b=7\\-a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{8}{3}\\b=-\frac{11}{3}\end{cases}$$

$$3a=8$$

۴ الف)

$$x^6-1=(-x)^6-1$$

$$=(-x-1)((-x)^5+(-x)^4+(-x)^3+(-x)^2+(-x)+1)$$

$$=-(x+1)(-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$$=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

ب) $\frac{x^5+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1$

۵ الف) توجه کنید که تابع $y=(\frac{1}{3})^x$ اکیداً نزولی است، می‌توان نوشت

$$(\frac{1}{3})^{10-2x}\le\frac{1}{81}\Rightarrow(\frac{1}{3})^{10-2x}\le(\frac{1}{3})^{4}\xrightarrow{y=(\frac{1}{3})^x\ \text{نزولی}}10-2x\ge4$$

$2x\le6\Rightarrow x\le3$

ب) تابع $y=\log x$ اکیداً صعودی است. بنابراین

$$\log(x+1)\le\log(2x-3)\xrightarrow[\text{صعودی}]{y=\log(x)}x+1\le2x-3\Rightarrow x\ge4$$

۶ الف) نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

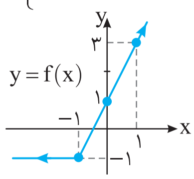
$$f(x)=x+|x+1|=\begin{cases}x+(x+1) & x+1\ge0\\ x+(-(x+1)) & x+1<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x+1 & x\ge-1\\ -1 & x<-1\end{cases}$$

x	-1	0
y	-1	1

تابع ثابت

بنابراین نمودار تابع به صورت مقابل است و داریم:

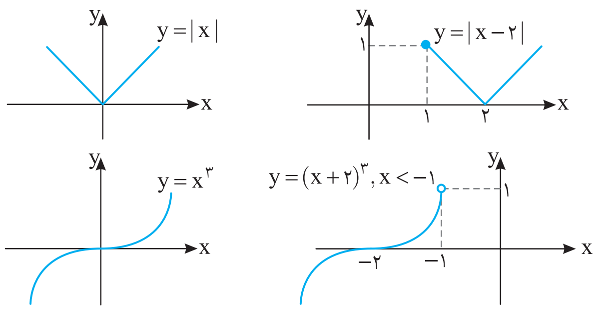


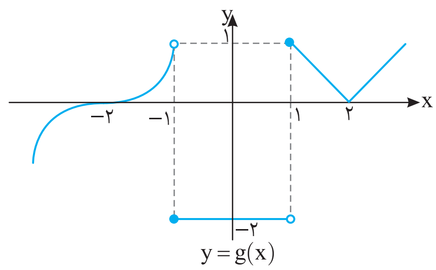
اکیداً صعودی: $[-1,+\infty)$

اکیداً نزولی: -

ثابت: $(-\infty,-1]$

ب) برای رسم نمودار تابع $y=|x-2|$ نمودار تابع $y=|x|$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. توجه کنید که قسمتی از نمودار که مربوط به $x\ge1$ است مورد نظر است. برای رسم نمودار تابع $y=(x+2)^3$ نمودار تابع $y=x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. توجه کنید که قسمتی از نمودار که مربوط به $x<-1$ است، مورد نظر است.





با توجه به نمودار تابع داریم:

اکیداً صعودی: $(-\infty,-1),[2,+\infty)$ اکیداً نزولی: $[1,2]$

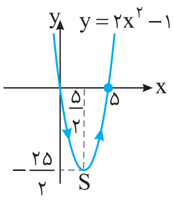
ثابت: $[-1,1)$

۷ الف) توجه کنید که تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>1$ اکیداً صعودی است. بنابراین

$3k+1>1\Rightarrow3k>0\Rightarrow k>0$

ب) نمودار تابع به‌صورت زیر است.

x	0	$\frac{5}{2}$	5
y	0	$-\frac{25}{2}$	0

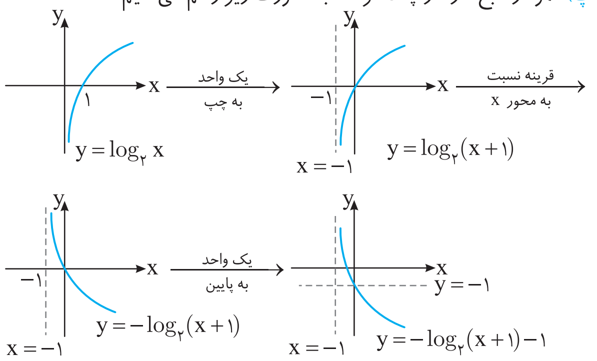


با توجه به نمودار واضح است که تابع f در بازهٔ $(-\infty,\frac{5}{2}]$ اکیداً نزولی است.

بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{5}{2}$ است.

توجه کنید که اگر $f(x)=ax^2+bx+c$ و $a>0$، آن‌گاه تابع f در بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ یا هر زیرمجموعه از آن اکیداً صعودی است.

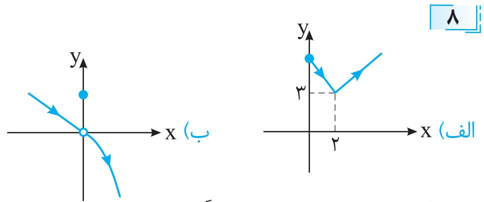
پ) نمودار تابع f را در چند مرحله به صورت زیر رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار واضح است که تابع در بازهٔ $(-1,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

بنابراین کمترین مقدار a برابر -1 است.

۸



۹ تابع f را در یک بازه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)<f(b)$. داریم:

$$a<b\xrightarrow{\text{توابع f و g اکیداً صعودی}}\begin{cases}f(a)<f(b)\\ g(a)<g(b)\end{cases}\xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم}]{\text{دو طرف نابرابری‌ها}}$$

$$f(a)+g(a)<f(b)+g(b)\Rightarrow(f+g)(a)<(f+g)(b)$$

در نتیجه تابع $f+g$ هم در این بازه اکیداً صعودی است.

پاسخ تشریحی آزمون (۳)

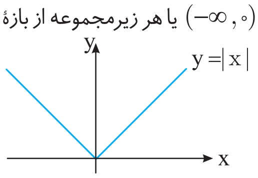
۱ الف) درست. دقت کنید که

$$y=x^2\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=(x+3)^2\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}}$$

$$y=(x+3)^2+1=x^2+6x+9+1=x^2+6x+10$$

ب) نادرست. نقاط نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x هستند. بنابراین کافی است عرض نقاط نمودار تابع f را قرینه کنیم. یعنی اگر $(x_0,y_0)\in f$ آن‌گاه $(x_0,-y_0)\in -f$.

پ) درست. به‌عنوان مثال به نمودار تابع $y=|x|$ دقت کنید. این نمودار روی دامنه‌اش یعنی ℝ غیریکنوا است (زیرا روی $(-\infty,0)$ نزولی و روی $[0,+\infty)$ صعودی است) اما روی بازهٔ $(-\infty,0)$ یکنواست. توجه کنید که این تابع روی هر زیرمجموعه از بازهٔ $(-\infty,0)$ یا هر زیرمجموعه از بازهٔ $[0,+\infty)$ یکنواست.



ت) نادرست. می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)=ax+b$ برای $P(\frac{-b}{a})$ است ($\frac{-b}{a}$ ریشهٔ چندجمله‌ای $Q(x)$ است).

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۳x-۱$ برابر است با $P(\frac{۱}{۳})$. زیرا

$$۳x-۱=۰ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

۲ الف) $y=-f(-x)$. دقت کنید که

$$(x_۰,y_۰)\in f(x) \xrightarrow[\text{و محور } y]{\text{قرینه نسبت به محور } x} (-x_۰,-y_۰)\in -f(-x)$$

ب) انبساط افقی.

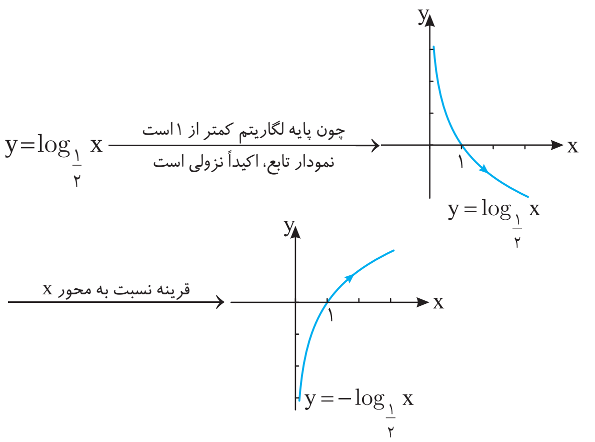
پ) هم صعودی و هم نزولی.

ت) -۱۲. توجه کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $۲x-۱$ بخش‌پذیر است، هرگاه $P(\frac{۱}{۲})=۰$. پس

$$P(\frac{۱}{۲})=۸(\frac{۱}{۲})^۳+۴(\frac{۱}{۲})^۲-k(\frac{۱}{۲})-۸=۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}k-۶=۰$$

$$-\frac{۱}{۲}k=۶ \Rightarrow k=-۱۲$$

۳ الف) گزینهٔ (۱): برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.



ب) گزینهٔ (۲): ابتدا توجه کنید که فقط تغییرات روی x می‌تواند بر دامنهٔ تابع تأثیر بگذارد.

$$y=۳f(۲x-۱)+۲,\ D=[-۱,۲] \Rightarrow -۱\le x\le ۲ \xrightarrow{\text{۲x را می‌سازیم}}$$

$$-۲\le ۲x\le ۴ \xrightarrow{-۱} -۳\le ۲x-۱\le ۳ \Rightarrow D_f=[-۳,۳]$$

پ) گزینهٔ (۴): توجه کنید اگر n طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-۱}-x^{n-۲}y+x^{n-۳}y^۲-\dots-xy^{n-۲}+y^{n-۱})$$

از طرف دیگر $x^۵+۳۲=x^۵+۲^۵$، پس کافی است در اتحاد بالا قرار دهیم $y=۲$ و $n=۵$. در نتیجه

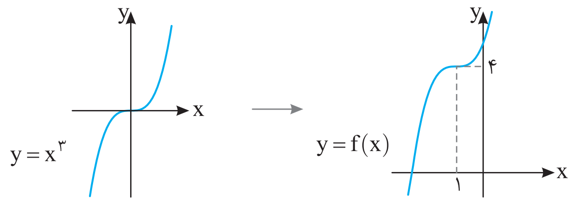
$$x^۵+۳۲=x^۵+۲^۵=(x+۲)(x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۸x+۱۶)$$

ت) گزینهٔ (۳): نمودار این تابع را رسم می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۵=x^۳+۳x^۲+۳x+۱+۴$$

$$f(x)=(x+۱)^۳+۴$$

برای رسم نمودار تابع f، کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را ابتدا یک واحد به چپ و سپس ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



با توجه به نمودار، این تابع در دامنهٔ خود یعنی $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۴ برای رسم تابع سه ضابطه‌ای، هر ضابطه را در دامنهٔ مربوط به خودش رسم می‌کنیم:

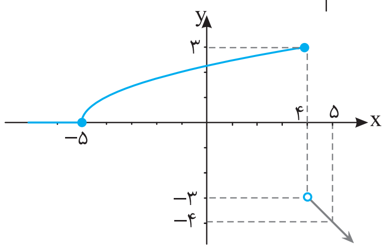
ضابطهٔ اول: $y=۰,\quad x\le -۵$

ضابطهٔ دوم: $y=\sqrt{x+۵},\quad -۵<x\le ۴$

برای رسم این قسمت از نمودار، نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۵ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و فقط آن قسمتی از نمودار را در نظر می‌گیریم که $-۵<x\le ۴$.

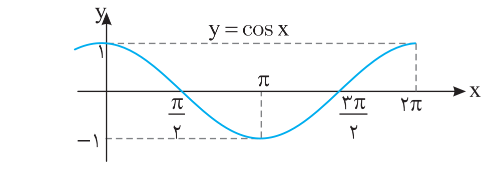
ضابطهٔ سوم: $y=-x+۱ \xrightarrow[x>۴ \text{ پیدا می‌کنیم}]{\text{دو نقطه از خط را}}$

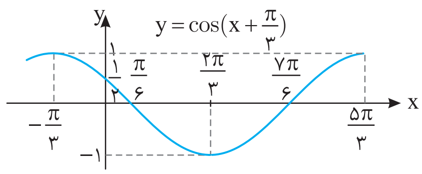
x	۴	۵
y	−۳	−۴

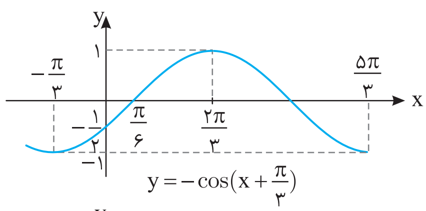


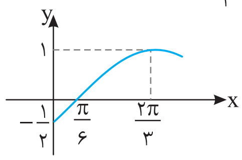
با توجه به نمودار رسم شده، تابع در بازهٔ $(-\infty,-۵]$ ثابت یعنی هم صعودی و هم نزولی است. همچنین تابع در بازهٔ $(-۵,۴]$ اکیداً صعودی است، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی است، بازهٔ $(-\infty,۴]$ است.

۵ نمودار تابع $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۳}$ به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\cos(x+\frac{\pi}{۳})$ رسم شود. از قرینه کردن نمودار به‌دست آمده نسبت به محور x نمودار تابع $f(x)=-\cos(x+\frac{\pi}{۳})$ به‌دست می‌آید.









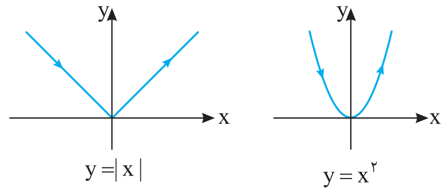
با توجه به نمودار، تابع روی بازهٔ $[۰,\frac{۲\pi}{۳}]$ اکیداً صعودی است. بنابراین $a=\frac{۲\pi}{۳}$.

۶ الف) اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و $f(a)>f(b)$ آنگاه $a<b$.

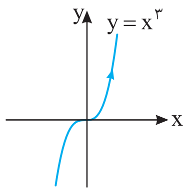
$$\left(\frac{1}{10}\right)^{1-2x}>\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{3}\right)^{4x-2}\Rightarrow\left(\frac{1}{10}\right)^{1-2x}>\left(\frac{1}{10}\right)^{12x-6}\xrightarrow[\text{اکیداً نزولی}]{\text{تابع } y=(0/1)^x}$$

$$12x-6>1-2x\Rightarrow 14x>7\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

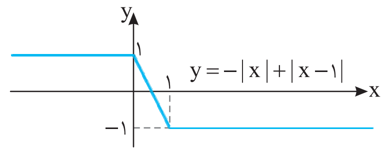
۷ الف) ۱) توابعی مانند $y=|x|$ یا $y=x^2$ توابعی هستند که در دامنهٔ خود یعنی در $\mathbb{R}$ غیریکنوا هستند. به نمودارهای این دو تابع دقت کنید.



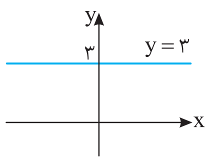
۲) تابعی مانند $y=x^3$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به‌صورت مقابل است که در تمام $\mathbb{R}$ تابعی صعودی (اکیداً صعودی) و در نتیجه یکنوا (اکیداً یکنوا) است.



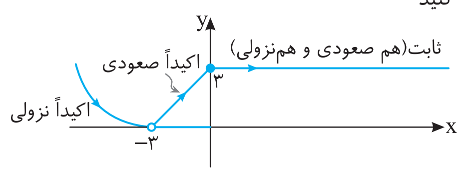
همچنین تابع $y=-|x|+|x-1|$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به صورت زیر است که در تمام دامنهٔ خود (یعنی $\mathbb{R}$) یکنوا (نزولی) است.



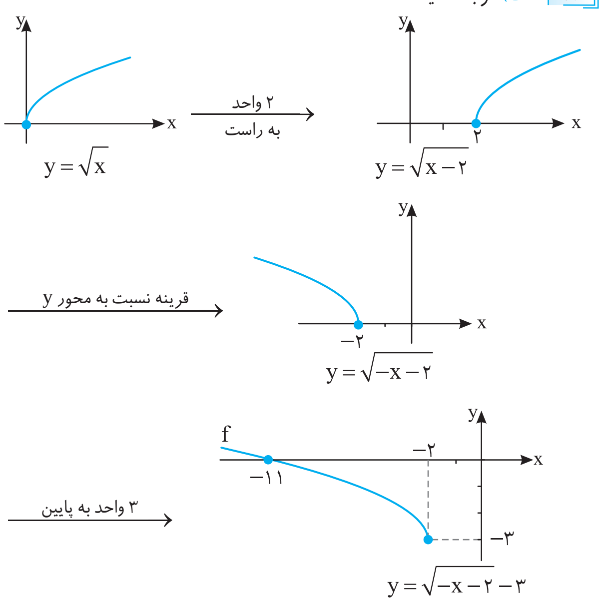
۳) توابع ثابت، توابعی هم‌صعودی و هم نزولی هستند. تابعی مانند $y=3$.



ب) توجه کنید



۸ الف) توجه کنید که



ب) به مراحل تبدیل نمودار دقت کنید: $y=-2f(2x+1)$

۱) انتقال ۱ واحد به چپ (طول نقاط منهای یک می‌شود.)

۲) انقباض افقی (طول نقاط نصف می‌شود.)

۳) انبساط عمودی (عرض نقاط دو برابر می‌شود.)

۴) قرینه نسبت به محور x (عرض نقاط قرینه می‌شود.)

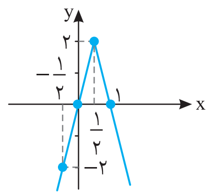
مراحل بالا را روی نقاط f، به‌ترتیب گفته شده انجام می‌دهیم.

$$(0,1)\xrightarrow{1}(-1,1)\xrightarrow{2}\left(-\frac{1}{2},1\right)\xrightarrow{3,4}\left(-\frac{1}{2},-2\right)$$

$$(1,0)\xrightarrow{1}(0,0)\xrightarrow{2}(0,0)\xrightarrow{3,4}(0,0)$$

$$(2,-1)\xrightarrow{1}(1,-1)\xrightarrow{2}\left(\frac{1}{2},-1\right)\xrightarrow{3,4}\left(\frac{1}{2},2\right)$$

$$(3,0)\xrightarrow{1}(2,0)\xrightarrow{2}(1,0)\xrightarrow{3,4}(1,0)$$



۹ برای رسم نمودار تابع f، ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم تا بتوانیم $y=|x+2|+|x-1|$ را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسیم.

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق}}\begin{cases}x+2=0\Rightarrow x=-2\\ x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

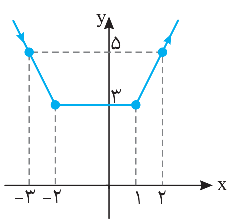
$$f(x)=\begin{cases}-x-2+(-x+1) & x<-2\\ x+2+(-x+1) & -2\le x\le 1\\ x+2+(x-1) & x>1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-2x-1 & x<-2\\ 3 & -2\le x\le 1\\ 2x+1 & x>1\end{cases}$$

برای رسم کردن خط $y=-2x-1$ و خط $y=2x+1$ از نقطه‌های کمکی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

x	1	2
$y=2x+1$	3	5

x	-2	-3
$y=-2x-1$	3	5

بنابراین نمودار تابع به‌صورت زیر است:



الف) $[1,+\infty)$

ب) $(-\infty,+\infty)$. دقت کنید تابع در بخشی از این بازه صعودی اکید و در بخش دیگر نزولی اکید و در نتیجه در کل این بازه غیریکنوا است.

پ) $[-2,1]$. تابع در این بازه ثابت یعنی هم صعودی و هم نزولی است.

ت) $[-2,+\infty)$. در این بازه ابتدا رفتار تابع به‌صورت صعودی (تابع ثابت $y=3$) و سپس به صورت اکیداً صعودی است. در نتیجه در کل بازه رفتار تابع صعودی است.

۱۴ الف) یا باید $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد یا مخرج ریشه نداشته باشد.

$x^2-kx+1=(x-1)^2 \Rightarrow x^2-kx+1=x^2-2x+1 \Rightarrow k=2$ (۰/۲۵)

$\Delta<0 \Rightarrow k^2-4<0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow -2<k<2$ (۰/۲۵)

پس $-2<k\le 2$. (۰/۲۵)

ب) اگر $x\to 3^+$، آن‌گاه $x-3\to 0^+$. در نتیجه باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$\lim_{x\to 3^+}(ax^2+3)<0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 9a+3<0 \Rightarrow a<-\frac{1}{3}$ (۰/۲۵)

۱۵ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+3x-5}{3x^b-3x+10}=2$ (۰/۲۵)

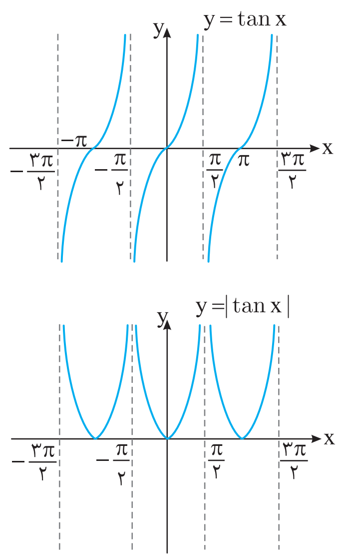
توجه کنید که اگر $b>3$، آن‌گاه حاصل حد، صفر می‌شود و اگر $b<3$ آن‌گاه حاصل حد برابر بی‌نهایت می‌شود، پس باید $b=3$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3}{3x^3}=2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{a}{3}=2 \Rightarrow a=6$ (۰/۲۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۱۳)

۱ الف) نادرست. (۰/۲۵) اگر $f(x)=g(x)=x$، آن‌گاه f و g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی‌اند، اما $f-g$ تابعی ثابت است.

ب) نادرست. (۰/۲۵) به نمودار این تابع توجه کنید. برای رسم نمودار تابع $y=|\tan x|$، ابتدا نمودار $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x است را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم (توجه کنید قسمت‌های زیر محور x را باید حذف کرد).



با توجه به نمودار واضح است که دورهٔ تناوب $y=|\tan x|$ برابر π است.

پ) درست. (۰/۲۵)

ت) نادرست. (۰/۲۵) $y=1+\frac{1}{x}$، پس خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع است.

۲ الف) نزولی. (۰/۲۵) فرض کنید که a و b عضو دامنهٔ تابع f باشند. در این صورت

$a<b \xrightarrow{\text{f صعودی}} f(a)\le f(b) \xrightarrow[k<0]{\times k} kf(a)\ge kf(b)$

ب) $x\ne\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. (۰/۲۵) $2x\ne k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x\ne\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$

پ) ۲. (۰/۲۵) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+2}=\frac{4-0}{0+2}=2$

ت) $-\frac{1}{7}$. (۰/۲۵) $\tan(a+b)=2 \Rightarrow \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}=2$

$\frac{3+\tan b}{1-3\tan b}=2 \Rightarrow 3+\tan b=2-6\tan b$

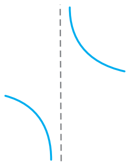
$7\tan b=-1 \Rightarrow \tan b=-\frac{1}{7}$

۳ الف) گزینهٔ (۲). (۰/۲۵)

$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} g(x-1)=f(2(x-1))-1=f(2x-2)-1$

$\xrightarrow[\text{عرض نقاط دو برابر}]{\text{طول نقاط نصف و}} 2g(2x-1)=2f(2(2x)-2)-2=2f(4x-2)-2$

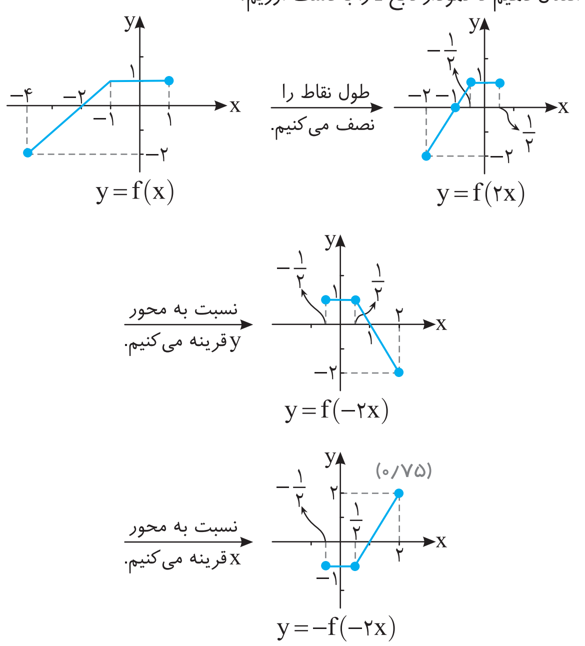
ب) گزینهٔ (۳). (۰/۲۵)



$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

۴ توجه کنید که ابتدا نمودار تابع داده شده را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا نمودار تابع f را به‌دست آوریم.



دامنه$=[-\frac{1}{2},2]$ (۰/۲۵)   برد$=[-1,2]$ (۰/۲۵)

تابعی که روی بازه‌ای هم صعودی است و هم نزولی، روی این بازه ثابت است.

پس این تابع روی بازهٔ $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ هم صعودی است و هم نزولی. (۰/۲۵)